

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-102-117

Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел¹Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов,
И. Ю. Реброва**Добровольский Михаил Николаевич** — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).*e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru***Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Добровольский Николай Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Кожухов Игорь Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, НИУ «Московский институт электронной техники» (г. Москва).*e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru***Реброва Ирина Юрьевна** — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).*e-mail: i_rebrova@mail.ru*

Аннотация

В работе изучаются алгебраические структуры, возникающие относительно операции умножения двух множеств натуральных чисел. Основными объектами изучения выступают моноид MN моноидов натуральных чисел и моноид SN произведений произвольных подмножеств натурального ряда. Также моноидом будет $SN^* = SN \setminus \{\emptyset\}$.

Важным свойством этих моноидов является тот факт, что множество всех идемпотентов в моноиде SN , кроме нулевого элемента, совпадает с множеством идемпотентов моноида SN^* и образует моноид MN .

Наличие такого факта позволило рассмотреть порядок. Относительно порядка $A \leq B$ и бинарных операций $\inf$, $\sup$ моноид MN является не модулярной, полной A -решёткой.

В работе различаются понятия A -решётки как объекта общей алгебры и T -решётки как объекта теории чисел и геометрии чисел.

В работе определена структура полного метрического пространства с неархимедовой метрикой на моноиде SN . Это позволило доказать теорему о сходимости последовательности рядов Дирихле по сходящимся последовательностям натуральных чисел.

Если рассмотреть произведение двух дзета-функций моноидов натуральных чисел, то оно будет дзета-функцией моноида натуральных чисел только тогда, когда эти моноиды взаимно просты. В общем случае их произведение будет рядом Дирихле с натуральными коэффициентами по моноиду, равному произведению моноидов сомножителей. Этот моноид, порожденный дзета-функциями моноидов натуральных чисел, обозначается через MID . Показано что моноиды MN и MID неизоморфны.

В работе определены две малые категории MN и SN и изучены некоторые их свойства.

¹Работа подготовлена по грантам РФФ № 22-21-00544 и № 22-11-00052.

Ключевые слова: моноид натуральных чисел, решётка моноидов натуральных чисел, метрическое пространство подмножеств натурального ряда, дзета-функция моноида, ряд Дирихле, малая категория моноидов натуральных чисел.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-102-117

Monoid of products of zeta functions of monoids of natural numbers²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Kozhukhov, I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Kozhukhov Igor Borisovich — professor, doctor of physical and mathematical sciences, NRU «Moscow Institute of Electronic Technology» (Moscow).

e-mail: kozhukhov_i_b@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The paper studies algebraic structures arising with respect to the multiplication operation of two sets of natural numbers. The main objects of study are the monoid $\mathbb{MN}$ of monoids of natural numbers and the monoid $\mathbb{SN}$ of products of arbitrary subsets of a natural series. Also, the monoid will be $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus \{\emptyset\}$.

An important property of these monoids is the fact that the set of all idempotents in the monoid $\mathbb{SN}$ except for the zero element coincides with the set of idempotents of the monoid $\mathbb{SN}^*$ forms the monoid $\mathbb{MN}$.

The presence of such a fact allowed us to consider the order. With respect to the order of $A \leq B$ and binary operations $\inf$, $\sup$ the monoid $\mathbb{MN}$ is an irregular, complete A-lattice.

The paper distinguishes the concepts of A-lattice as an object of general algebra and T-lattice as an object of number theory and geometry of numbers.

²The work was prepared under RSF grants No. 22-21-00544 and No. 22-11-00052.

The paper defines the structure of a complete metric space with a non-Archimedean metric on the monoid $\mathbb{SN}$. This made it possible to prove a theorem on the convergence of a sequence of Dirichlet series over convergent sequences of natural numbers.

If we consider the product of two zeta functions of monoids of natural numbers, then it will be a zeta function of a monoid of natural numbers only when these monoids are mutually simple. In general, their product will be a Dirichlet series with natural coefficients over a monoid equal to the product of the monoids of the cofactors. This monoid generated by the zeta functions of the monoids of natural numbers is denoted by $\mathbb{MID}$. It is shown that the monoids $\mathbb{MN}$ and $\mathbb{MID}$ are non-isomorphic.

The paper defines two small categories $\mathcal{MN}$ and $\mathcal{SN}$ and studies some of their properties.

Keywords: a monoid of natural numbers, a lattice by a monoid of natural numbers, a metric space of subsets of a natural series, a zeta function of a monoid, a Dirichlet series, a small category of monoids of natural numbers.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Koguhov, I. Yu. Rebrova, 2022, "Monoid of products of zeta functions of monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 102–117.

1. Введение

В работах [3] – [14] был заложен фундамент теории дзета-функции моноидов натуральных чисел. Нетрудно понять, что множество всех моноидов натуральных чисел образует мультипликативный моноид, мощность которого континуум. Этот мультипликативный моноид будем обозначать через $\mathbb{MN}$.

Очевидно, что этот моноид является подмоноидом моноида $\mathbb{SN}$ — моноида произведений произвольных подмножеств натурального ряда.

Одним из наиболее важных примеров моноидов натуральных чисел является моноид значений норм точек решётки, повторяющейся умножением. Как следует из монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева [2], наиболее интересный пример получается при рассмотрении решётки, для которой координаты точек являются наборами сопряжённых целых алгебраических чисел чистовещественного алгебраического поля степени размерности решётки.

Так как термин решётка в нашей работе встречается в двух смыслах, то мы будем различать А-решётки как объекты общей алгебры и Т-решётки как объекты теории чисел и геометрии чисел. Таким образом, все решётки из предыдущего абзаца в данной работе будут называться Т-решётками, а решётки моноидов натуральных чисел будут называться А-решётками.

Будем говорить, что два множества натуральных чисел A и B взаимно просты, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $(a, b) = 1$. В этом случае будем писать $(A, B) = 1$. Ясно, что если $(A, B) = 1$, то либо $A \cap B = \emptyset$, либо $A \cap B = \{1\}$. Если A и B взаимно простые моноиды, то $A \cap B = \{1\}$.

Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_A). \quad (1)$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α -плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leq \sigma_A \leq 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [16],

[17]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Если рассмотреть произведение двух дзета-функций моноидов натуральных чисел, то оно будет дзета-функцией моноида натуральных чисел только тогда, когда эти моноиды взаимно просты. В общем случае их произведение будет рядом Дирихле с натуральными коэффициентами по моноиду, равному произведению моноидов сомножителей. Будем этот моноид, порожденный дзета-функциями моноидов натуральных чисел, обозначать через $\mathbb{MD}$.

Как будет показано ниже, моноиды $\mathbb{MN}$ и $\mathbb{MD}$ неизоморфны.

Аналогично, произведение двух дзета-функций двух множеств натуральных чисел будет дзета-функцией множества натуральных чисел только тогда, когда эти множества взаимно просты. В общем случае их произведение будет рядом Дирихле с натуральными коэффициентами по множеству натуральных чисел, равному произведению множеств сомножителей. Будем этот моноид, порожденный дзета-функциями множеств натуральных чисел, обозначать через $\mathbb{SD}$.

Цель настоящей работы — заложить основы теории моноидов $\mathbb{MN}$, $\mathbb{SN}$, $\mathbb{MD}$ и $\mathbb{SD}$ и рассмотреть категории, соответствующие этим моноидам.

2. Основные свойства моноида моноидов натуральных чисел

Как известно, подмножество M натурального ряда $\mathbb{N}$ является мультипликативным моноидом, если $1 \in M$ и множество M замкнуто относительно операции обычного умножения: $a \cdot b \in M$ для любых $a, b \in M$.

Все моноиды M натурального ряда являются бесконечными счётными множествами, кроме одного $I = \{1\}$.

Множество $\mathbb{MN}$ всех моноидов натуральных чисел, очевидно, является подмножеством множества $\mathbb{SN}$ всех подмножеств натурального ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любых двух подмножеств A и B натурального ряда их произведением называется множество C , заданное равенством $C = A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$.

Ясно, что и множество $\mathbb{MN}$ и множество $\mathbb{SN}$ относительно операции умножения множеств являются коммутативными, мультипликативными моноидами, в которых общий единичный элемент I .

Оба эти моноида имеют нулевой элемент, то есть такой элемент $\mathbb{O}$, что для любого A имеем $A \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$. Но в этих моноидах нулевые элементы различные. Для моноида $\mathbb{MN}$ нулевой элемент $\mathbb{O} = \mathbb{N}$, а для моноида $\mathbb{SN}$ нулевой элемент $\mathbb{O} = \emptyset$. Заметим, что для подмоноида $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus \{\emptyset\}$ нулевой элемент отсутствует, так как если множество A не содержит 1, то $A \cdot \mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два подмножества A и B натурального ряда отличные от нулевого элемента называются делителями нуля, если их произведение $A \cdot B = \mathbb{O}$.

ТЕОРЕМА 1. В моноиде $\mathbb{SN}$ нет делителей нуля.

В моноиде $\mathbb{MN}$ делителями нуля являются только те моноиды, которые содержат хотя бы одно простое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы очевидно, так как произведение двух непустых множеств снова непусто.

Пусть моноид A не содержит ни одного простого числа, тогда $A \cdot B = \mathbb{N}$, если моноид B содержит все простые числа. А значит, $B = \mathbb{N}$.

Если $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $A \neq \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{P} = P_1 \neq \emptyset$, то минимальный моноид B , порожденный множеством простых $P_2 = \mathbb{P} \setminus P_1$, будет удовлетворять равенству $A \cdot B = \mathbb{N}$, и моноиды A и B являются делителями нуля. $\square$

Опишем все идемпотенты моноида $\mathbb{SN}$.

ЛЕММА 1. *Если для непустого множества A выполнено равенство $A \cdot A = A$, то A является моноидом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть m наименьший элемент в множестве A , тогда m^2 будет наименьшим элементом в $A \cdot A$. Поэтому, если A идемпотент, то $m = m^2$. Следовательно $m = 1$ и $A \subseteq A \cdot A$. Но $A \cdot A = A$, следовательно A замкнуто относительно умножения, а это означает что A является моноидом. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Множество всех идемпотентов в моноиде $\mathbb{SN}$ кроме нулевого элемента совпадает с множеством идемпотентов моноида $\mathbb{SN}^*$ и образует моноид $\mathbb{MN}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы сразу следует из предыдущей леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Для произвольного непустого множества A назовём его сопряженным множеством A^* максимальное множество натуральных чисел b таких, что $b \cdot A \subseteq A$.*

Из определения непосредственно следует, что для любого множества A его сопряженное множество A^* является моноидом. Отсюда следует, что $A \cdot A^* = A$.

3. А-решётка моноидов натуральных чисел

Из результатов предыдущего раздела вытекает, что моноид $\mathbb{MN}$ — коммутативная полугруппа идемпотентов. Как известно, для множества идемпотентов полугруппы или ассоциативного кольца определяется естественный порядок: $e \leq f \iff ef = fe = e$.

В случае моноида $\mathbb{MN}$ — моноида моноидов натуральных чисел имеем: $A \leq B \iff A \supseteq B$. Определим на $\mathbb{MN}$ две бинарные операции

$$A \wedge B = \inf\{A, B\} = A \cdot B, \quad A \vee B = \sup\{A, B\} = A \cap B.$$

Нетрудно видеть, что так как A и B — моноиды, то $A \cdot B \supseteq A \cup B$.

ТЕОРЕМА 3. *Относительно порядка $A \leq B$ и бинарных операций $\inf, \sup$ моноид $\mathbb{MN}$ является не модулярной, полной А-решёткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что так как $1 \in A \cap B$, то $A \cdot B \supseteq A \cup B$ и, следовательно, $\inf\{A, B\} = A \cdot B \leq A, B$. Аналогично, имеем $\sup\{A, B\} = A \cap B \subseteq A, B$ и, следовательно, $\sup\{A, B\} \geq A, B$. Очевидно, что $\inf\{A, A\} = A \cdot A = A$, $\sup\{A, A\} = A \cap A = A$. Таким образом, каждый моноид $A \in \mathbb{MN}$ является идемпотентом относительно каждой из бинарных операций $\inf, \sup$. Следовательно, моноид $\mathbb{MN}$ — А-решётка.

$$\sup\{A_i | i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i, \quad \inf\{A_i | i \in I\} = \{a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k} | k \geq 0, a_{i_j} \in A_{i_j} (j = 1, \dots, k)\}.$$

Таким образом, моноид $\mathbb{MN}$ является полной А-решёткой.

Покажем теперь, что решётка не модулярна. Будем пользоваться следующим определением модулярной решётки (см. [1], гл. 2, §1, теорема 2):

решётка L модулярна, если

$$\forall x, y, z \in L \quad x \leq y, x \wedge z = y \wedge z, x \vee z = y \vee z \rightarrow x = y. \quad (2)$$

Пусть p и q — два различных простых числа. Зададим моноиды X , Y и Z равенствами:

$$X = \{p^i q^j | i \geq j \geq 0\}, \quad Y = \{p^i | i \geq 0\}, \quad Z = \{q^i | i \geq 0\}.$$

Нетрудно видеть, что $X \leq Y$,

$$X \wedge Z = X \cdot Z = \{p^i q^j | i, j \geq 0\} = Y \wedge Z, \quad X \vee Z = X \cap Z = \{1\} = Y \vee Z,$$

но $X \neq Y$, и, значит, (2) не выполняется и A -решётка $\mathbb{MN}$ не является модулярной решёткой.

Тот факт, что A -решётка $\mathbb{MN}$ не модулярна, влечёт, что эта решётка не дистрибутивна. $\square$

Пусть P — произвольное подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$ и $M(P)$ — минимальный моноид, порожденный множеством простых чисел P . При этом считаем, что $M(\emptyset) = \{1\}$. Нетрудно видеть, что $M(P)$ состоит в точности из таких натуральных чисел, разложение на простые множители которых содержит лишь числа из P . Очевидно, что $M(P)$ — моноид с однозначным разложением на простые множители. Обозначим через $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ множество всех таких моноидов. Ясно, что $P \subseteq P' \Leftrightarrow M(P) \subseteq M(P')$.

ЛЕММА 2. Для произвольных моноидов $M(P_1)$ и $M(P_2)$ из $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ справедливо равенство

$$M(P_1) \cdot M(P_2) = M(P_1 \setminus P_2) \cdot M(P_2 \setminus P_1) \cdot M(P_1 \cap P_2) = M(P_3), \quad P_3 = P_1 \cup P_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три множества простых чисел $P_4 = P_1 \setminus P_2$, $P_5 = P_2 \setminus P_1$, $P_6 = P_1 \cap P_2$. Очевидно, что они попарно не пересекаются: $P_\nu \cap P_\mu = \emptyset$ ($4 \leq \nu < \mu \leq 6$). Так как $P_1 = P_4 \cup P_6$, $P_2 = P_5 \cup P_6$, $P_3 = P_4 \cup P_5 \cup P_6$, то $M(P_1) = M(P_4) \cdot M(P_6)$, $M(P_2) = M(P_5) \cdot M(P_6)$, $M(P_1) \cdot M(P_2) = M(P_4) \cdot M(P_5) \cdot M(P_6) = M(P_3)$. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Относительно порядка $A \leq B$ и бинарных операций $\inf$, $\sup$ моноид $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ является дистрибутивной, модулярной, полной A -решёткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\inf\{M(P_1), M(P_2)\} = M(P_1) \cdot M(P_2) = M(P_1 \cup P_2) \in \mathbb{MN}(\mathbb{P})$, $\sup\{M(P_1), M(P_2)\} = M(P_1) \cap M(P_2) = M(P_1 \cap P_2) \in \mathbb{MN}(\mathbb{P})$, то $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ замкнуто относительно операций $\inf$ и $\sup$. Следовательно, $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ — подрешётка решётки $\mathbb{MN}$.

Заметим, что

$$\sup\{M(P_i) | i \in I\} = M\left(\bigcap_{i \in I} P_i\right), \quad \inf\{M(P_i) | i \in I\} = M\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right).$$

Таким образом, моноид $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ является полной A -решёткой.

Далее имеем:

$$M(P_1) \cdot M(P) \cap M(P_2) \cdot M(P) = M(P_1 \cup P) \cap M(P_2 \cup P) = M((P_1 \cup P) \cap (P_2 \cup P)).$$

Так как $(P_1 \cup P) \cap (P_2 \cup P) = (P_1 \cap P_2) \cup P$, то

$$\begin{aligned} M((P_1 \cup P) \cap (P_2 \cup P)) &= M((P_1 \cap P_2) \cup P) = M((P_1 \cap P_2)) \cdot M(P) = \\ &= (M(P_1) \cap M(P_2)) \cdot M(P). \end{aligned}$$

Таким образом, $M(P_1) \cdot M(P) \cap M(P_2) \cdot M(P) = (M(P_1) \cap M(P_2)) \cdot M(P)$, и, следовательно, $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ — дистрибутивная решётка. Так как любая дистрибутивная решётка является модулярной, то теорема полностью доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассмотрим отображение $P \mapsto M(P)$, $2^{\mathbb{P}} \rightarrow \text{MN}(\mathbb{P})$. Из предыдущего следует, что это отображение является изоморфизмом решётки $2^{\mathbb{P}}$ всех подмножеств множества $\mathbb{P}$ и решётки $\text{MN}(\mathbb{P})$. Отсюда получаем другое доказательство теоремы 4 и она становится очевидной.

4. Метрическое пространство подмножеств натурального ряда

Рассмотрим два различных множества A и B натуральных чисел, тогда их симметрическая разность $A \Delta B \neq \emptyset$ и существует наименьшее натуральное число $m(A, B)$ в этой симметрической разности.

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$[1, m(A, B) - 1] \cap A = [1, m(A, B) - 1] \cap B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m(A, B) = 1$, то отрезок $[1, 0]$ — пустой и утверждение леммы выполнено.

Пусть теперь $m(A, B) > 1$, тогда возможны два случая.

Либо $[1, m(A, B) - 1] \cap A = \emptyset$, но тогда и $[1, m(A, B) - 1] \cap B = \emptyset$, так как в противном случае найдётся натуральное n такое, что $n < m(A, B)$ и $n \in A \Delta B$.

Либо $[1, m(A, B) - 1] \cap A \neq \emptyset$, но тогда и $[1, m(A, B) - 1] \cap B = [1, m(A, B) - 1] \cap A$, так как $[1, m(A, B) - 1] \cap A \Delta B = \emptyset$ и каждое натуральное числа из $[1, m(A, B) - 1]$ либо принадлежит пересечению $A \cap B$, либо не принадлежит их объединению $A \cup B$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Расстояние $\rho(A, B)$ между двумя подмножествами A и B натурального ряда задается равенством

$$\rho(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B, \\ \frac{1}{m(A, B)}, & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5. Функция $\rho(A, B)$ задает неархимедову метрику на пространстве $\mathbb{SN}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что для любых трёх подмножеств A, B, C натурального ряда справедливо неравенство

$$\rho(A, B) \leq \max(\rho(A, C), \rho(C, B)).$$

Пусть $m_1 = m(A, B)$, $m_2 = m(A, C)$, $m_3 = m(C, B)$ и предположим противное, что $m_1 < \min(m_2, m_3)$.

Тогда в силу леммы 3 получим $[1, m_1] \cap A = [1, m_1] \cap C$, $[1, m_1] \cap B = [1, m_1] \cap C$. Следовательно, $m_1 \in A, B, C$, что противоречит определению величины m_1 . $\square$

ТЕОРЕМА 6. Относительно метрики $\rho(A, B)$ пространство $\mathbb{SN}$ полное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы необходимо показать, что для любой последовательности Коши $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ подмножеств натурального ряда существует подмножество A такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A) = 0.$$

По определению фундаментальной последовательности (последовательности Коши) для любого натурального n найдется номер $N = N(n)$ такой, что для любых множеств A_m и A_k с $m, k \geq N(n)$ выполняется неравенство $\rho(A_m, A_k) < \frac{1}{n}$. Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$[1, n] \cap A_k = [1, n] \cap A_{N(n)}, \quad k \geq N(n).$$

Положим $B_n = [1, n] \cap A_{N(n)}$. Ясно, что мы получаем бесконечную последовательность вложенных подмножеств натурального ряда:

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_n \subseteq \dots$$

Возможны два случая. Либо $B_n = \emptyset$ для любого натурального n , либо $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$. В первом случае имеем $A = \emptyset$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, \emptyset) = 0.$$

Во втором случае последовательность Коши сходится к множеству $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. $\square$

ТЕОРЕМА 7. *Для любого натурального $a > 1$ растяжение моноида $\mathbb{SN}$ в a раз, заданное равенством*

$$a \cdot \mathbb{SN} = \{a \cdot B \mid B \in \mathbb{SN}\},$$

является сжатием метрического пространства $\mathbb{SN}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любых подмножеств $B, C \subseteq \mathbb{N}$ имеем, если $a \cdot b = a \cdot c$ и $b \in B$, $c \in C$, то в силу однозначности разложения на простые множители имеем: $b = c \in B \cap C$. Отсюда следует, что $a \cdot (B \triangle C) = (a \cdot B) \triangle (a \cdot C)$. Это влечёт равенства $m(a \cdot B, a \cdot C) = a \cdot m(B, C)$ и $\rho(a \cdot B, a \cdot C) = \frac{\rho(B, C)}{a}$. $\square$

Для любого непустого множества A натуральных чисел через $m(A)$ обозначим его наименьшее число.

ЛЕММА 4. *Для любых трёх непустых множеств натуральных чисел A, B, C справедливо неравенство $m(A \cdot C, B \cdot C) \geq m(C) \cdot m(A, B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что $m(A \cdot C, B \cdot C) < m(C) \cdot m(A, B)$. Тогда наименьший элемент $m(A \cdot C, B \cdot C) = n \cdot c$, где $c \in C$ и $c \geq m(C)$, а $n \in A \triangle B$ и $n < m(A, B)$. Но это противоречит определению величины $m(A, B)$. $\square$

ТЕОРЕМА 8. *Для любого непустого множества C натуральных чисел отображение метрического пространства $\mathbb{SN}$ в себя, заданное равенством $\beta_C : \mathbb{SN} \rightarrow C \cdot \mathbb{SN}$ является коротким отображением метрического пространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно леммы 4 справедливо неравенство

$$\rho(A \cdot C, B \cdot C) \leq \frac{\rho(A, B)}{m(C)} \leq \rho(A, B).$$

$\square$

Рассмотрим произвольную функцию $f(n)$, заданную на натуральном ряде $\mathbb{N}$, и ряд Дирихле $\zeta(f|\alpha)$, заданный равенством

$$\zeta(f|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\alpha}}, \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f),$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Заметим, что не для любой функции $f(n)$ соответствующий ряд Дирихле сходится. Например, если $f(n) = n!$, то область абсолютной сходимости будет пустой, так как эта функция растёт быстрее любой степени n .*

Очевидно, что для любого множества A натуральных чисел существует ряд Дирихле $\zeta(A, f|\alpha)$, заданный равенством

$$\zeta(A, f|\alpha) = \sum_{n \in A} \frac{f(n)}{n^\alpha}, \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_{A,f}),$$

где $\sigma_{A,f}$ — абсцисса абсолютной сходимости и $\sigma_{A,f} \leq \sigma_f$.

ТЕОРЕМА 9. *Если справедливо равенство для множеств натуральных чисел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A) = 0,$$

то для последовательности рядов Дирихле имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta(A_n, f|\alpha) - \zeta(A, f|\alpha)| = 0$$

в некоторой полуплоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, справедливо равенство

$$\zeta(A_n, f|\alpha) - \zeta(A, f|\alpha) = \zeta(A_n \setminus A, f|\alpha) - \zeta(A \setminus A_n, f|\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$|\zeta(A_n, f|\alpha) - \zeta(A, f|\alpha)| \leq \sum_{n \in A_n \triangle A} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=m(A_n, A)}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma}.$$

Так как при $\sigma > \sigma_f$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} = 0,$$

то утверждение теоремы справедливо в полуплоскости $\sigma > \sigma_f$. $\square$

5. Основные свойства моноида произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел

Каждому моноиду M натуральных чисел поставим в соответствие дзета-функцию $\zeta(M|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M), \quad (3)$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда. Если M отлично от единственного конечного моноида $M_0 = \{1\}$, то $0 \leq \sigma_M \leq 1$.

Только для M_0 справедливо тождество $\zeta(M_0|\alpha) \equiv 1$. Отсюда следует, что для любого моноида $M \neq M_0$ справедливо неравенство $\zeta(M|\alpha) \cdot \zeta(M|\alpha) \neq \zeta(M|\alpha)$. Таким образом, дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ не является идемпотентом относительно умножения, и, следовательно, моноиды $\mathbb{MN}$ и $\mathbb{MD}$ неизоморфны.

Остановимся более подробно на структуре моноида $\mathbb{MD}$ — моноида произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Обозначим через $\tau_{M_1, M_2}(n)$ количество решений уравнения $x \cdot y = n$ в натуральных числах $x \in M_1$, $y \in M_2$ для натурального числа $n \in M_1 \cdot M_2$. Ясно, что

$$\tau_{M_1, M_2}(n) = \sum_{m \in M_1, m|n, \frac{n}{m} \in M_2} 1 = \sum_{m \in M_2, m|n, \frac{n}{m} \in M_1} 1.$$

Пусть задана целочисленная функция $f_M(n)$, заданная на моноиде M . Через $\zeta(M, f_M|\alpha)$ будем обозначать ряд Дирихле

$$\zeta(M, f_M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{f_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_{M, f_M}),$$

где σ_{M, f_M} — абсцисса абсолютной сходимости.

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство*

$$\zeta(M_1|\alpha) \cdot \zeta(M_2|\alpha) = \zeta(M_1 \cdot M_2, \tau_{M_1, M_2}|\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \zeta(M_1|\alpha) \cdot \zeta(M_2|\alpha) &= \left(\sum_{n \in M_1} \frac{1}{n^\alpha} \right) \left(\sum_{m \in M_2} \frac{1}{m^\alpha} \right) = \sum_{n \in M_1 \cdot M_2} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m \in M_1, m|n, \frac{n}{m} \in M_2} 1 = \\ &= \sum_{n \in M_1 \cdot M_2} \frac{\tau_{M_1, M_2}(n)}{n^\alpha} = \zeta(M_1 \cdot M_2, \tau_{M_1, M_2}|\alpha). \end{aligned}$$

□

В работе [13] изучались алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел. Здесь мы пойдём другим путём, следуя подходу, описанному в монографиях [15], [18].

Рассмотрим кольцо Дирихле $\mathbb{RD}$ всех арифметических функций $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ с операциями поточечного сложения $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ и операцией свёртка Дирихле:

$$(f * g)(n) = \sum_{m|n} f(m)g\left(\frac{n}{m}\right).$$

Прежде всего, заметим, что любую арифметическую функцию $f_M(n) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$ на моноиде натуральных чисел M тривиальным образом можно продолжить до арифметической функции по формуле

$$f(n) = \begin{cases} f_M(n) & \text{при } n \in M, \\ 0 & \text{при } n \in \mathbb{N} \setminus M. \end{cases}$$

Обозначим через $f_{M_1, M_2}(n)$ свертку Дирихле двух функций $f_{M_1}(n)$ и $f_{M_2}(n)$:

$$f_{M_1, M_2}(n) = (f_{M_1} * f_{M_2})(n) = \sum_{m|n} f_{M_1}(m)f_{M_2}\left(\frac{n}{m}\right).$$

ЛЕММА 6. *Справедливо равенство $f_{M_1, M_2}(n) = f_{M_1 \cdot M_2}(n)$, где*

$$f_{M_1 \cdot M_2}(n) = \sum_{m \in M_1, k \in M_2, m \cdot k = n} f_{M_1}(m)f_{M_2}(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $m|n$ и $m \notin M_1$ или $k = \frac{n}{m} \notin M_2$, то $f_{M_1}(m)f_{M_2}(k) = 0$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Из предыдущего следует, что для любого моноида M натуральных чисел можно рассмотреть подкольцо Дирихле $\mathbb{RD}(M)$, состоящее из всех арифметических функций на моноиде M : $f_M(n) : M \rightarrow \mathbb{C}$.

Нетрудно видеть, что кольцо $\mathbb{RD}(M)$ является коммутативным кольцом с единицей: $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon(n) = 0$ при $n > 1$. Отметим, что единица кольца не зависит от моноида M .

Каждой арифметической функции $f_M(n)$ из кольца $\mathbb{RD}(M)$ можно поставить в соответствии формальный ряд Дирихле $\zeta(M, f_M|\alpha)$.

ТЕОРЕМА 10. Если формальные ряды Дирихле для $\alpha = \sigma + it$

$$\zeta(M, f_M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{f_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\sigma > \sigma_{M, f_M}), \quad \zeta(M, g_M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{g_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\sigma > \sigma_{M, g_M})$$

имеют не пустые области абсолютной сходимости, то и их произведение имеет непустую область абсолютной сходимости

$$\zeta(M, f_M|\alpha) \cdot \zeta(M, g_M|\alpha) = \zeta(M, f_M * g_M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{f_M * g_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\sigma > \max(\sigma_{M, f_M}, \sigma_{M, g_M})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу абсолютной сходимости имеем:

$$\zeta(M, f_M|\alpha) \cdot \zeta(M, g_M|\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n, m \in M} \frac{f_M(n) \cdot g_M(m)}{(n \cdot m)^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \in M} \frac{f_M * g_M(n)}{n^\alpha} + R(M, N|\alpha) \right),$$

где

$$R(M, N|\alpha) = \sum_{k \in M, k > N} \frac{1}{k^\alpha} \sum_{n, m \in M, k = n \cdot m} f_M(n) \cdot g_M(m).$$

Пусть

$$R_1(M, N|\sigma) = \sum_{n \in M, n > N} \frac{|f_M(n)|}{n^\sigma}, \quad R_2(M, N|\sigma) = \sum_{n \in M, n > N} \frac{|g_M(n)|}{n^\sigma},$$

тогда

$$|R(M, N|\alpha)| \leq \zeta(M, |f_M||\sigma) R_2(M, N|\sigma) + \zeta(M, |g_M||\sigma) R_1(M, N|\sigma).$$

Так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_1(M, N|\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} R_2(M, N|\sigma) = 0$$

при $\sigma > \max(\sigma_{M, f_M}, \sigma_{M, g_M})$, то утверждение теоремы доказано. $\square$

Тем самым определено кольцо $\mathbb{RD}^*(M)$ рядов Дирихле на моноиде M , состоящее из рядов Дирихле с непустой областью абсолютной сходимости. При этом справедливо равенство $\zeta(M, f_M|\alpha) \cdot \zeta(M, g_M|\alpha) = \zeta(M, f_M * g_M|\alpha)$. Последнее равенство можно обобщить на произведение рядов Дирихле на разных моноидах:

$$\zeta(M_1, f_{M_1}|\alpha) \cdot \zeta(M_2, g_{M_2}|\alpha) = \zeta(M_1 \cdot M_2, f_{M_1} * g_{M_2}|\alpha).$$

Очевидно, что для этого случая справедлива обобщённая теорема 10 и

$$\sigma_{M_1 \cdot M_2, f_{M_1} * g_{M_2}} = \max(\sigma_{M_1, f_{M_1}}, \sigma_{M_2, g_{M_2}}).$$

Рассмотрим характеристическую функцию моноида M :

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \in M, \\ 0 & \text{при } n \notin M. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\zeta(M|\alpha) = \zeta(M, \chi_M|\alpha)$. Можно рассмотреть бесконечную функциональную геометрическую прогрессию $1, \zeta(M|\alpha), \zeta^2(M|\alpha), \dots, \zeta^n(M|\alpha), \dots$, которая, очевидно, является мультипликативным моноидом $D_0(M)$. Из теоремы 10 следует, что все члены этой последовательности, начиная со второго, имеют одну и ту же область абсолютной сходимости $\sigma > \sigma_M$.

Рекуррентно определим степенную свертку Дирихле:

$$f^* = f * f, \quad f^{*2} = f^* * f, \dots, f^{*(n+1)} = f^{*n} * f, \dots$$

Из предыдущего следует, что $\zeta^n(M|\alpha) = \zeta(M, \chi_M^{*n}|\alpha)$. Если через $\tau_{M,k}(n)$ обозначим количество решений уравнения $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \dots, x_k \in M$ для натурального числа $n \in M$, то $\tau_{M,k}(n) = \chi_M^{*k}(n)$.

Для описания структуры моноида $\mathbb{MD}$ введём обобщенную функцию числа делителей $T(n)$ следующим образом:

$$T \rightarrow \rightarrow (n) = (\tau_{M_1, k_1} * \dots * \tau_{M_l, k_l})(n).$$

Нетрудно видеть, что $T \rightarrow \rightarrow (n)$ равно количеству решений в натуральных числах следующего уравнения:

$$\prod_{\nu=1}^l \prod_{\mu_\nu=1}^{k_\nu} x_{\nu, \mu_\nu} = n,$$

где $x_{\nu, \mu_\nu} \in M_\nu$ ($\mu_\nu = 1, \dots, k_\nu, \nu = 1, \dots, l$) и $n \in M_1 \cdot \dots \cdot M_l$.

ТЕОРЕМА 11. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{MD} = \{1\} \bigcup \{\zeta(T \rightarrow \rightarrow (n)|\alpha)|_{M_\nu} (\mu_\nu = 1, \dots, k_\nu, \nu = 1, \dots, l)\},$$

при этом каждый ряд Дирихле из этого моноида кроме одного имеет абсциссу абсолютной сходимости не превосходящую единицы и не меньшую нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеется единственный конечный моноид $M_0 = \{1\}$ и ему соответствует единственная дзета-функция $\zeta(M_0|\alpha) \equiv 1$, которая определена на всей комплексной плоскости. Для неё абсцисса абсолютной сходимости $\sigma_{M_0} = -\infty$.

Теперь рассмотрим произвольный бесконечный моноид $M \in \mathbb{MN}$. Для дзета-функции этого моноида $\zeta(M|\alpha) = \zeta(M, \chi_M|\alpha)$ имеем $0 \leq \sigma_M \leq 1$. Поэтому и для любого ряда Дирихле из мультипликативного моноида $D_0(M)$ будет та же самая область абсолютной сходимости $\sigma > \sigma_M$.

Для моноида $D(M)$ всех рядов Дирихле, порождённых дзета-функциями моноидов натуральных чисел таких, что $M = M_1 \cdot M_2$, мы получаем очевидное равенство

$$D(M) = \bigcup_{M_1 \cdot M_2 = M} D(M_1) \cdot D(M_2).$$

При этом, аналогично предыдущему, мы имеем для всех рядов Дирихле, отличных от единицы, одну и ту же область абсолютной сходимости $\sigma > \sigma_M$.

Так как $\mathbb{DN} = \bigcup_{M \in \mathbb{MN}} D(M)$, то теорема полностью доказана. $\square$

6. Малая категория моноидов натуральных чисел

Определим две малых категории $\mathcal{MN}$ и $\mathcal{SN}$ следующим образом.

- Класс объектов является континуальным множеством: $Ob_{\mathcal{MN}} = \mathbb{MN}$, $Ob_{\mathcal{SN}} = \mathbb{SN}$.
- Для каждой пары объектов A и B из категории $\mathcal{K}$ ³ задан морфизм $\beta : A \rightarrow B$, если

³Здесь и далее либо $\mathcal{K} = \mathcal{MN}$, либо $\mathcal{K} = \mathcal{SN}$.

есть объект $C \in Ob_{\mathcal{K}}$ такой, что $A \cdot C = B$. Будем такой морфизм обозначать через $\beta_{A,C}$. Таким образом, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B) = \{\beta_{A,C} | B = A \cdot C, C \in Ob_{\mathcal{K}}\}$.

- Для каждого объекта $A \in Ob_{\mathcal{K}}$ задан тождественный морфизм

$$\mathbf{id}_A = \beta_{A,\{1\}} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, A).$$

- Для пары морфизмов $\beta_{A,D} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B)$ и $\beta_{B,G} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(B, C)$ определена композиция $\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D} = \beta_{A,D \cdot G} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, C)$.

Нетрудно проверить, что выполнены две аксиомы:

- Операция композиции ассоциативна: $\beta_{C,F} \circ (\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D}) = (\beta_{C,F} \circ \beta_{B,G}) \circ \beta_{A,D}$.
- Тождественный морфизм действует тривиально: $\beta_{A,F} \circ \mathbf{id}_A = \mathbf{id}_B \circ \beta_{A,F} = \beta_{A,F}$ для любого $\beta_{A,F} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B)$.

Действительно,

$$\beta_{C,F} \circ (\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D}) = \beta_{C,F} \circ \beta_{A,D \cdot G} = \beta_{A,F \cdot G \cdot D}, (\beta_{C,F} \circ \beta_{B,G}) \circ \beta_{A,D} = \beta_{B,F \cdot G} \circ \beta_{A,D} = \beta_{A,F \cdot G \cdot D},$$

и, следовательно, аксиома ассоциативности выполнена.

Аналогично, имеем:

$$\beta_{A,F} \circ \mathbf{id}_A = \beta_{A,F} \circ \beta_{A,\{1\}} = \beta_{A,F}, \quad \mathbf{id}_B \circ \beta_{A,F} = \beta_{B,\{1\}} \circ \beta_{A,F} = \beta_{A,F},$$

то есть тождественный морфизм действует тривиально.

Так как из $\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D} = \beta_{A,D \cdot G} = \mathbf{id}_A$ следует, что $G \cdot D = \{1\}$, что влечёт $G = D = \{1\}$. Отсюда вытекает, что все изоморфизмы в категории $\mathcal{K}$ являются тождественными морфизмами и любой объект этой категории изоморфен только самому себе.

При рассмотрении понятия эндоморфизмов случаи категорий $\mathcal{MN}$ и $\mathcal{SN}$ необходимо различать.

ЛЕММА 7. Для категории $\mathcal{MN}$ для любого моноида $M \in \mathbb{MN}$ его моноид эндоморфизмов $\mathbf{End}_{\mathcal{MN}}(M) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{MN}}(M, M)$ удовлетворяет равенству

$$\mathbf{End}_{\mathcal{MN}}(M) = \{\beta_{M,A} | A \subseteq M, A \in \mathbb{MN}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, морфизм $\beta_{M,A} \in \mathbf{End}_{\mathcal{MN}}(M)$ тогда, и только тогда, когда моноид A удовлетворяет равенству $M \cdot A = M$. Но это возможно только при условии $A \subseteq M$. $\square$

Из доказанной леммы следует, что для любого объекта $M \in Ob_{\mathbb{MN}}$ имеется единственный автоморфизм $\beta_{M,\{1\}}$ и $\mathbf{Aut}_{\mathcal{MN}}(M) = \{\beta_{M,\{1\}}\}$.

Рассмотрим множество $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus (\{\emptyset\} \cup \mathbb{MN})$. Для любого множества натуральных чисел $A \in \mathbb{SN}^*$ из равенства $A \cdot B = A$ следует, что $1 \in B$. Если A — конечное множество, то отсюда следует, что $B = \{1\}$.

ЛЕММА 8. Для категории $\mathcal{SN}$ для любого множества $A \in \mathbb{SN}^*$ его моноид эндоморфизмов $\mathbf{End}_{\mathcal{SN}}(A) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SN}}(A, A)$ удовлетворяет равенству

$$\mathbf{End}_{\mathcal{SN}}(A) = \{\beta_{A,B} | B \subseteq A^*, 1 \in B\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, морфизм $\beta_{A,B} \in \mathbf{End}_{\mathcal{SN}}(A)$ тогда и только тогда, когда множество B удовлетворяет равенству $B \cdot A = A$. Но это возможно только при условии $B \subseteq A^*$ и $1 \in B$. $\square$

7. Заключение

В работе заложены основы алгебраической теории дзета-функций моноидов натуральных чисел. Возникают естественные вопросы, как те или иные общие алгебраические и функциональные конструкции реализуются в конкретной структуре множества дзета-функций моноида натуральных чисел. Решение этих вопросов предполагается осуществить в последующих работах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гретцер Г. Общая теория решёток. — М., Мир, 1982, 456 с.
2. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени // Научн. тр. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 1940. Т.11.
3. Н. Н. Добровольский. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
4. Н. Н. Добровольский. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.
5. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
7. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
8. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
9. Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.
10. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.
11. Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
12. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.
13. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

14. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.
15. Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. — М.: МЦНМО, 2014. — 712 с.
16. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.
17. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.
18. Chan Heng Huat. Analytic Number Theory for Undergraduates (англ.). — World Scientific Publishing Company, 2009. — ISBN 981-4271-36-5.

REFERENCES

1. Grätzer G., 1998, "General lattice theory", 2nd ed., *Birkhäuser*, 663 pp.
2. Delone B.N., Faddeev D.K., 1940, "Theory of Irrationalities of the Third Degree", *trudy matematicheskogo instituta imeni Steklova V.A.*, vol. 11., pp. 3–340.
3. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4 pp. 188–208.
4. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
5. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 142–150.
7. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
8. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
9. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 109–134.
10. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.
11. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.
12. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.
13. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

14. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2019, "On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 156–168.
15. Ivanets H., Kovalsky E., 2014, "Analytical number theory". — *Moscow: ICNMO*, — 712 p.
16. Titchmarsh E. K., 1952, "Teorija dzeta-funkcii Rimana", *Izd-vo I-L, Moskva*, 407 p.
17. Chandrasekharan K., 1974, "Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel", *Izd-vo Mir, Moskva*, 188 p.
18. Chan Heng Huat, 2009, "Analytic Number Theory for Undergraduates" — *World Scientific Publishing Company* — ISBN 981-4271-36-5.

Получено 18.07.2022

Принято в печать 14.09.2022