

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.772

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-61-76

О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II

В. А. Горская

Горская Виктория Александровна — аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород).

e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

Аннотация

Задача топологической классификации вещественных алгебраических кривых является классической задачей фундаментальной математики, берущей своё начало фактически у истоков математики. Особую известность и современную формулировку задача приобрела после того, как в 1900 году Д. Гильберт включил её в свой знаменитый список математических проблем под номером 16. Это была задача о классификации кривых шестой степени, которую в 1969 году решил Д. А. Гудков [1]. Там же Гудков поставил задачу о топологической классификации вещественных алгебраических кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых кривых при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей. Задача Гудкова была решена в 1977 году Г. М. Полотовским [2], [3]. В настоящее время после длинной серии работ нескольких авторов (точные ссылки можно найти в статье [4]) почти завершено решение аналогичной задачи о кривых степени 7. Кроме этого, в [5] была найдена топологическая классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении, и в [6] была найдена классификация взаимных расположений M -квинтики и пары прямых.

Настоящая работа посвящена случаю, когда неприводимые сомножители кривой степени 7 имеют степени 3, 2 и 2, и является продолжением исследования, начатого в [7].

Ключевые слова: неособые плоские вещественные алгебраические кривые, 16-я проблема Гильберта, распадающиеся кривые, топологическая классификация.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

В. А. Горская. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 61–76.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 512.772

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-61-76

On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane. II

V. A. Gorskaya

Gorskaya Victoria Alexandrovna — postgraduate student, National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod).

e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

Abstract

The problem of topological classification of real algebraic curves is a classical problem in fundamental mathematics that actually arose at the origins of mathematics. The problem gained particular fame and modern formulation after D. Hilbert included it in his famous list of mathematical problems at number 16 in 1900. This was the problem of classifying curves of the sixth degree, solved in 1969 by D.A. Gudkov [1]. In the same place, Gudkov posed the problem of the topological classification of real algebraic curves of degree 6 decomposing into a product of two non-singular curves under certain natural conditions of maximality and general position of quotient curves. Gudkov's problem was solved in 1977 by G.M. Polotovskiy [2], [3]. At present, after a large series of works by several authors (exact references can be found in [4]), the solution of a similar problem on curves of degree 7 is almost complete. In addition, in [5] a topological classification of curves of degree 6 decomposing into a product of any possible number of irreducible factors in general position, and in [6] a classification of mutual arrangements of M -quintics, a couple of lines were found.

The present paper is devoted to the case when the irreducible factors of the curve of degree 7 have degrees 3, 2, and 2, and is a continuation of the study begun in [7].

Keywords: non-singular plane real algebraic curves, Hilbert's 16th problem, decomposable curves, topological classification.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

V. A. Gorskaya, 2022, "On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane. II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 61–76.

1. Введение

Напомним некоторые сведения из теории плоских алгебраических кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2 , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Множество $\mathbb{R}C_m(\mathbb{C}C_m)$ точек вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2(\mathbb{C}P^2)$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2), x_i \in \mathbb{R}$ ($(z_0 : z_1 : z_2), z_i \in \mathbb{C}$), удовлетворяющими уравнению $C_m = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{CP}^2$).

Каждая компонента связности множества $\mathbb{RC}_m$ вещественных точек кривой C_m (коротко — вещественная ветвь кривой) в случае неособой кривой гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит $\mathbb{RP}^2$ на две области: гомеоморфную диску и гомеоморфную листу Мёбиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а вторая — внешней. Если степень кривой нечётна, то среди её вещественных ветвей имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{RP}^2$ односторонне, она называется *нечётной ветвью*.

Оценку числа N вещественных ветвей кривой степени m даёт классическая

ТЕОРЕМА 1.1 (ТЕОРЕМА ХАРНАКА (1876)) $N \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, и эта оценка точна для любого m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Множество $\mathbb{RC}_m$, рассматриваемое с точностью до изотопии в $\mathbb{RP}^2$, называется *вещественной схемой кривой C_m* . Неособые кривые с максимально возможными по теореме Харнака числом ветвей называются *M-кривыми*, а их схемы — *M-схемами*.

Таким образом, вещественная схема *M*-кривой степени 3 состоит из нечётной ветви и одного овала, а вещественная схема *M*-кривой степени 2 представляет собой один овал.

Цель этой работы — найти топологическую классификацию (точнее, список попарно различных вещественных схем) кривых степени 7, распадающихся на кубик и две коники (т. е. определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$), предполагая выполнение следующих условий:

- (i) C_3, C_2 и $\tilde{C}_2$ являются *M*-кривыми;
- (ii) каждые две из указанных в (i) кривых пересекаются без касания в максимально возможном (по теореме Безу) числе вещественных точек, т. е.

$$\#(\mathbb{RC}_3 \cap \mathbb{RC}_2) = \#(\mathbb{RC}_3 \cap \mathbb{RC}_{\tilde{C}_2}) = 6, \#(\mathbb{RC}_2 \cap \mathbb{RC}_{\tilde{C}_2}) = 4;$$

- (iii) $\mathbb{RC}_3 \cap \mathbb{RC}_2 \cap \mathbb{RC}_{\tilde{C}_2} = \emptyset$, т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;

- (iv) все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;

- (v) для каждой из коник $C_2, \tilde{C}_2$ все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники;

- (vi) точки пересечения нечётной ветви с разными кониками перемежаются, т. е. нельзя так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем — со второй.¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Назовём моделью расположения типа (i) – (vi) (в дальнейшем для краткости – моделью) набор четырёх топологических окружностей, ровно одна из которых вложена в $\mathbb{RP}^2$ односторонне и её объединение с двумя из трёх остальных окружностей удовлетворяет условиям (ii) – (vi) пересечения нечётной ветви кубики с кониками; четвёртая окружность не пересекается с первыми тремя.

2. Перечисление допустимых моделей

Допустимыми будем называть модели, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу (см., например, [8]), а также известным ограничениям на взаимные расположения кубики и коники и на взаимные расположения пары коник.

¹Случай, когда точки пересечения не перемежаются, был рассмотрен в работе [7].

Ограничения на взаимные расположения M -кубики и неособой коники состоят в том, что существуют ровно три расположения, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках – см. рис.1² (доказательство имеется в [5]).

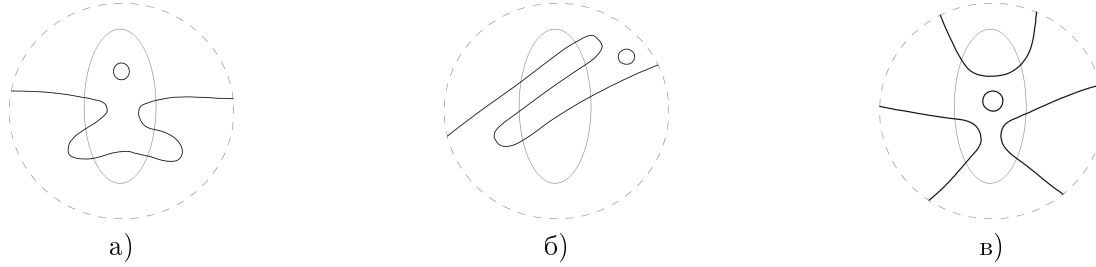


Рис. 1: Типы расположений M -кубики и коники.

Существуют ровно два топологически различных расположения в $\mathbb{RP}^2$ двух неособых коник с четырьмя общими точками, которые показаны на рис.2. Добавить к правому из них нечётную ветвь, удовлетворяющую условию (v), нельзя, поэтому *всюду ниже рассматривается только левое расположение*.



Рис. 2: Типы расположений двух неособых коник.

Пусть $\mathbb{RC}_2$ – «горизонтальный» овал на рис.2, $\mathbb{RC}_2^\sim$ – «вертикальный», и $A, \tilde{A}$ – дуги, несущие по шесть точек пересечения с нечётной ветвью кубики. Распределение чисел последовательно проходимых точек на дугах $A, \tilde{A}$ коник при непрерывном движении по нечётной ветви кубики может быть только таким, как указано в таблице 1 (в ячейках указано количество последовательно проходимых точек на указанных дугах коник; при этом учтено, что дуги $A, \tilde{A}$ равноправны).

Таблица 1

	A	$\tilde{A}$	A	$\tilde{A}$	A	$\tilde{A}$
1	4	6	2	-	-	-
2	2	4	4	2	-	-
3	4	2	2	4	-	-
4	2	2	4	4	-	-
5	4	4	2	2	-	-
6	2	2	2	4	2	-
7	2	4	2	2	2	-
8	2	2	2	2	2	2

²Здесь и ниже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, изображаемой пунктиром, считаются отождествлёнными.

Пронумеруем точки так, как показано на Рис.2., и будем двигаться по нечётной ветви кубики, пересекая дуги A и $\tilde{A}$ в 6 точках каждую в соответствии с распределениями чисел точек на этих дугах, показанными в таблице 1. Записывая номера последовательно проходимых точек при таком движении по нечётной ветви отдельно для каждой из дуг A и $\tilde{A}$, мы получим пару перестановок порядка 6.

Один из возможных примеров для строки № 4 таблицы 1 показан на рис.3.

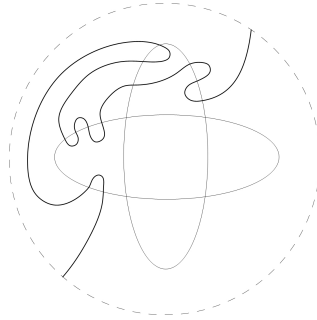


Рис. 3: (123456)(321456)

Следующая лемма легко доказывается непосредственным перебором с учётом рис.1.

ЛЕММА 2.1. На данной дуге A или $\tilde{A}$ возможны только перестановки

(123456), (165432), (321654), (543216), (561234), (345612) (отвечают случаю рис.1а));
 (123654), (165234), (321456), (345216), (561432), (543612) (отвечают случаю рис.1б));
 (125634), (163254) (отвечают случаю рис.1в)).

Теперь объединим попарно рассмотренные в лемме перестановки. Распишем получившиеся пары для распределений 1 – 8 из таблицы 1. При этом учитываем, что для данного распределения объединение некоторых перестановок в пару влечёт самопересечение нечётной ветви (см. пример на рис.4, где используется распределение 2 таблицы 1 и пара перестановок (123456) и (123456)), что невозможно.

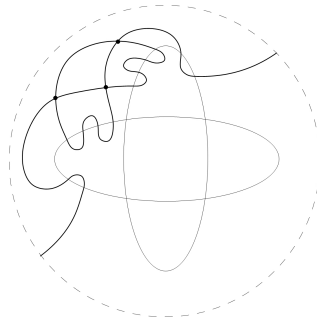


Рис. 4: Пример самопересечения

1) Рассмотрим случай строки № 1 таблицы 1. На дуге A возможны только следующие варианты:

(1236_54); (1654_32); (32_1456); (3216_54); (3456_12); (5432_16); (56_1432);
 (16_5432); (16_5234); (32_1654); (3452_16); (54_3216); (5436_12); (56_1234).

На дуге $\tilde{A}$ рассматриваются перестановки, указанные в лемме 2.1.

Здесь и ниже, чтобы избежать большого количества рисунков, мы применяем кодировку моделей, представляющую собой две перестановки шестого порядка, снабжённые дополнительными символами из набора $\{R, L, B, \tilde{B}, C, *, _\}$.

Чтобы по коду получить рисунок, нужно нарисовать «заготовку», показанную на левом рис.2, и провести нечётную ветвь, пересекающую дуги A и $\tilde{A}$ в занумерованных точках в порядке, указанном в первой и второй перестановках соответственно, причём дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие первым двум символам первой перестановки, расположена внутри двуугольника, в границу которого входит дуга A .

Если между соседними (в циклическом порядке, причём скобки не замечаются) символами i и j записана буква R (L), то в области, примыкающей справа (соответственно, слева) к дуге (i, j) нечётной ветви, следует расположить овал. Если же после перестановки записана буква B ($\tilde{B}$) или C , то овал следует нарисовать в двуугольнике, в границу которого входит дуга B (соответственно, $\tilde{B}$) или в четырёхугольнике внутри коник. Дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие последнему символу второй перестановки и первому символу первой перестановки, а также дуги нечётной ветви, отвечающие символам, между которыми стоит $*$, пересекают один раз граничную окружность модели проективной плоскости. Последний дополнительный символ из набора (подчёркивание) ставится внутри перестановки в том месте, где нечётная ветвь с одной из дуг A , $\tilde{A}$ переходит на вторую из них.

2) Рассмотрим случаи № 2 – № 5 таблицы 1. С помощью перебора получим все возможные варианты сочетаемости перестановок на дугах A , $\tilde{A}$. Эти варианты перечислены в таблице 2 следующим образом: таблица содержит четыре группы, занумерованные числами 1 – 4; входящие в данную группу перестановки на дуге A можно объединять только с перестановками на дуге $\tilde{A}$, входящими в ту же группу. Например, из группы 1 всего получим 30 пар перестановок, из группы 3 – 42 и т. д.

Таблица 2

1		2	
A	$\tilde{A}$	A	$\tilde{A}$
(12_3456) (1234_56) (12_3654) (1652_34) (3214_56) (34_5216)	(32_1456) (32_1654) (54_3216) (3452_16) (5432_16)	(1236_54) (16_5432) (1654_32) (16_5234) (3216_54) (1456_32) (16_3452)	(12_3456) (12_3654) (34_5216) (1234_56) (1652_34) (3214_56) (12_*56*34) (16*32_*54)
3		4	
A	$\tilde{A}$	A	$\tilde{A}$
(32_1456) (32_1654) (3452_16) (54_3216) (5432_16) (54_1236) (5234_16)	(56_1432) (56_1234) (3456_12) (5436_12) (56_*34*12) (54*16_*32)	(3456_12) (5436_12) (56_1432) (56_1234) (56_3214) (3654_12) (5216_34) (34_1652)	(16_5432) (16_5234) (1236_54) (1654_32) (3216_54) (12*56_*34) (16_*32*54)

3) Рассмотрим случаи № 6 и № 7 из таблицы 2. Результаты представлены в таблице 3 в том же виде, как для случая 2):

Таблица 3

1		2	
A	$\tilde{A}$	A	$\tilde{A}$
(34_56_12)	(32_1456)	(16_54_32) (54_32_16)	(12_3456)
	(32_1654)		(12_3654)
	(54_3216)		(34_5216)
	(3452_16)		(1234_56)
	(5432_16)		(1652_34) (3214_56)
3		4	
A	$\tilde{A}$	A	$\tilde{A}$
(32_16_54)	(56_1432)	(56_12_34)	(16_5432)
	(56_1234)		(16_5234)
	(3456_12)		(1236_54)
	(5436_12)		(1654_32) (3216_54)

4) Рассмотрим случай № 8 таблицы 1. Имеются только следующие тринадцать возможностей, перечисленных ниже:

$$\begin{aligned}
 &(12_34_56)(54_32_16); & (16_34_52)(16_32_54); \\
 &(16_54_32)(12_34_56); & (16_52_34)(12_56_34); \\
 &(32_16_54)(56_12_34); & (36_54_12)(12_56_34); \\
 &(54_32_16)(34_56_12); & (52_34_16)(54_16_32); \\
 &(56_12_34)(16_54_32); & (52_16_34)(56_34_12); \\
 &(32_56_14)(54_16_32); & (32_14_56)(56_34_12); \\
 &(36_12_54)(16_32_54).
 \end{aligned}$$

Таким образом, всего получаются 393 допустимые пары перестановок. Однако в силу равноправия дуг A и $\tilde{A}$ не всем этим парам отвечают топологически различные модели расположений нечётной ветви кубики и пары коник; кроме этого, как будет показано ниже, многие из получающихся расположений не удовлетворяют топологическим следствиям теоремы Безу при пересечении с прямой. Наконец, чтобы получить модель расположения M -кубики и пары коник, каждое расположение следует дополнить овалом кубики, а сделать это, как сейчас будет показано, иногда невозможно, а иногда можно двумя способами.

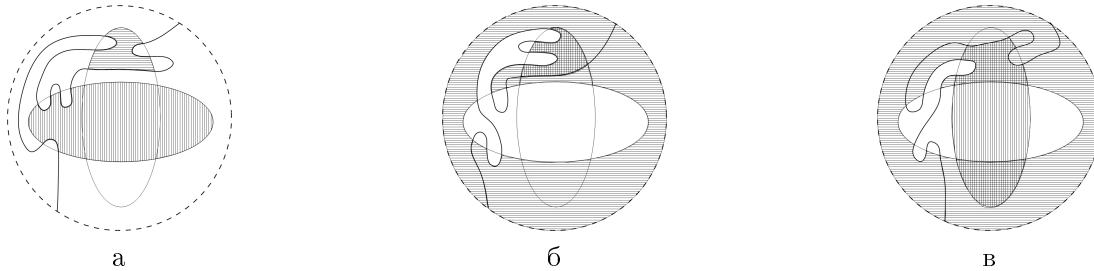


Рис. 5: Области для расположения овала кубики.

Действительно, в случае рис. 1а овал кубики расположен внутри коники в шестиугольной компоненте связности дополнения к объединению коники и нечётной ветви кубики, а в случае

рис.1б) — вне двуугольников вне коники. Если пересечение области, допустимой для овала относительно коники C_2 , с областью, допустимой для овала относительно коники $\tilde{C}_2$, пусто (см. пример на рис.5а), то данное расположение не может быть реализовано распадающейся кривой степени 7. Если это пересечение состоит из одной или двух компонент связности (заштрихованы дважды на рис.5б и рис.5в), то для дальнейшего рассмотрения получаются одна или две модели соответственно.

Запреты схем расположений кубики и двух коник, получаемые сведением к противоречию с теоремой Безу, проиллюстрируем на примерах, оформленных в виде следующих двух лемм.

ЛЕММА 2.2. *Модель, показанная на рис.6, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

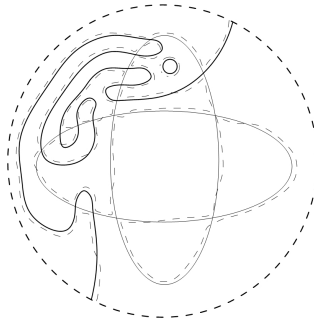


Рис. 6: Пример применения теоремы Брюзотти.

Доказательство. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой степени 7. Возмутим эту кривую в классе кривых степени 7 так, чтобы после устранения её двойных точек образовалась кривая со схемой, показанной на рис.6 пунктиром — такое возмущение найдется в силу теоремы Брюзотти (см., например, [8]) о независимости возмущений двойных точек простой кривой³. Схема возмущенной кривой степени 7 содержит гнездо веса три⁴ и ещё один овал, что противоречит теореме Безу⁵.

Замечание: в других случаях применения рассуждений из доказательства этой леммы иногда получаются два гнезда веса 2, что также противоречит теореме Безу.

ЛЕММА 2.3. *Модель, показанная на рис.7а, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*



Рис. 7: Пример применения теоремы Безу

Доказательство. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$. Занумеруем дуги, на которые коника $\tilde{C}_2$ делится точками пересечения с

³Кривая называется *простой*, если все её особенности — невырожденные двойные точки.

⁴Т. е. три последовательно вложенных друг в друга овала.

⁵Прямая, проходящая через точку, лежащую внутри самого внутреннего овала гнезда, и через точку внутри любого четвёртого овала, пересечёт кривую не менее, чем в девяти точках.

коникой C_2 и с нечётной ветвью кубики, как показано на рис.7а, выберем точку A на дуге с номером 1 и точку B внутри овала кубики и посмотрим, как может проходить прямая AB , учитывая, что эта прямая не может пересекать каждую конику более, чем в двух точках, и нечётную ветвь кубики более, чем в одной точке (поскольку в силу выбора точки B обязательно имеются две точки пересечения с овалом кубики).

Без ограничения общности можно считать, что прямая AB в точке A не касается коники $\tilde{C}_2$ – этого всегда можно добиться малым шевелением точки A . Предположим, что вторая точка пересечения прямой AB с коникой $\tilde{C}_2$ – C – тоже лежит на дуге 1. Тогда прямая может проходить только так, как показано пунктиром на рис.7а. Но тогда прямая AB расположена относительно коник C_2 и $\tilde{C}_2$ так, как показано на рис.7б, что невозможно: устраняя двойные точки (см. пунктир на рис.7б), получим кривую степени 5, содержащую два овала внутри одного, что противоречит теореме Безу.

Аналогично доказывается невозможность расположения точки C на дугах 8 – 10 коники $\tilde{C}_2$, а расположение точки C на любой из остальных дуг влечёт более чем однократное пересечение прямой с нечётной ветвью кубики.

С помощью приёма, описанного в доказательстве леммы 2.3, удалось запретить 10 моделей: (1236_54)(16R5324); (5R6_1234)(123654) (рассмотрена в лемме 2.3); (16_5234)(16R5234); (3R456_12)(165234); (5R6_1234)(165234); (56_3214)(12*56_*34); (5216_34)(12*56_*34).

После применения методов, описанных в леммах 2.2, 2.3, для дальнейшего исследования остаются 62 модели, коды которых перечислены во вторых столбцах таблиц 4 и 5 в конце статьи; смысл остальных столбцов этих таблиц будет объяснён ниже.

3. Построения

В работе [5] найдена классификация взаимных расположений прямой, коники и кубики при условиях максимальности и общего положения, аналогичных условиям (i) – (iii), состоящая из 163 схем. «Удвоение» прямой в некоторых расположениях, построенных в [5], даёт реализацию схемами кривых степени 7 некоторых моделей из таблиц 4, 5.



Рис. 8: Построение кривой с расположением (16_52*_*34)(1R2_*56*_*34).

Рассмотрим, например, построенное в [5] (см. № 6 в таблице 2 в [5]) расположение коники, кубики и прямой L , показанное на рис.8а, немного повернём прямую L вокруг точки P в положение L' так, чтобы L' тоже пересекала нечётную ветвь кубики в трёх точках. Устраняя двойную точку P кривой $L \cup L'$ с помощью достаточно малого возмущения, получим неособую конику, объединение которой с исходными коникой и кубикой рис.8а реализует модель № 24 из таблицы 4 – см. рис.8б.

Аналогично из расположений № 1, 28, 29, 107, 108, 125, 136, 151, 158 из таблицы 2 работы [5] получаются кривые, реализующие соответственно модели № № 46, 45, 44, 4, 16, 10, 8, 24, 58 из таблиц 4, 5 ниже.

4. Запреты с помощью теории кос и зацеплений

1) В этом параграфе описано применение предложенного С.Ю. Орековым в [9], [10] метода запрета изотопических типов алгебраических кривых, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод неоднократно излагался в литературе, поэтому здесь приводится лишь его краткое описание, необходимое для понимания дальнейшего.

Мы будем применять метод Орекова только для таких схем, модели которых допускают максимальный пучок прямых⁶, то есть в $\mathbb{R}P^2$ имеется точка p такая, что любая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекает модель кривой степени 7 не менее, чем в 5 точках, и существует прямая l_{max} , пересекающая эту модель в 7 точках.

Выберем аффинные координаты (x, y) так, чтобы прямая l_{max} (а следовательно, и точка p) оказались в бесконечности; тогда пучок L_p превратился в пучок параллельных прямых $\{l_t\}$ (см. рис.9), где l_t – прямая с уравнением $x = t$. Изображение схемы кривой в таком виде будем называть *развёрткой, отвечающей прямой l_{max}* .

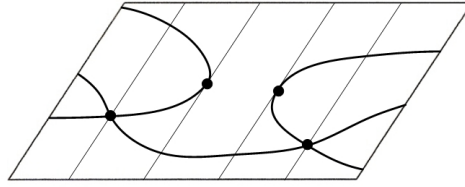


Рис. 9: Развёртка.

Эту развёртку удобно кодировать X-кодом $u_1 u_2 \dots u_s$, где символ u_i характеризует расположение кривой $\mathbb{R}C_7$ в окрестности критической прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k, \subset_k, \times_k$ ($k \in \{1, \dots, 6\}$) в соответствии с рис.10, а $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_s}\}$ – набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию параметра t_i .

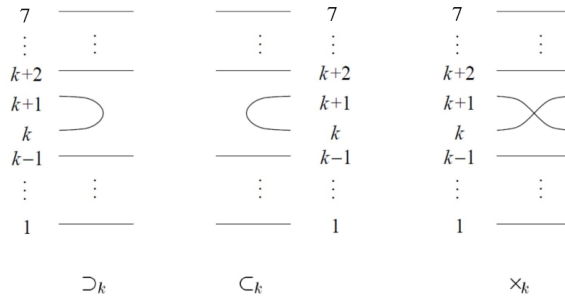


Рис. 10: Символы X-кода и образующие группы кос.

Идея метода заключается в следующем: а) сначала по модели кривой C_7 строится соответствующая этой модели коса из 7 нитей, для чего в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ рассматривается взаимное расположение пучка комплексных прямых $\mathbb{C}L_p$ с центром в точке p относительно $\mathbb{C}C_7$, а затем устраняются двойные точки множества $\mathbb{C}C_7 \cup \mathbb{C}L_p$, б) затем используется известный факт (см. [11]): если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая коса квазиположительна. Следуя Орекову, мы проверяем да-

⁶В случаях, когда максимального пучка нет, применение метода Орекова требует слишком больших вычислений.

лее выполнение необходимого условия квазиположительности косы — неравенства Мурасуги-Тристрама (точную формулировку см., например, в [4]). Если оно не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой данной степени.

2) ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА. Приведём пример применения описанного метода к моделям из таблиц 4, 5. Рассмотрим модель рис.11а., отвечающую коду (1R2_3456)(32_1456) (№ 1 в таблице 4), выберем точку p внутри овала кубики, а прямую l_{max} так, как показано на рис.11а. Развёртка, отвечающая этой прямой, показана на рис.11б;

$$x^5x^2x^3x^3x^3x^4x^5x^5x^5x^4x^4x^5)3(2x^3x^3x^3$$

— соответствующий этой развёртке X-код.⁷ Вычисления дают $h = 2$, где через h мы обозначили значение левой части неравенства Мурасуги-Тристрама, записанного в виде $h \leq 0$. Следовательно, рассматриваемая модель не может быть реализована схемой какой-либо кривой степени 7.



Рис. 11: Пример применения метода Оревкова.

Аналогично были рассмотрены все остальные допустимые модели. При этом для выбора центра p пучка прямых возможны разные варианты. В работе точка p выбиралась внутри окружности, отвечающей овалу кубики — эти случаи собраны в таблицу 4 — или в какой-либо точке в пересечении внутренних областей окружностей, отвечающих коникам (область C на рис.2) — эти случаи собраны в таблице 5. Развёртки и X-коды нетрудно находить «вручную», но вычисления значений h вряд ли возможны без компьютера (ввиду необходимости нахождения собственных чисел больших матриц и ввиду большого количества X-кодов). Я использовала многократно применявшуюся ранее программу, написанную специально для таких задач М.А. Гуциным⁸. На вход этой программы подаётся X-код, а на выходе получается значение h .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [10], [12] С.Ю. Оревков предложил применять для проверки квазиположительности выполнение условия Фокса-Милнора. Примеры применения этого условия можно найти также в [4]. В нашей ситуации было интересно применить его только в случаях, когда модель не удалось ни запретить с помощью неравенства Мурасуги-Тристрама, ни реализовать, т. е. для моделей № № 7, 12, 26, 32, 48 в таблице 4 и № 48 в таблице 5. Проведённые вычисления показали, что условие Фокса-Милнора не запрещает реализуемость этих моделей, поэтому описание этих вычислений мы не приводим.

⁷Здесь и ниже индексы у символов X-кода пишутся в строку справа от символа.

⁸В то время — студентом механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Таблица 4. Центр пучка внутри овала кубики.

№	Код модели	X-код	h
1	(1R2_3456)(32_1456)	$x_5x_2x_3x_3x_4x_5x_5x_5x_4x_4x_5)3(2x_3x_3x_3$	2
2	(1R2_3456)(3452_16)	$x_5x_2x_3x_4x_5x_5x_5x_5x_4x_3x_3x_4)3x_3(2x_3x_3x_3$	2
3	(1R234_56)(32_1456)	$x_2x_5x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_4x_4x_5x_5x_5)3(2x_3x_3x_3$	2
4	(1R234_56)(3452_16)	$x_5x_2x_3x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_4x_5x_5x_5)3(2x_3x_3x_3$	0 (∃)
5	(3214_56)(32_1L654)	$x_4x_4x_4)3x_2x_2x_2(4x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_4x_4x_5x_4$	2
6	(3214_56)(54_321L6)	$x_4x_4x_3)4x_2(4x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_4x_4x_5x_5x_4$	2
7	(3214_56)(5432_1L6)	$x_4x_5x_4x_4x_5x_5x_5x_5x_4x_3x_3x_3)4x_2(3x_4x_4x_4$	0 (?)
8	(34_5216)(32_1L654)	$x_4x_4x_4)3x_2x_2x_2(4x_3x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_4x_5x_4$	0 (∃)
9	(34_5216)(54_321L6)	$x_4x_4x_4)3x_2(4x_3x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_4x_5x_5x_4$	2
10	(34_5216)(5432_1L6)	$x_4x_4x_4)3x_2(4x_3x_4x_5x_5x_5x_5x_4x_3x_3x_4x_5x_4$	0 (∃)
11	(1236_54)(1R23456)	$x_4x_5x_4x_4x_4x_4x_4x_5x_5)3(2x_3x_3x_3)4(3x_4x_4x_4$	4
12	(1L6_5432)(123654)	$x_4x_5x_4x_4x_4x_3x_3x_3)4x_3x_3x_3x_3x_2(3x_4x_4x_4$	0 (?)
13	(1L6_5432)(165234)	$x_4x_5x_4x_3x_3x_4x_4x_3)4x_3x_3x_3x_3x_2(3x_4x_4x_4$	2
14	(1L654_32)(123654)	$x_4x_5x_5x_5x_4x_4x_4x_3x_3x_3)4x_3x_3x_2(3x_4x_4x_4$	2
15	(1L654_32)(165234)	$x_4x_5x_5x_5x_4x_3x_3x_4x_4x_4)3x_3x_3x_2(3x_4x_4x_4$	2
16	(16_5234)(1R23456)	$x_4x_3x_3x_3)2(4x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_5x_5x_5x_4x_5$	0 (∃)
17	(3L216_54)(123654)	$x_4x_5x_4x_4x_4x_3x_3x_3)4x_3x_3x_2x_2x_2(3x_4x_4x_4$	2
18	(3L216_54)(165234)	$x_4x_5x_4x_3x_3x_4x_4x_4)3x_3x_3x_2x_2x_2(3x_4x_4x_4$	2
19	(3456_12)(123456)C	$x_5x_4x_4x_4x_4x_4x_4x_5x_4x_4x_4x_4x_3x_3x_2x_2$	2
20	(3R456_12)(321456)	$x_4x_5x_3x_3x_3x_4x_4x_4)3x_3x_3x_3x_3x_2x_2(3x_2x_3$	2
21	(3R456_12)(345216)	$x_5x_4x_4x_3x_3x_4)3x_3x_3x_3x_3x_2x_2(2x_3x_3x_3x_4$	2
22	(56_1234)(123456)C	$x_4x_4x_4x_4x_4x_4x_5x_4x_4x_3x_3x_3x_3x_2x_2x_2$	2
23	(56_1R234)(345216)	$x_4x_5x_3x_4x_4x_3x_3x_4)3x_3x_3x_2x_2x_2x_2(3x_2x_3$	2
24	(16_52*_34)(1R2_*56*_34)	$x_4x_3x_5x_4x_5x_5x_4x_3x_2x_2x_3x_4)3x_3x_3(3x_2x_3$	0 (∃)
25	(16_5234)(1R2_*56*34)	$x_4x_3x_5x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_3)4x_2x_2x_3x_3(3x_2x_3$	2
26	(1236_54)(1R2_*56*34)	$x_4x_3x_3x_3x_5x_4x_5x_5x_4x_3)4x_2x_2x_3x_3(3x_2x_3$	0 (?)
27	(36_54*_12)(1R2_*56*_34)	$x_4x_5)4x_3x_3(3x_4x_3x_2x_2x_3x_4x_5x_5x_4x_4x_2x_3$	2
28	(56_1234)(12*56_*34)C	$x_5x_5x_4x_4x_3x_3x_2x_3x_3x_4x_4x_3x_3x_3x_2$	2
29	(3456_12)(12*56_*34)C	$x_5x_5x_4x_4x_3x_3x_2x_3x_3x_3x_3x_4x_4x_3x_3x_2$	2
30	(3654_12)(1R2*56_*34)	$x_4x_5)4x_3x_3x_2x_2(4x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_4x_4x_2x_3$	2
31	(34_1652)(1R2*56_*34)	$x_4x_5x_3x_4x_4x_3x_2x_2x_3x_4)3x_3x_3x_2x_2(3x_2x_3$	2
32	(1456_32)(16*3R2_*54)	$x_3x_4)3x_3x_2x_2(4x_3x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_3x_2x_4$	0 (?)
33	(16_3452)(16*3R2_*54)	$x_3x_4)3x_3x_2x_2(4x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_4x_3x_2x_3x_4$	2
34	(1L6_54_32)(12_3654)	$x_3x_4x_5x_4x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_4x_5x_5)3x_2(4x_3x_4$	2
35	(2L1_6543)(61_2543)	$x_4x_5x_3x_4x_5x_5x_5x_5x_4x_3x_3x_4)3x_2x_2(3x_2x_3$	2
36	(2L1_6543)(6541_23)	$x_4x_5x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_5x_5x_4x_3x_2x_2)4(3x_2x_3$	2
37	(21_6345)(61_25R43)	$)3x_4x_3(3x_4x_3x_3x_4x_5x_2x_2x_6x_5x_4x_4x_4)5x_1x_1(4$	2
38	(21_6345)(65R41_23)	$)3x_3x_3x_3x_3(3x_2x_2x_4x_4x_5x_6x_5x_4x_4x_4)5x_1x_1(4$	2
39	(2341_65)(61_25R43)	$)3x_3(4x_3x_3x_3x_4x_5x_6x_5x_5)4(3x_2x_3x_3)4x_2x_1x_1(4$	2
40	(2341_65)(65R41_23)	$)3x_4x_3x_3x_3(3x_2x_3x_3x_2x_4x_4x_5x_6x_5x_5)4x_1x_1(4$	2
41	(4L321_65)(61_2543)	$x_4x_5x_3x_4x_5x_5x_4x_3x_3x_3x_2x_2x_2x_2)4(3x_2x_3$	2
42	(4L321_65)(6541_23)	$x_4x_3x_3x_3x_5x_4x_5x_5x_4x_3x_2x_2x_2x_2)4(3x_2x_3$	2

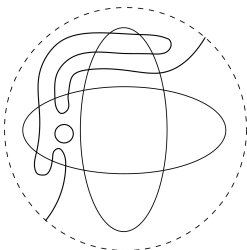
Таблица 5. Центр пучка внутри пересечения коник.

№	Код модели	X-код	h
43	(32R14_56)(32_1456)	)4x4(4x3x3x3)2x3x3x3(3x4x4x1x1x5x6x5x5)4x3(3	4
44	(32R14_56)(3452_16)	)4x2(5x4x4x4)3x3(4x5x5x6x5x4x3x3x4)3x1x1x1(3	0 ($\exists$)
45	(34_52R16)(32_1456)	)4x2x2x2(5x4x4x3x3x4x5x6x5x4x3)4x1x1x1(3	0 ($\exists$)
46	(34_52R16)(3452_16)	)3(4x3x3x3x4x5x6x5x4x3x3x4x4)5x1x1x1x2(4	0 ($\exists$)
47	(1236_54)(1236R54)	)4x2x2x2(5x4x4x4x5x5x5x6x5x4x4)3x1x1x1(3	2
48	(16_5234)(1236R54)	)4x2(5x4x4x4x5x5x5x6x5x4x3x3x4)3x1x1x1(3	0 (?)
49	(5436_12)(12L3654)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
50	(5436_12)(1652L34)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
51	(5436_12)(3214R56)	)3x3x3x3(3x4x4x4)5x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
52	(56_1432)(12L3654)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x4x3x3(2x3x3x3)4x2x1x1x1(4	4
53	(56_1432)(1652L34)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x4x3x3(3x2x3x3)4x2x1x1x1(4	4
54	(32_1456)(5L6_*34*12)	x6x6x5x4)5(5)5x2x2x3x3x1x2x2x2(3x4x3x2x1	2
55	(32_14*_56)(56_*34*1R2)	x6x5x4x4)3x3x4x5x6x2x2x3x3(5)5(2x3x2x1x1	6
56	(3452_16)(5R6_*34*12)	x6x5x4x3x3x3)4x3x2x4x2x3x3(5)5(3x2x2x1x1	4
57	(16_*34_52)(16_*3R2_*54)	x6x6x2x3x3)4(3)3(4x3x3x2x1x2x3x4x4x3x2x1	0 ($\exists$)
58	(54_1236)(5L4*16_*32)	x6x5x5x5x4x4x3x3x5)4x4(3)3(4x3x3x2x1x1x5	2
59	(32_*56_14)(54*_16_*3R2)	x6x6x5x2x4x4x1x2x2)3(4)4(3x2x4x4x3x3x2x1	2
60	(36_12*_54)(16_*3R2_*54)	x6x5x4)5(3)3(4x5x3x3x4x4x5x6x5x4x4x2x1x1	2
61	(56_1432)(16_*3R2*54)	x6x6x5x3x3x4x4x2x1x2x2)3(4)4(3x2x3x3x2x1	2
62	(5436_12)(1R6_*32*54)	x6x6x5x3x3x4x4x2x1x2x3x3x3)2(4)4(2x3x2x1	2

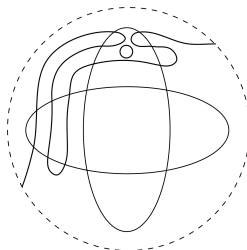
5. Заключение

Итог проведённого исследования можно сформулировать следующим образом.

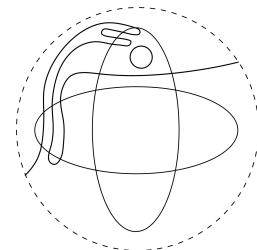
ТЕОРЕМА 5.1. *Топологические модели кривых рассматриваемого класса (т. е. удовлетворяющих условиям (i) – (iv) п.1), отличные от показанных на рис. 12, 13, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих четырнадцати моделей первые девять (рис. 12) реализуются распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости пяти оставшихся (рис. 13) открыт.*



(1R234_56)(3452_16)



(34_5216)(32_1L654)



(34_5216)(5432_1L6)

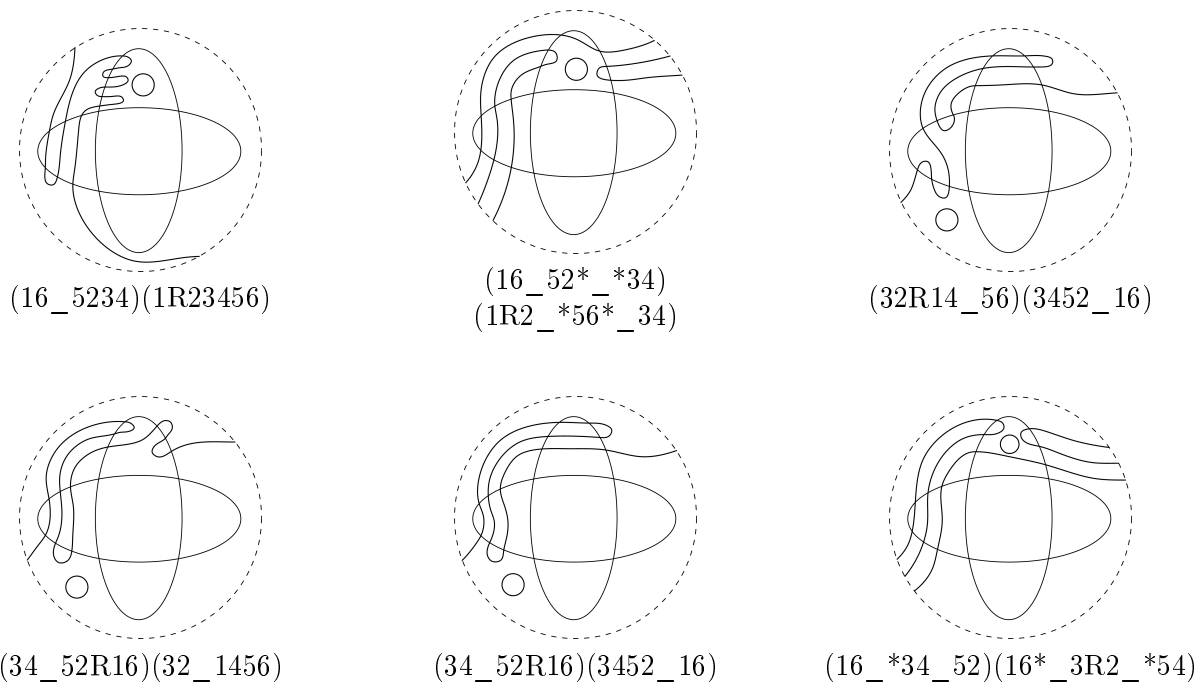


Рис. 12: Реализованные схемы.

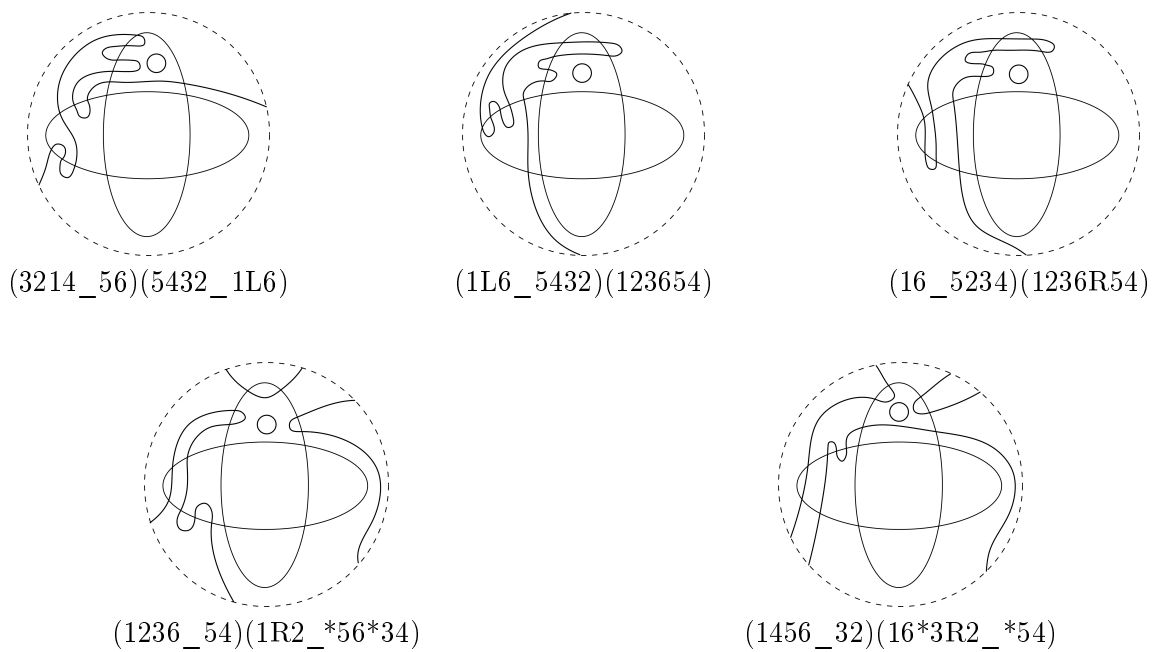


Рис. 13: Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Уч. зап. Горьков. ун-та. 1969. 87. С. 1–214.
2. Полотовский Г. М. Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. 236, № 3. С. 548–551.
3. Полотовский Г. М. Полная классификация M -распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости / Деп. в ВИНТИ. № 1349–78. М., 1978.
4. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Тематические обзоры. 2020. 176. С. 3–18.
5. Kuzmenko T. V., Polotovskiy G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M -curves in general position // AMS Translations Ser. 2, 1996. 173. P.165–177.
6. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. 21, № 2. С. 92–112.
7. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. 22, № 1. С. 24–37.
8. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // Усп. мат. наук. 1974. 29, № 4 (178). С. 3–79.
9. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. 38. P. 779–810.
10. Orevkov S. Yu. Clasification flexible M -curves of degree 8 up to isotopy // Geom. Funct. Anal. 2002. 12, № 4. P. 723–755.
11. Lee R. Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. 22. P. 191–202.
12. Оревков С. Ю. Расположения M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь // Алгебра и анализ. 2007. 19, № 4. С. 174–242.

REFERENCES

1. Gudkov D. A., Utkin G. A. 1969, “Topology of 6-th degree curves and 4-th degree surfaces (to the Hilbert 16th problem)“, *Uchenye zapiski Gorkovskogo universiteta*, vol. 87, 214 p.
2. Polotovskiy G. M. 1977, “A catalogue of M -decomposing curves of sixth order“, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 236, no. 3 pp. 548–551.
3. Polotovskiy G. M. 1978, “Complete classification of 6th order M -decomposable curves in the real projective plane“ *Dep. in VINITI* no. 1349–78.
4. Borisov I. M., Polotovskiy G. M. 2020, “On the topology of plane real decomposable curves of degree 8“, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Tematicheskie obzory*, no. 176. pp. 3–18.
5. Kuzmenko T. V., Polotovskiy G. M. 1996, “Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M -curves in general position“, *AMS Translations*, vol. 2, no. 173, pp.165–177.

6. Korchagin A.B., Polotovskiy G.M. 2003, “On arrangements of a plane real quintic curves with respect to a pair of lines“, *Commun. Contemp. Math.*, vol. 5, no. 1, pp. 1–24.
7. Gorskaya V.A., Polotovskiy G.M. 2020, “On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane“ *Middle Volga Mathematical Society Journal* vol. 22, no.1. pp. 24–37.
8. Gudkov D.A. 1974, “The topology of real projective algebraic varieties“, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 29, no. 4(178), pp. 3–79.
9. Orevkov S.Yu. 1999, “Link theory and oval arrangements of real algebraic curve“, *Topology*, no. 38, pp. 779–810.
10. Orevkov S.Yu. 2002, “Classification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy“, *GAFA, Geom. Funct. Anal.*, vol.12, no. 4, pp. 723–755.
11. Lee R. 1983, “Algebraic functions and closed braids“, *Topology*, no. 22, pp. 191–202.
12. Orevkov S.Yu. 2007, “Arrangements of an M-quintic with respect to a conic that maximally intersects its odd branch“, *Algebra i Analiz*, vol. 19, no. 4, pp. 174–242

Получено 09.06.2022

Принято в печать 14.09.2022