ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-118-132

О подгруппах в группах Артина с древесной структурой[1]

И. В. Добрынина

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

В статье автор продолжает рассматривать вопросы, связанные с проблемой свободы в группах Артина с древесной структурой и опубликованные совместно с В. Н. Безверхним в Чебышевском сборнике в 2014 году. В частности, доказывается следующая теорема о подгруппах для групп Артина с древесной структурой: если H – конечно порожденная подгруппа группы Артина с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной циклической подгруппе. порожденной образующим элементом группы, есть единичная подгруппа, то существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.

Изучением свободных подгрупп в различных классах групп занимались многие выдающиеся математики, основополагающие результаты изложены в ряде учебников по теории групп, монографиях и статьях.

Группы Артина активно изучаются с начала прошлого века. Если группе Артина соответствует конечный дерево-граф такой, что его вершинам соответствуют образующие группы, а всякому ребру, соединяющему вершины, соответствует определяющее соотношение, связывающее соответствующие образующие, то мы имеем группу Артина с древесной структурой.

Группу Артина с древесной структурой можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам.

В процессе доказательства основного результата использовались: приведение множества образующих к специальному множеству, введенному В. Н. Безверхним как обобщение нильсеновского множества на свободные произведения групп с объединением, а также представление подгруппы в виде свободного произведения групп и задание группы с помощью графа.

Ключевые слова: группа Артина с древесной структурой, подгруппа, свободное произведение групп с объединением.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
И. В. Добрынина. О подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 118–132.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-710002 р_а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-118-132

On subgroups in Artin groups with a tree structure

I. V. Dobrynina

Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia (Moscow).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

In the article, the author continues to consider issues related to the problem of freedom in Artin groups with a woody structure, and published jointly with V. N. Bezverkhnim in the Chebyshev Collection in 2014. In particular, the following subgroup theorem is proved for Artin groups with a tree structure: if H is a finitely generated subgroup of the Artin group with a tree structure, and the intersection of H with any subgroup conjugate to a cyclic subgroup. generated by the generating element of the group, there is a unit subgroup, then there is an algorithm describing the process of constructing free subgroups in H.

The study of free subgroups in various classes of groups was carried out by many outstanding mathematicians, the fundamental results are presented in a number of textbooks on group theory, monographs and articles.

Artin's groups have been actively studied since the beginning of the last century. If the Artin group corresponds to a finite tree graph such that its vertices correspond to generating groups, and every edge connecting the vertices corresponds to a defining relation connecting the corresponding generators, then we have an Artin group with a tree structure.

An Artin group with a woody structure can be represented as a tree product of two-generators Artin groups united by infinite cyclic subgroups.

In the process of proving the main result, the following methods were used: the reduction of the set of generators to a special set introduced by V. N. Bezverkhnim as a generalization of the Nielsen set to amalgamated products of groups, as well as the representation of a subgroup as a free product of groups and the assignment of a group using a graph.

Keywords: Artin group with tree structure, subgroup, amalgamated product of groups.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
I. V. Dobrynina, 2022, "On subgroups in Artin groups with a tree structure" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 118–132.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2 \cup \{\infty\}, i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1, n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими

a_i и a_j, соответствует соотношение $\langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}, m_{ij} \neq \{\infty\}, i \neq j$, то мы имеем группу Артина с древесной структурой [1].

В [1] для данного класса групп доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов.

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих G_{ij}, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j\rangle$ [1].

Строение подгрупп свободных групп и свободных произведений групп можно найти в работах [2], [3]. В. Магнус [4] доказал теорему о свободе для групп с одним определяющим соотношением, а Н. С. Романовский [5] — обобщенную теорему о свободе. С. И. Адян, В. Г. Дурнев рассматривали проблему свободы в работе [6].

В [7] рассматривался вопрос об общности класса m-порожденных групп, где любая k-порожденная подгруппа (для произвольного $k < m$) свободна. Решение получено Г. Н. Аржанцевой и А. Ю. Ольшанским [8]. В [9] удалось снять ограничение $k < m$.

Используя методы Г. Н. Аржанцевой и А. Ю. Ольшанского, для групп Кокстера, соответствующих матрице Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, с $m_{ij} \geq 3k+1$ И. Каповичем и П. Шуппом [10] доказано, что всякая k-порожденная подгруппа без кручения является свободной в G.

Для групп Кокстера с древесной структурой свободные подгруппы изучались в [11] с помощью методов работы [12].

Свободные подгруппы в группах Артина с древесной структурой изучались в [13].

В настоящей работе доказываются следующие теоремы:

1. Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой на образующих $a_i, i = \overline{1,n}$, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i\rangle, i = \overline{1,n}$, есть единичная подгруппа, тогда существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.

2. В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

2. Базовые понятия

Пусть $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$ – свободное произведение групп G_1, G_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < G_1, U_2 < G_2$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма ϕ.

Рассмотрим слово из группы $\overline{G}$ и представим его в виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы G_1 по U_1 и G_2 по U_2, при этом r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) являются элементами из разных сомножителей группы $\overline{G}$. Элемент K_g назовем ядром слова g.

Если ядро K_g не является элементом из объединяемой подгруппы, то элементы (слоги) l_{ng} и r_{ng} лежат в одном сомножителе группы $\overline{G}$, а ядро K_g — в другом. В данном случае слоговая длина слова из (1) равна $L(g) = 2n+1$.

Определение 1. *[12] Трансформой называется слово вида*

$$g = r_{1g} \dots r_{ng} K_g r_{ng}^{-1} \dots r_{1g}^{-1}, \tag{2}$$

то есть в (1) выполнено условие $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$.

Если ядро $h_g = K_g$ лежит в объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng}, r_{ng} в (1) лежат в разных сомножителям группы $\overline{G}$. Тогда слоговая длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{3}$$

равна $L(g) = 2n$.

Нетрансформой нечетной длины будем называть слово вида (1), нетрансформой четной длины — слово вида (3) [12].

Определение 2. *[12] Левой (правой) половиной слов (1), (3) называется подслово $g = l_{1g} \dots l_{ng} (r_{ng} \dots r_{1g})$. Большим начальным (конечным) отрезком называется подслово $l_{1g} \dots l_{ng} K_g$ $(K_g r_{ng} \dots r_{1g})$.*

Определение 3. *[12] Левую (правую) половину слова*

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

будем называть изолированной в множестве $\{w_j\}_{j \in \overline{1,N}}$, если ни у одного из слов $w_j^\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$ множества $(\{w_j\}_{j \in \overline{1,N}} \setminus \{w_i\}) \cup (\{w_j^{-1}\}_{j \in \overline{1,N}} \setminus \{w_i^{-1}\})$ невозможно выделить подслово $l_{1w_i} \dots l_{mw_i} (r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова, то есть

$$w_j^\varepsilon \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^\varepsilon (w_j^\varepsilon \neq w_{j1}^\varepsilon r_{m+1w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}).$$

Определение 4. *[12] Специальным назовем конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$, из группы $\overline{G}$, если для него выполнены следующие условия:*

1. Левая половина нетрансформы из множества W изолирована в нем. Для нетрансформы четной длины изолирована и левая, и правая половины.

2. Нельзя уменьшить длину нетрансформы w_j, умножая ее слева и справа на элементы из подгруппы, порожденной множеством $W \setminus \{w_j\}$. Длину произвольного слова w_j нельзя уменьшить, умножая на элемент w длины меньше $L(w_j)$, принадлежащий подгруппе $\langle W \rangle$.

3. Если $w_i'^\varepsilon = l_{1w_i'} \dots l_{nw_i'} K_{w_i'} r_{nw_i'} \dots r_{s+1w_i'} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1, s < n,$ — нетрансформа из W и $\{w_i''^\varepsilon = l_{1w_i''} \dots l_{nw_i''} K_{w_i''} r_{nw_i''} \dots r_{s+1w_i''} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1\}$ — подмножество нетрансформ из $(W \setminus \{w_i'\}) \cup (W \setminus \{w_i'^{-1}\})$, правые половины которых оканчиваются подсловом $r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}$, тогда если подгруппа $\langle W \rangle \cap$ $r_{1w_i'}^{-1} \dots r_{sw_i'}^{-1} D r_{sw_i'} \dots r_{1w_i}' = B$, где $D = G_1$, если $r_{s+1w_i'} \in G_1$, либо $D = G_2$, если $r_{s+1w_i'} \in G_2$, $D \neq E$, то для $u \in B$ выполняются неравенства $L(w_i' u) \geq L(w_i'), L(w_i' u w_i''^\varepsilon) \geq L(w_i')$.

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}, w_j = l_{1w_j}$ $\dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$ — слова из W, не обязательно различные, $s \leq m \leq n$, тогда не существует слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы, порожденной W, такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$g w_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$g w_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} r'^{-1}_{s+1w_i} \dots r'^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l^{-1}_{nw_i} \dots l^{-1}_{1w_i},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r^{-1}_{1w_i} \dots r^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

3. Вспомогательные утверждения

Теорема 1. *[12] Пусть $G = G_1 *_U G_2$, U обладает свойством максимальности. Тогда любое конечное множество слов группы G сводится к конечному специальному множеству, соответствующему данному.*

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$.

Множество образующих $W = \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ подгруппы H приведем к специальному. Разобьем его следующим образом на подмножества: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножеству $M_i, i = \overline{1,k}$, принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями, принадлежащие одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из G_1 или G_2. С каждым из множеств $M_i, i = \overline{1,k}$, связана подгруппа $(M_i) = r_{1i}^{-1}r_{2i}^{-1}\dots r_{ni}^{-1}C_i r_{ni}\dots r_{2i}r_{1i}$, где C_i — подгруппа из G_1 или G_2, порожденная ядрами трансформ из M_i. Упорядочим (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд

$$(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_k) \tag{4}$$

Лемма 1. *[12] Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$(M_1') \le (M_2')\dots \le (M_{k'}'), \tag{4'}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp((M_0),(M_1),(M_2),\dots,(M_k)) = gp((M_0),(M_1'),(M_2'),\dots,(M_{k'}'))$.

2. Если подгруппе $(M_j') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j' r_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$ принадлежит трансформа $u = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}h_u r_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$, где h_u принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (4') имеется подгруппа

$$(M_l') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{n-1j}^{-1}C_l' r_{n-1j}\dots r_{2j}r_{1j},$$

содержащая u.

3. Если $(M_j') = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j' r_{nj}\dots r_{1j}$, $(M_s') = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1s}^{-1}\dots r_{ms}^{-1}C_s' r_{ms}\dots r_{n+1s}r_{nj}\dots r_{1j}$ подгруппы ряда (4') и подгруппа (M_j') содержит трансформу $u = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}h_u r_{nj}\dots r_{1j}$ либо $u' = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}K_u r_{nj}\dots r_{1j}$, $K_u = r_{n+1s}^{-1}h_u r_{n+1s}$, то существует подгруппа ряда $(4')$ $(M_k') = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1s}^{-1}C_k' r_{n+1s}r_{nj}\dots r_{1j}$, содержащая в первом случае трансформу u, во втором — u'.

4. Если $(M_j') = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j' r_{nj}\dots r_{1j}$ — подгруппа ряда $(4')$ и

$$y^{\varepsilon} = l_{1y}^{-1}\dots l_{my}^{-1}K_y r_{my}\dots r_{n+1y}r_{nj}\dots r_{1j}, \varepsilon = \pm 1,$$

— элемент специального множества, причем подслово $r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы $w^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$, и, если подгруппа (M_j') содержит трансформу $r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}hr_{nj}\dots r_{1j}$ либо трансформу $r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}Kr_{nj}\dots r_{1j}$, где $K = r_{n+1y}^{-1}hr_{n+1y}$ то существует подгруппа ряда $(4')$ $(M_l') = r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1y}^{-1}C_l' r_{n+1y}r_{nj}\dots r_{1j}$, содержащая эту трансформу.

5. Если для некоторой трансформы $u = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}K_u r_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$, принадлежащей подгруппе $(M_j') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j' r_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$ и нетрансформы y (левая половина y изолирована) из M_0 выполняется соотношение $L(y^{-1}uy) \le L(y)$, то существует подгруппа (M_s') ряда $(4')$, содержащая трансформу

$$y^{-1}r_{1u}^{-1}r_{2u}^{-1}\dots r_{nu}^{-1}K_u r_{nu}\dots r_{2u}r_{1u}y,$$

а если $L(yuy^{-1}) < L(y)$, то существует подгруппа (M_s') из $(4')$, содержащая трансформу $yr_{1u}^{-1}r_{2u}^{-1}\dots r_{nu}^{-1}K_u r_{nu}\dots r_{2u}r_{1u}y^{-1}$.

Подгруппу, порожденную специальным множеством $W = \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ обозначим через $gp(M_0, S)$, где S — подгруппа, порожденная подгруппами ряда $(4')$.

Определение 5. *[12] Произведение $u_1u_2\ldots u_m$, где $u_i \neq 1$, $u_i \in W\cup W^{-1}, i=\overline{1,m}$, из подгруппы $gp(M_0, S)$ назовем словом группы $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$, если*

1. $u_i \neq 1$.

2. $u_i \in M_0 \cup M_0^{-1}$ либо u_i принадлежат некоторой подгруппе из ряда $(4')$.

3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}, i=\overline{1,m-1}$.

4. $u_i, u_{i+1}, i=\overline{1,m-1}$, не содержатся в одной подгруппе ряда $(4')$.

5. В $u_1u_2\ldots u_m$ нет произведения $u_iu_{i+1}u_{i+2}, i=\overline{1,m-2}$, где $u_i = u_{i+2}^{-1}, u_i \in M_0\cup M_0^{-1}$, $u_{i+1}\in(M'_j), u_iu_{i+1}u_{i+2}\in(M'_s)$, где $(M'_j),(M'_s)$ из ряда $(4')$.

Лемма 2. *[12] Всякое произведение $w_{i1}^{\varepsilon 1}w_{i2}^{\varepsilon 2}\ldots w_{in}^{\varepsilon n}, \varepsilon=\pm1$, где w_{ij} — образующие подгруппы $\langle W\rangle$, через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i1}u_{i2}\ldots u_{im}, m\leq n$, подгруппы $gp(M_0,S)=\langle W\rangle$.*

Определение 6. *[12] Будем говорить, что между словами v_1 и v_2 имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения v_1v_2 соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин $L(v_1), L(v_2)$.*

Определение 7. *[12] Слово $u_1u_2\ldots u_m$ будем называть простым, если*

$$L(u_1u_2\ldots u_m) = \max\{L(u_1), L(u_2), \ldots, L(u_m)\}$$

.

Лемма 3. *[12] Пусть $u_1u_2\ldots u_m$ — слово из подгруппы $gp(M_0;S)$. Тогда*

$$L(u_1u_2\ldots u_m) \geq L(u_i), i=\overline{1,m}.$$

Следствие 1. *[12] Если в слове $u_1u_2\ldots u_m$ выполнить сокращение в группе $\overline{G}$, то оно не затронет, по крайней мере, левую половину слова u_1.*

Следствие 2. *[12] Всякое слово подгруппы $gp(M_0;S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Лемма 4. *[12] Пусть W — специальное множество слов группы $\overline{G}$ и $H=\langle W\rangle$ — подгруппа $\overline{G}$ и пусть $w_i^\varepsilon = l_1\ldots l_mK_{w_i}r_m\ldots r_1$ — элемент специального множества, $v = l_1\ldots l_t, t\leq m$, — начальное подслово левой половины w_i^ε, причем v не является изолированной левой половиной w_i^ε. Тогда если $A_v = H\cap l_1\ldots l_tA_jl_t^{-1}\ldots l_1^{-1}\neq E$, где $A_j=G_1$, если $l_t\in G_2$ либо $A_j=G_2$, если $l_t\in G_1$, то ряд $(4')$ содержит подгруппу $(M'_s)=A_v$.*

Лемма 5. *[12] Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна.*

Лемма 6. *[12] $(M_0)\cap(S)^{gp(M_0;S)}=E$, где E — единичная подгруппа.*

Лемма 7. *Пусть $\overline{G}=\langle G_1*G_2;\phi(U_1)=U_2\rangle$, S — древесное произведение подгрупп $(M'_i), i=\overline{1,k'}$. Если пересечение H с любой подгруппой, сопряженной U_1, U_2, есть E, то $H=(M_0)*(M'_1)*\ldots*(M'_{k'})$.*

Доказательство непосредственно следует из строения подгруппы H и леммы 4.

4. Основные теоремы

Теорема 2. *[13] Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы G_{ij} выполнено равенство $H \cap gG_{ij}g^{-1} = E$, то H является свободной.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ установить, принадлежит ли w подгруппе H.

Теорема 3. *[12] Пусть $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$, и (1) $U_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством максимальности, (2) в G_1, G_2 разрешимы проблемы вхождения; (3) существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1,2}$, и любого элемента $v \in G_i, i = \overline{1,2}$, установить, пусто или нет пересечение $vH \cap U_i$; (4) существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1,2}$, и подгруппы U_i образующие их пересечения, то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов из G в специальное.*

Теорема 4. *Существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы H группы Артина G с древесной структурой, установить, является или нет единичной подгруппой E пересечение H с произвольной циклической подгруппой $\langle w\rangle$ из G_{ij}.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G$ и конечно порожденной подгруппы H выяснить, пусто или нет пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, где $\langle w\rangle \in G_{ij}$.

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции.

Пусть $m_{ij} = 2k+1, i \neq j$, тогда $G_{ij} \simeq B = \langle x, y; x^{2k+1} = y^2\rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f: a_i \to x^{k+1}y^{-1}, a_j \to yx^{-k}$ [14]. Доказательство будем проводить для группы B.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы $B, \langle w\rangle < B$. Будем считать, что образующие H приведены к специальному множеству $H = qp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда $(4')$.

Профакторизуем B по подгруппе $N = \langle x^{2k+1}\rangle$. Очевидно, что $N = \langle x^{2k+1}\rangle^B$, $N < B$. Получим группу $B_1 = B/N = \langle x, y; x^{2k+1}, y^2\rangle$. В данной группе разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп [15] и смежного класса с циклической подгруппой [16].

Пусть w — циклически несократимо, $L(w) = 1$, тогда $w \in \langle x\rangle$ либо $w \in \langle y\rangle$. Допустим $w \in \langle x\rangle$, если $H \cap \langle x\rangle \neq E$ (E — единичная подгруппа), то по лемме 4 ряд $(4')$ содержит подгруппу (M'), $(M') = H \cap \langle x\rangle$ и $H \cap \langle w\rangle = \langle M'\rangle \cap \langle w\rangle$. Аналогично получаем, если $w \in \langle y\rangle$.

Пусть $\forall i$, $i = \overline{1,k}$, $(M'_i) = E$, тогда H — свободная подгруппа, порожденная множеством M_0 по лемме 5 и $H \cap \langle w\rangle = E$.

Пусть $L(w) \geq 2$, w — циклически несократимое слово в группе B, в противном случае добьемся циклической несократимости w, сопрягая одновременно w и H.

Рассмотрим группу $B_1 = B/N = \langle x, y; : x^{2k+1}, y^2\rangle$. Пусть Ψ — гомоморфизм B на B_1, $\Psi(B) = B_1$. Представим w в виде: $w = h_0\overline{w}$, где $\Psi(w) = \overline{w}$, $h_0 \in \langle x^{2k+1}\rangle$, и каждый образующий w_i подгруппы H запишем в виде $w_i = h_i\overline{w}_i$, $i = \overline{1, N_1}$, $h_i \in \langle x^{2k+1}\rangle$, $\Psi(w) = \overline{w}$. Множество $\{\overline{w}_i\}_{i=\overline{1,N_1}} \backslash \{E\}$ является специальным множеством образующих подгруппы $\Psi(H)$ в группе $B_1 = \langle x, y; : x^{2k+1}, y^2\rangle$, которая представляет свободное произведение групп $\langle x; : x^{2k+1}\rangle$, $\langle y; : y^2\rangle$.

Как отмечено выше, в группе B_1 разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп, поэтому можно эффективно выписать образующие пересечения $\langle\overline{w}\rangle \cap \Psi(H)$.

Если $\overline{w}_{i1}\overline{w}_{i2}\dots\overline{w}_{is} = \overline{w}^p$, то в группе B: $w_{i1}w_{i2}\dots w_{is} = x^{\alpha(2k+1)}\overline{w}_{i1}\overline{w}_{i2}\dots\overline{w}_{is}$, $w^p = x^{\beta(2k+1)}\overline{w}^p$.

Пусть $C(B) \cap H = E$, тогда $H \cap \langle w \rangle = \langle w^p \rangle$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Пусть $C(B) \cap H \neq E$ и $\alpha \neq \beta$, тогда по лемме 4 имеем $C(B) \cap H = (M_1')$, где (M_1') — подгруппа ряда $(4')$, $(M_1') = \langle x^{\alpha_0(2k+1)} \rangle$. Чтобы проверить $H \cap \langle w \rangle \neq E$, рассмотрим соотношение:

$$(x^{\alpha_0(2k+1)})^m (x^{\alpha(2k+1)} \overline{w}_{i1} \overline{w}_{i2} \ldots \overline{w}_{is})^n = (x^{\beta(2k+1)})^n (\overline{w}^p)^n. \tag{5}$$

Но $\overline{w}^p$ циклически несократимо, следовательно и $\overline{w}_{i1} \overline{w}_{i2} \ldots \overline{w}_{is}$ — циклически несократимо, поэтому для (5) получим:

$$\alpha_0 m + \alpha n = \beta n \tag{6}$$

Определяем пересечение $H \cap \langle w \rangle$, решая уравнение (6).

Рассмотрим теперь проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы H с циклической подгруппой $\langle w \rangle$ в группе B. Пусть v — слово группы B и $v \notin H$. Выясним, пусто или нет пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, то есть

$$v u_1 u_2 \ldots u_k = w^p \tag{7}$$

где $u_1 u_2 \ldots u_k$ — слово подгруппы H, образующие которой приведены к специальному множеству, w — циклически несократимое слово.

Рассмотрим случай, когда $L(w) = 1$, то есть $w = x^{(2k+1)\alpha_0} x^s$, $0 \leq s < 2k+1$.

Если $L(v) > 1$, то эффективно определяется слово $u = u_1 u_2 \ldots u_k \in H$, максимально сокращающее длину v. Покажем это, то есть постоим алгоритм, выписывающий слово $u = u_1 u_2 \ldots u_k$ из H с данным свойством.

Рассмотрим группу $G = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2 \rangle$, являющуюся свободным произведением групп $G_1, : G_2$ с объединением, в G выполняются условия теоремы 3.

Рассмотрим слово $v \in G, : L(v) > 1$, v — циклически несокатимо в G и пусть H, $H < G$, конечно порожденная подгруппа, образующие W которой приведены к специальному множеству; $H = qp(M_0, S)$, где M_0 — нетрансформы из W, S — подгруппа порожденная подгруппами $\{(M_i')\}_{i=\overline{1,k'}}$:

1) выделим в v максимальное подслово g^{-1}, $v = v_1 K_0 g^{-1}$, где g — левая половина некоторого w_j^ϵ , $\epsilon = \pm 1$, $w_j^\epsilon \in W \cup W^{-1}$, пусть $K_0 \in A_i$, $i = 1, 2$;

2) допустим, что g — левая половина трансформы подгруппы $(M_s') = g A_s' g^{-1}$, определим пересечение $K_0 A_s' \cap U_i$; если $K_0 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то (M_s') содержит трансформу $g K_1 g^{-1}$, с помощью которой сокращаем v;

3) пусть $K_0 A_s' \cap U_i = \varnothing$ и g является неизолированной левой половиной нетрансформы $g K_2 g' \in M_0$ и пусть подгруппа $(M_s') = g A_s' g^{-1} \in \{(M_i')\}_{i=\overline{1,k'}}$; определим пересечение: $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i$. Если $K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i \neq \varnothing$, то в этом случае длину v умножением справа на слово $g K_1 g^{-1} g K_2 g'$ можно уменьшить;

4) пусть $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = \varnothing$; допустим, что g является изолированной левой половиной нетрансформы $u \in M_0$; если u — нетрансформа четной длины, то $L(vu) < L(v)$; пусть $u = g K_1 g'$ — нетрансформа нечетной длины и пусть существует подгруппа $(M_s') = g_1^{-1} A_s' g' \in \{(M_i')\}_{i=\overline{1,k'}}$; рассмотрим пересечение $K_0 K_1 A_s' \cap U_i$; если $K_0 K_1 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то производим сокращение слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot g'^{-1} K_2 g'$.

5) пусть $K_0 K_1 A_s' = \varnothing$ и M_0 содержит нетрансформу $g'^{-1} K_3 g''$. Рассмотрим пересечение $K_0 K_1 A_s' K_3 \cap U_i = K_0 K_1 K_3 (K_3^{-1} A_s' K_3) \cap U_i$; если пересечение не пусто, то произведем сокращение длины слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot g'^{-1} K_2 g' \cdot g'^{-1} K_3 g''$.

6) пусть $K_0 K_1 A_3' K_3 \cap U_i = \varnothing$, тогда в слове $v = v_1 K_0 g^{-1}$ подслово $K_0 g^{-1}$ с помощью преобразования (2) или (4) преобразуем, если это возможно, в подслово правой половины либо в правую половину некоторого w_j^ϵ , $\epsilon = \pm 1$, $w_j \in W$. Если преобразование (6) не удается выполнить, то мы построили слово $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, иначе перейдем к преобразованию (1).

Выполнив (1)-(6) конечное число раз, построим слово $u = u_1 u_2 \dots u_n$, такое, что $v \cdot u_1 u_2 \dots \dots u_n = v' u''_n$, где $v = v'v'', u_n = u'_n u''_n$. Используя свойства специального множества можно показать, что длину слова $v'u''_n$ нельзя уменьшить, умножая на слова из H.

Применяя к слову v и подгруппе H из B преобразования (1)-(6), получим слово $v'u''_n$. Если $L(v'u''_n) > 1$, то $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$.

Пусть $L(v'u''_n) = 1$, то есть $v'u''_n = x^t x^{(2k+1)\gamma_0}$, и ряду $(4')$ принадлежит подгруппа $(M) = \langle x^\beta \cdot x^{(2k+1)\gamma_1} \rangle$, где $0 \le \beta < 2k+1$. Тогда

$$vH \cap \langle w \rangle = (v'u''_n)(M) \cap \langle w \rangle \tag{8}$$

Из (8) следует соотношение:

$$x^t x^{(2k+1)\gamma_0} \cdot (x^\beta x^{(2k+1)\gamma_1})^m = (x^s x^{(2k+1)\alpha_0})^n \tag{9}$$

из которого получаем:

$$t + (2k+1)\gamma_0 + (\beta + (2k+1)\gamma_1)m = (s + (2k+1)\alpha_0) \cdot n \tag{10}$$

Из решения уравнения (10) относительно m, n выясняем справедливы ли равенства (9) и (8).

Пусть $C(B) \cap H = E$, тогда подгруппа H свободна и порождается множеством M_0. Данный случай сводится к проблеме вхождения $v'u''$ в циклическую подгруппу $\langle w \rangle$.

Рассмотрим теперь случай, когда $L(w) > 1$. В этом случае проверяем, справедливо ли равенство (7) в группе B_1. Обозначим: $\Psi(v) = \overline{v}$, $\Psi(w) = \overline{w}$, $\Psi(H) = \overline{H}$, $\Psi(u_1 \dots u_k) = \Psi(u_1) \dots \dots \Psi(u_k) = \overline{u}_1 \dots \overline{u}_k$.

Из ранее сказанного следует, что можно эффективно установить в группе B_1 пусто или не пусто пересечение $\overline{v}\overline{H} \cap \langle \overline{w} \rangle$, то есть справедливо ли в B_1 равенство:

$$\overline{v}\overline{u}_1 \dots \overline{u}_k = \overline{w}_p \tag{11}$$

Так как слово $\overline{w}$ циклически несократимо, то циклически несократимо слово $\overline{T} = \overline{v}\overline{u}_1 \dots \overline{u}_k$. Пусть слову $\overline{T}$ в группе B соответствует слово $x^{(2k+1)\beta_0}\overline{T}$, а $\overline{w}_p$ — $x^{(2k+1)\alpha_0}\overline{w}_p$. Тогда (11) в группе B соответствует равенство

$$cx^{(2k+1)\beta_0}\overline{T} = x^{(2k+1)\alpha_0}\overline{w}_p, \tag{12}$$

где $c \in C(B)$.

Пусть $C(B) \cap H = E$, тогда $c = 1$ и соотношение (12) имеет место, если $\beta_0 = \alpha_0$.

Пусть $C(B) \cap H \neq E$, тогда среди подгрупп ряда $(4')$ по лемме 4 содержится подгруппа $(M) = C(B) \cap H$, $(M) = \langle x^{(2k+1)\gamma_0} \rangle$.

Пусть $\alpha_0 \neq \beta_0$. Выясним, существуют ли m, n и $c \in (M)$ такие, что

$$(x^{(2k+1)\beta_0}\overline{T})^m (x^{(2k+1)\gamma_0})^n = (x^{(2k+1)\alpha_0}\overline{w}_p)^m, \tag{13}$$

из которого получаем:

$$\beta_0 m + \gamma_0 n = \alpha_0 m, \tag{14}$$

из решения уравнения (14) получаем (13).

Пусть $m_{ij} = 2k, i \neq j, k > 1$. Тогда $G \simeq \langle t, x; tx^k t^{-1} = x^k \rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f : a_i \to t, a_j \to xt^{-1}$ [15]. Существование первого алгоритма следует из работы [13]. Из работы [18] следует существование второго алгоритма.

Пусть $m_{ij} = 2, i \neq j$, тогда G_{ij} является абелевой. В данном случае доказательство теоремы очевидно.

Рассмотрим группу $G = \langle a_i, a_j, a'_j, a_k; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, \langle a'_j a_k \rangle^{m_{jk}} = \langle a_k a'_j \rangle^{m_{kj}}, a_j = a'_j \rangle$, которую далее будем обозначать $G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$.

Пусть $H < G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$, причем H — конечно порожденная подгруппа. Пусть слово $w \in G_{ij}, w \neq 1$. Докажем, что существует алгоритм, выписывающий образующие $H \cap \langle w \rangle$. Приведем образующие подгруппы H к специальному виду $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда $(4')$. Выясним, существует ли в множестве подгрупп ряда $(4')$: $(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k)$, подгруппа, содержащаяся в G_{ij}. Допустим $(M_1) < G_{ij}$, подгруппа (M_1) находится в начале ряда $(4')$ и состоит из трансформ с крыльями, равными 1. Тогда определяем пересечение $(M_1) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$.

Покажем теперь существование второго алгоритма. Пусть $H < G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$ и $v \in G$ — произвольное слово, причем v не принадлежит H. Найдем пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $\langle w \rangle \subset G_{ij}$.

Рассмотрим слово $u \in H, u = u_1 u_2 \ldots u_n$. Используя преобразования 1)-6), через конечное число шагов построим приведенное слово vu. Если $L(vu) > 1$, то пересечение $vH \cap \langle w \rangle$ пусто. Если $L(vu) = 1, vu \in G_{ij}$, выясним существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда $(4')$ подгруппа с единичными крыльями $(M_{s_1}) = A_{s_1} < G_{ij}$, и рассматриваем пересечение $vu(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Возможно, что подгруппа $\langle w \rangle$ принадлежит объединяемой подгруппе.

Рассмотрим этот случай подробнее. Итак, $\langle w \rangle = \langle a_j^t \rangle$.

Пусть $L(v) = 1$, $v \in G_{ij}$. Выясним, будет ли $vH \cap \langle w \rangle \neq \varnothing$, либо $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$. Пусть $H \cap G_{ij} \neq E$, тогда ряду $(4')$ принадлежит подгруппа $(M_i), (M_i) = H \cap G_{ij}$ (лемма 4) и проблема пресечения $vH \cap \langle w \rangle = v(M_i) \cap \langle w \rangle$. Данный случай рассмотрен выше. Если $H \cap G_{ij} = E$, то $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$. Пусть $v \in G_{jk}$. Выясним, будет ли выполняться соотношение $vH \cap \langle w \rangle \neq \varnothing$.

Если $H \cap G_{jk} \neq E$, то $H \cap G_{jk} = (M'_j)$ — подгруппа ряда $(4')$. Выясним пусто или не пусто пересечение $v(M'_j) \cap \langle a_k \rangle$. Допустим, что $vu = a_k^m, u \in (M'_j)$, при этом $a_k^m \notin H$, так как в противном случае $v \in H$. Пусть $H \cap G_{ij} \neq E$, $H \cap G_{ij} = (M_i)$, рассматриваем пересечение $a_k^m(M_i) \cap \langle w \rangle$. Пусть получили, что $a_k^m(M_i) \cap \langle w \rangle = \varnothing$.

Допустим, что M_0 содержит нетрансформу $lh_0r, L(lh_0r) = 2,\ l \in G_{jk},\ r \in G_{ij},\ h_0 \in \langle a_k \rangle$, такую, что

$$vu(lh_0r) = h'r,$$

где $u \in (M'_j), h' \in \langle a_k \rangle$ (u может быть равно единице). Заметим, что u, h' могут быть эффективно вычислены подобно тому, как это показано выше.

Пусть $H \cap G_{ij} \neq E$, тогда $H \cap G_{ij} = (M_i)$, (M_i) принадлежит ряду $(4')$, определяем пересечение $h'r(M_i) \cap \langle w \rangle$; в группе G_{ij} данная проблема алгоритмически разрешима.

Для определения пересечения смежного класса $vH,\ L(v) = 1$ с циклической подгруппой $\langle a_j \rangle$ рассуждения аналогичны.

Если $vu(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = E$, аналогичные рассуждения нужно провести для $\langle w \rangle \in G_{jk}$, если $vu \in G_{jk}$.

Имея базу индукции, предполагаем, что утверждение справедливо для группы G, имеющей меньше n сомножителей в графе $\overline{\Gamma}$, и докажем для n сомножителей.

Покажем, что существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы H группы Артина G с древесной структурой, установить пересечение H с произвольной циклической подгруппой $\langle w \rangle$ из G_{ij}. Более того, существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G$ и конечно порожденной подгруппы H выяснить, пусто или нет пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $\langle w \rangle$ из G_{ij}. Выделим в дереве $\overline{\Gamma}$ группы G ребро e_i, которое связывает графы $\overline{\Gamma}_i$ и $\overline{\Gamma}_j$, где v_i и v_j — вершины ребра e_i, причем вершине v_i соответствует группа $G_{ij} \in G_{\overline{\Gamma}_i}$. Вершине v_j соответствует группа G_{jk}, группы G_{ij} и G_{jk} объединены по циклической подгруппе $\langle a_j \rangle$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа, такая что $H < G = G_{\overline{\Gamma}_i} *_{\langle a_j \rangle} G_{\overline{\Gamma}_j}$. Для подгрупп $G_{\overline{\Gamma}_i}$ и $G_{\overline{\Gamma}_j}$ выполняются все условия теоремы 1, а следовательно образующие подгруппы H можно привести к виду $H = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда $(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k)$. Выберем слово $w \in G_{\overline{\Gamma}_i}$, $w \neq 1$, $w \in G_{ij} < G_{\overline{\Gamma}_i}$, и рассмотрим существование алгоритма, выписывающего пересечение $H \cap \langle w \rangle$. Выясняем существует ли в S подгруппа (M_{s_1}), состоящая из трансформ длины 1, которая содержится в $G_{\overline{\Gamma}_i}$. Используя индуктивное предположение, определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle$. Таким образом, $(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle = H \cap \langle w\rangle$.

Пусть подгруппа $H < G$ и слово $v \in G$, причем v не принадлежит H. Найдем пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, $\langle w\rangle < G_{ij}$, где группа G_{ij} соответствует вершине v_i графа $\overline{\Gamma}$. Приведем образующие подгруппы H к специальному множеству: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда $(4')$. Возьмем произвольное слово $u \in H$, перепишем его в специальных образующих $u = u_1 u_2 \dots u_n$, выясним, в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения, как в случае группы $G = G_{ij} *_{\langle a_j\rangle} G_{jk}$. В результате через конечное число шагов построим слово vu. Если $L(vu) = 1, vu \in G_{\overline{\Gamma}_i}$ выясняем существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда $(4')$ подгруппа $(M_{s1}) = A_{s1} < G_{\overline{\Gamma}_i}$ и рассматриваем $vu(M_{s1}) \cap \langle w\rangle$.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 5. *Существует алгоритм, позволяющий всякое конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ группы Артина G с древесной структурой привести к конечному специальному, порождающему ту же подгруппу.*

В группе Артина G с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

Доказательство. Заметим, что условие (1) теоремы 3 выполняется всегда. Выполнение условия (2) следует из работ [18] и [19]. Условия (3)-(4) выполняются на основе теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i\rangle, i = \overline{1,n}$, есть единичная подгруппа, тогда существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.*

Доказательство. 1. Пусть H — конечно порожденная подгруппа двупорожденной группы Артина G_{ij}.

Если $m_{ij} = 2, i \neq j$, тогда G_{ij} абелева. Так как H не может быть ни подгруппой из $\langle a_i\rangle$, ни подгруппой из $\langle a_j\rangle$, то $H = \langle a^l b^m\rangle, l \neq 0, m \neq 0$.

Рассмотрим группу Артина большого типа G_{ij}, то есть $m_{ij} \geq 3, i \neq j$.

Пусть $m_{ij} = 2k+1, i \neq j$, тогда $G_{ij} \simeq B = \langle x, y; x^{2k+1} = y^2\rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f: a_i \to x^{k+1}y^{-1}, a_j \to yx^{-k}$. Так как G_{ij} является свободным произведением с объединением, то множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H приведем к специальному. Из леммы 5 получаем, что подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна. Допустим, что существует только одна из подгрупп $(M_i'), i \in \overline{1,k'}$ из $4'$, тогда в качестве свободной подгруппы возьмем $(M_0) \neq E$. Если $(M_0) = E$, то свободной берем подгруппу $(M_i'), i \in \overline{1,k'}$. Если таких подгрупп несколько, то рассмотрим подгруппу $T = (M_1') *_{N_1'} (M_2') *_{N_2'} \dots *_{N_{k'-1}'} (M_{k'}')$, где $N_i', i \in \overline{1,k'-1}$, — подгруппы из центра и $(M_i') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$, где C_i — подгруппы из $\langle x\rangle$ или $\langle y\rangle$, порожденные ядрами трансформ вида $x^{\pm t}, 1 \leq t < 2k+1$, или $y^{\pm 1}$. Профакторизуем B по нормальному делителю $N = < x^{2k+1} >^B$. Получим группу $B_1 = B/N = \langle x, y; x^{2k+1}, y^2\rangle$. В образе подгруппы $T' = (M_1'') * (M_2'') * \dots * (M_{k'}'')$ возьмем любую конечно порожденную подгруппу L. Приведем ее образующие к специальному множеству (нильсеновским образующим) аналогично описанному в определении 4. Выделим в L свободную подгруппу P аналогично тому, как выделялась (M_0). По теореме Куроша [3] L представляет собой свободное произведение свободной группы P и групп, которые сопряжены с подгруппами свободных множителей $(M_i''), i = \overline{1,k'}$, группы T'. Возьмем свободную группу P, а остальные группы отбросим. Восстановим P в группе G_{ij}. К ее образующим добавятся только элементы из центра. Поэтому в G_{ij} она будет свободна. Присоединим ее к (M_0). Обозначим рассматриваемую свободную подгруппу группы G_{ij} через (M_0').

Пусть $m_{ij} = 2k, i \neq j$. Тогда $G \simeq B = \langle t, x; tx^k t^{-1} = x^k \rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f : a_i \to t, a_j \to xt^{-1}$. Так как G_{ij} является HNN-расширением, то множество образующих $W = \{w_i\}, i = \overline{1, N}$, подгруппы H приведем к специальному [12], аналогично указанному выше. Вновь разобьем специальное множество на подмножество M_0, которому принадлежат все нетрансформы, и подмножества $M_i, i = \overline{1, k}$, которым принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями. Для специального множества выполняются леммы 1-3, 5,6 и $H = gp(M_0, S)$, S — древесное произведение подгрупп $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, как в лемме 1. Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна. Далее свободные подгруппы строим как в случае $m_{ij} = 2k + 1$, используя при необходимости фактор-группу $B/N = \langle t, x; x^k \rangle$ группы B по нормальному делителю $N = \langle x^k \rangle^B$. В этом случае аналогично получим свободную подгруппу (M_0').

2. Пусть теперь H — конечно порожденная подгруппа группы Артина $\widetilde{G} = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$ с древесной структурой, удовлетворяющая условиям теоремы. Приведем множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H к специальному как описано выше. $H = gp(M_0, S)$, S — древесное произведение подгрупп $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, из $(4')$.

Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, по лемме 5 свободна.

Подгруппы $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, имеют вид $(M_i') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}$, где C_i — подгруппы из G_{ij}, либо C_i — подгруппы из G_{jk}.

Для подгрупп C_i выполним пункт 1, рассмотренный ранее для группы G_{ij}.

Таким образом, мы эффективно выделим в каждой подгруппе $C_i, i = \overline{1, k'}$, свободную часть, которую обозначим $(M_{0i}'), i = \overline{1, k'}$. Присоединим к (M_0') подгруппы $(M_{0i}'') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots \ldots r_{ni}^{-1} (M_{0i}') r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}, i = \overline{1, k'}$, образующие которых мы можем выписать. Для данного случая теорема справедлива. Кроме того, свободная часть по лемме 7 будет иметь вид

$$(\tilde{M}_0) = (M_0') * (M_{01}'') * \ldots * (M_{0k'}''). \tag{15}$$

3. Рассмотрим конечно порожденную группу Артина с древесной структурой G, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам:

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, n}\} \rangle$$

.

В данном случае группе Артина G соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}$ такой, что, вершинам графа $\overline{\Gamma}$ соответствуют группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическая подгруппа $\langle a_j \rangle$. Рассмотрим древесное произведение $n - 1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-1}, \overline{\Gamma}_{n-1} \subset \overline{\Gamma}$. Обозначим группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-1}$, через $\overline{G}_{n-1}$. Пусть n-ый сомножитель, подгруппа G_{xy}, соответствует конечной вершине дерева-графа $\overline{\Gamma}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-1}$ ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа $< a_x >$. Таким образом, группа G представлена как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-1}$ и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе $< a_x >$, то есть $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_x>} G_{xy}$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой. Тогда $H = gp(M_0, S)$, S — древесное произведение подгрупп $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, как в лемме 1, где (M_0) принадлежит свободной части подгруппы H. Отделим ее и рассмотрим подгруппы $(M_i'), i = \overline{1, k'}$. Они имеют вид $(M_i') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}, i = \overline{1, k'}$, где выполняется одно из условий:

3.1. C_i — подгруппы из G_{xy}. В данном случае воспользуемся пунктом 1 и присоединим свободную часть $r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} (M_{0i}') r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}$ к (M_0').

3.2. C_i — подгруппы из $\overline{G}_{n-1}$. Рассмотрим конечно порожденную группу Артина с древесной структурой $\overline{G}_{n-1}$, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам:

$$\overline{G}_{n-1} = \langle \prod_{s=1}^{n-1} *G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, n-1}\rangle$$

.

В этом случае группе Артина $\overline{G}_{n-1}$ соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}_{n-1}$ так, что, вершинам графа $\overline{\Gamma}_{n-1}$ соответствуют группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическая подгруппа $\langle a_j \rangle$.

Рассмотрим древесное произведение $n-2$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-2}, \overline{\Gamma}_{n-2} \subset \overline{\Gamma}_{n-1}$. Группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-2}$ обозначим через $\overline{G}_{n-2}$. Пусть $(n-1)$-ый сомножитель, подгруппа G_{vz}, соответствует конечной вершине дерева - графа $\overline{\Gamma}_{n-1}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-2}$ ребром e_p. При этом ребру e_p соответствует циклическая подгруппа $\langle a_v \rangle$. Таким образом, группа $\overline{G}_{n-1}$ представлена как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-2}$ и G_{vz}, объединенных по циклической подгруппе $\langle a_v \rangle$, то есть $\overline{G}_{n-1} = \overline{G}_{n-2} *_{\langle a_v \rangle} G_{vz}$.

Для группы $\overline{G}_{n-1}$ справедливы теоремы 1–4 и леммы 1–7.

К подгруппам $C_i, i = \overline{1, k'}$, применим выше изложенные рассуждения и присоединим к M'_0 свободные части, сопряженные (M'_{0i}), то есть $(M''_{0i}) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} (M'_{0i}) r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}$. По лемме 7 имеем $(M'_0) * (M''_{01}) * \ldots * (M''_{0k'})$.

Далее $(M'_{li}) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} C_{li} r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}$, где C_{li} — подгруппы из G_{vz}, либо C_{li} — подгруппы из $\overline{G}_{n-2}$. Теперь рассуждения аналогичны 3.1, 3.2. Либо на данном шаге происходит остановка, либо мы переходим к группе $\overline{G}_{n-3}$, и так далее. Через конечное число таких шагов получим подгруппы, являющиеся подгруппами из свободного произведения двух сомножителей вида $\widetilde{G}$, для которых в пункте 2 доказано, что можно эффективно выделить свободную часть.

На последнем шаге свободная часть есть свободное произведение $(\tilde{M}_0)$ из (15). $(\tilde{M}_0)$ как свободный множитель присоединим к свободному произведению свободной части предпоследнего шага. Таким образом, свободная часть подгруппы H представляет собой свободное произведение свободных частей каждого шага.

5. Заключение

В настоящей работе доказана теорема о подгруппах для групп Артина с древесной структурой: если H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i \rangle, i = \overline{1, n}$, есть единичная подгруппа, то существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.

В процессе доказательства использовались приведение множества образующих к специальному множеству, представление подгруппы в виде свободного произведения групп, задание группы с помощью графа.

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Безверхнего за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 67-82.

2. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

3. Курош А. Г. Теория групп. М.: Физматлит, 2011.

4. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

5. Романовский Н. С. Свободные подгруппы в конечно определенных группах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, №1. С. 88-97.

6. Адян С. И., Дурнев В. Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // УМН. 2000.Т. 55, № 2. С. 3-94.

7. Губа В. С. Об условиях, при которых 2-порожденные подгруппы в группах с малым сокращением свободны // Известия вузов. Сер. Математика. 1986. №7. С. 12-19.

8. Аржанцева Г. Н., Ольшанский А. Ю. Общность класса групп, в которых подгруппы с меньшим числом порождающих свободны // Математические заметки. 1996. Т. 59, №4. С. 489-496.

9. Аржанцева Г. Н. О группах, в которых подгруппы с заданным числом порождающих свободны // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. №3. С. 675-683.

10. Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // Proc. London Math. Soc. 2004. T. 88, №1. С. 89-113.

11. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Т. 1, №1. С. 5-13.

12. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, №1. С. 199-222.

13. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, №1. С. 32-42.

14. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сибирский математический журнал. 1995. Т. 26, №5. С. 27-42.

15. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974. Т. 1. С. 16-31.

16. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 102-116.

17. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 20-61.

18. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. 1972. С. 3-86.

19. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1986. С. 3-21.

REFERENCES

1. Bezverkhnii, V. N.. Karpova, O. Yu. 2006, "Problems of words and conjugacy of words in Artin groups with a tree structure", *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 12, no. 1, pp. 67-82.
2. Lindon, P. & Shupp, P. 1980, "Combinatory theory of groups", Mir, Moscow.
3. Kurosh, A. G. 2021, " Group theory", Fizmatlit, Moscow.
4. Magnus, W., Karras, A. & Solitar, D. 1974, "Combinatorial group theory", Nauka, Moscow.
5. Romanovskii, N. S. 1977, " Free subgroups of finitely-presented groups", *Algebra and Logic*, vol. 16, no. 1, pp. 88-97.
6. Adyan, S. I. & Durnev, V. G. 2000, "Algoritmicheskie problemy dlya grupp i polugrupp", *UMN*, vol. 55, no. 2, pp. 3-94.
7. Guba, V. S. 1986, "Conditions under which 2-generated subgroups in small cancellation groups are free", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol. 7, pp. 12-19.
8. Arzhantseva, G. N. & Ol'shanskii, A. Yu. 1996, "The class of groups all of whose subgroups with lesser number of generators are free is generic", *Mat. Zametki*, vol. 59, no. 4, pp. 489-496.
9. Arzhantseva, G. N. 1997, "On the groups in which the subgroups with fixed number of generators are free", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 3, no. 3, pp. 675-683.
10. Kapovich, I. & Schup, P. 2004, "Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 88, no. 1, pp. 89-113.
11. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2014, " On the problem of freedom in Coxeter groups with a tree structure", *Izvestia of Tula state University. Estestven nauki*, vol. 1, no. 1, pp. 5-13.
12. Bezverkhnii, V. N. 1998, "On the intersection subgroups HNN-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 199-222.
13. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2014, "On free subgroups in Artin group with tree structure", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, no. 1, pp. 32-42.
14. Bezverkhnii, V. N. 1995, "Unsolvability of the problem of occurrence in Artin groups of finite type", *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 26, no. 5, pp. 27-42.
15. Bezverkhnii, V. N. & Rollov E. V., 1974, "On subgroups of free products of groups", *Sovremen. algebra*, vol. 1, pp. 16-31.
16. Bezverkhnyaya, I. S. 1981, "On the conjugacy of finite sets of subgroups in the free product of groups", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 102-116.
17. Bezverkhnii, V. N. 1981, "Solving the problem of occurrence in the class of HNN-groups", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 20-61.
18. Bezverkhnii, V. N. 1972, "Solution to the problem of occurrence for a class of groups", *Questions of the theory of groups and semigroups*, pp. 3-86.
19. Bezverkhnii, V. N. 1986, "Solution of the occurrence problem in some classes of groups with one defining relation", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 3-21.

Получено 26.12.2021
Принято в печать 14.09.2022