

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-50-60

О разложении действительных чисел по некоторым
последовательностям

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет имени Алламе Табатабаи (Иран).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказаны теоремы о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел, по последовательности Фибоначчи и по целочисленной последовательности, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям и связанной с числами Пизо–Виджаярагхавана. Особое внимание обращено на “явные формулы” и условия единственности таких представлений. Отметим, что единственность разложения действительного числа по обратным значениям мультипликативной системы позволяет получить оценку вида

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{x_n}{n!}, \frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{1}{n}.$$

Разложения чисел по последовательности обратных чисел Фибоначчи существенно использует их представление через степени “золотого сечения” $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Системы чисел, связанные с числами Пизо–Виджаярагхавана рассмотрены менее подробно, поскольку требуется конкретизировать свойства рассматриваемых чисел.

Ключевые слова: мультипликативная система чисел, последовательность Фибоначчи.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 50 – 60.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-50-60

On an expansion real numbers on some sequences

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the expression of real numbers on multiplicative number system, Fibonacci sequence and integral valued sequences satisfying recurrent correlations and connected with Pisot–Vidgajraghavan, are proven. It pay a special attention to “explicit formulas” and conditions of the uniqueness of such representations. We note that unifying of an expression of a real number over inverse values of a multiplicative system permits to get the estimation of the form

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{x_n}{n!}, \frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{1}{n}.$$

Expressions of numbers over the sequence of inverse of Fibonacci numbers essentially uses these representation throw powers of “the gold section” $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Systems numbers connected with Pisot–Vidgajraghavana were considered less than in details, as demands to make a properties of examined numbers more concrete.

Keywords: multiplicative number system, the Fibonacci’s sequence.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov, 2022, “On an expansion real numbers on some sequences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 50 – 60.

1. Введение

В настоящей работе даны обобщения теоремы об однозначном представлении в виде ряда в позиционной системе счисления действительного числа и формулы А.О.Гельфонда с нецелым основанием, большим единицы.

Следуя Гельфонду, числу $\theta > 1$, являющемуся “основанием системы счисления”, для любого действительного числа α из полуинтервала $[0, 1)$ определим “цифры” $\bar{\lambda}_n = \bar{\lambda}_n(\alpha)$, $n \geq 1$, — целые числа с условием $0 \leq \bar{\lambda}_n < \theta$. Пусть число α представлено сходящимся рядом вида

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k} + \frac{x_n}{\theta^n}, x_0 = \alpha.$$

Отсюда находим

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k} + \frac{x_n}{\theta^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k} + \frac{x_{n-1}}{\theta^{n-1}}, \frac{\bar{\lambda}_n}{\theta^n} + \frac{x_n}{\theta^n} = \frac{x_{n-1}}{\theta^{n-1}}, \bar{\lambda}_n + x_n = \theta x_{n-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\bar{\lambda}_n = [\theta x_{n-1}], x_n = \{\theta x_{n-1}\}.$$

Будем говорить, что число α представлено рядом

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{\theta^k}, 0 \leq \bar{a}_k < \theta (k \geq 1),$$

где $\bar{a}_k$ — целые числа, и для любого $n \geq 1$ справедливо условие

$$0 \leq \alpha - A_n < \theta^{-n}, A_n = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{\theta^k}.$$

Тогда найденное выше представление числа α в виде ряда — единственно. Предположим противное. Предположим, что существует представление, отличное от предыдущего,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_k}{\theta^k}, 0 \leq \bar{b}_k < \theta (k \geq 1),$$

где $\bar{b}_k$ — целые числа, и для любого $n \geq 1$ справедливо условие

$$0 \leq \alpha - B_n < \theta^{-n}, B_n = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{b}_k}{\theta^k},$$

причем найдется число m такое, что

$$A_1 = B_1, \dots, A_{m-1} = B_{m-1}, A_m \neq B_m.$$

Имеем

$$0 \leq \alpha - A_m < \theta^{-m}, 0 \leq \alpha - B_m < \theta^{-m}.$$

Отсюда получим

$$1 \leq |\bar{a}_m - \bar{b}_m| = |A_m - B_m| \theta^m < 1.$$

Поскольку $\theta > 1$, последнее неравенство противоречиво. Отсюда следует единственность представления числа α в виде ряда по убывающим степеням числа θ .

§1. Разложение целых чисел по одной мультипликативной системе чисел

Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $q_k \geq 2, r \geq 1$. Определим мультипликативную систему натуральных чисел $m_k, k \geq 0$, вида

$$m_0 = 1, m_k = m_{k-1} q_k, k \geq 1. \quad (1)$$

Покажем, что любое натуральное число $a \geq 1$ единственным образом представимо в виде

$$a = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k m_k, 0 \leq \bar{a}_k \leq q_k - 1,$$

где $\bar{a}_k$ — целые, а число определяется из условий $m_n \leq a < m_{n+1}$.

При $k \geq 0$ положим

$$\bar{a}_k = \left[\frac{a}{m_k} \right] - q_k \left[\frac{a}{m_{k+1}} \right].$$

Из неравенства $b - 1 < [b] \leq b$ имеем

$$-1 = \frac{a}{m_k} - 1 - q_k \frac{a}{m_{k+1}} < \bar{a}_k < \frac{a}{m_k} - q_k \left(\frac{a}{m_{k+1}} - 1 \right) = q_k,$$

т.е. $0 \leq \bar{a}_k \leq q_k$.

Найдем сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \bar{a}_k m_k &= \sum_{k=0}^n \left(\left[\frac{a}{m_k} \right] - q_k \left[\frac{a}{m_{k+1}} \right] \right) m_k = \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{a}{m_k} \right] m_k - \sum_{k=0}^n \left[\frac{a}{m_{k+1}} \right] m_{k+1} = [a] - m_{n+1} \left[\frac{a}{m_{n+1}} \right] = a. \end{aligned}$$

Докажем единственность такого представления. Предположим, что существуют два различных представления

$$a = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k m_k - \sum_{t=0}^l \bar{b}_t m_t, \quad 0 \leq \bar{a}_k, \bar{b}_k < q_k,$$

где a_0, b_0 могут принимать только два значения либо 0, либо 1.

Тогда, вычитая из одного представления другое, получим

$$\sum_{k=0}^s c_k m_k = 0, \quad c_k = a_k - b_k, \quad 0 \leq |c_k| \leq q_k - 1, \quad |c_s| \geq 1.$$

Следовательно,

$$m_s \leq |c_s| m_s = \left| \sum_{k=0}^{s-1} c_k m_k \right| \leq \sum_{k=0}^{s-1} (q_k - 1) m_k = \sum_{k=0}^{s-1} (m_{k+1} - m_k) = m_s - 1.$$

Последнее неравенство противоречиво. Значит, указанное представление числа a единственно.

§2. Разложение действительных чисел по мультипликативной системе чисел

Пусть a — любое действительное число из полуинтервала $[0, 1)$. Говорят, что a представимо в виде ряда

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{m_k}, \quad 0 \leq \bar{a}_k \leq q_k - 1, \quad (2)$$

где при $k \geq 0$ числа $\bar{a}_k$ — целые и $\bar{a}_0$ могут принимать два значения либо 0, либо 1, причем для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$a - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} < m_n^{-1}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Любое действительное число единственным образом представимо в виде (2) и (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим существование искомого представления числа a . Определим при $n \geq 1$ последовательность $\{x_n\}$. Положим

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} + \frac{x_n}{m_n}, \quad 0 \leq x_n < 1, \quad \bar{a}_0 = 0.$$

Для любого $n \geq 1$ находим

$$\frac{\bar{a}_n}{m_n} + \frac{x_n}{m_n} = \frac{x_{n-1}}{m_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = q_n x_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_n = [q_n x_{n-1}], x_n = \{q_n x_{n-1}\}.$$

Отсюда имеем

$$-1 \leq q_n x_{n-1} - 1 < \bar{a}_n \leq q_n x_{n-1} < q_n,$$

т.е. $\bar{a}_n$ может принимать целые значения от 0 до $q_n - 1$.

Теперь найдем сумму

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} = \sum_{k=1}^n \frac{[q_k x_{k-1}]}{m_k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{q_k x_{k-1} - \{q_k x_{k-1}\}}{m_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{k-1}}{m_{k-1}} - \frac{x_k}{m_k} \right) = a - \frac{x_n}{m_n}. \end{aligned}$$

Таким образом выполняется условие (3) и существование разложения числа a в ряд с условиями (2) и (3) установлено.

Докажем единственность представления числа a в виде (2) и (3). Будем рассуждать от противного. Предположим, что найдутся два различных представления

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{m_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_k}{m_k}$$

с условиями (2) и (3).

Найдется m такое, что

$$A_1 = B_1, \dots, A_{n-1} = B_{n-1}, A_n \neq B_n,$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k}, B_n = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{b}_k}{m_k}, \bar{a}_n \neq \bar{b}_n.$$

Из соотношений (2) получим

$$0 \leq a - A_n < m_n^{-1}, \quad 0 \leq a - B_n < m_n^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$0 \leq m_n(a - A_n) < 1, \quad 0 \leq m_n(a - B_n) < 1.$$

Следовательно, при $n > 1$ имеем

$$-1 < m_n(A_n - B_n) < 1, \quad -1 < m_n(A_{n-1} - B_{n-1}) + \frac{\bar{a}_n - \bar{b}_n}{m_n} = \frac{\bar{a}_n - \bar{b}_n}{m_n} < 1,$$

но

$$|\bar{a}_n - \bar{b}_n| = 1,$$

так как $\bar{a}_n \neq \bar{b}_n$. Из полученных противоречивых неравенств находим, что для любого $n \geq 1$ справедливы равенства $A_n = B_n$. Тем самым единственность представления (4) и (5) доказана.

Простейшей мультипликативной системой является “факториальная” система $m_n = (n-1)!$, $q_n = n, 0! = 1, n \geq 1$. Используя теорему 1 о единственности разложения числа по обратным значениям m_n , оценим x_n для числа e . Имеем

$$\frac{x_n}{n!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, 1 = \bar{\lambda}_k = [q_k x_{k-1}] = [k x_{k-1}],$$

$$1 \leq q_k x_{k-1} < 2, \frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{2}{n+1}.$$

Таким образом,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{x_n}{n!}, \frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{2}{n+1}.$$

Заметим, что известна более точная оценка сверху: $x_n < \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{1}{n}.$$

§3. Разложение целых чисел по последовательности Фибоначчи

Пусть задана последовательность чисел Фибоначчи

$$F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1} (k \geq 1),$$

или как функция своего номера

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}), \bar{\varphi} = 1 - \varphi. \end{aligned}$$

Возьмем любое натуральное число $a \geq 1$. Тогда найдется натуральное число n такое, что $F_n \leq a < F_{n+1}$, и набор $\{a_1, \dots, a_n\}$, состоящий из чисел 0 и 1, причем $a_n = 1, a_s \cdot a_{s+1} = 0$ для всех $s = 1, \dots, n-1$, такой, что имеет место единственное разложение вида

$$a = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n.$$

Действительно, положив $a_n = 1$, имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} a &= a_n F_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < F_n, \\ r_n &= a_{n-1} F_{n-1} + r_{n-1}, \quad 0 \leq r_{n-1} < F_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ r_2 &= a_1 F_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < F_1, \\ r_1 &= a_0 F_0. \end{aligned}$$

Имеем, что $0 \leq a_k \leq 1$ при $1 \leq k \leq n$, причем при $s = n-1, n-2, \dots, 1$ получим

$$a_s a_{s+1} = 0, a_n = 1.$$

Докажем теперь единственность такого представления. От противного. Предположим, что имеется два различных представления числа a в виде

$$a = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n = b_1 F_1 + b_2 F_2 + \dots + b_m F_m,$$

где $a_k, k \geq 1$, и $b_l, l \geq 1$, могут принимать только два значения 0 или 1.

Тогда

$$0 = a - a = \sum_{t=0}^s c_t F_t, c_t = a_t - b_t, |c_t| \leq 1, c_s \neq 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $c_s = 1$. Далее, поскольку $a_{s-1}a_s = 0$ и $b_{s-1}b_s = 0$, получим, что либо $c_{s-1} = 0$, либо $c_{s-1} = -1$. Отсюда находим цепочку эквивалентных неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1}) &= F_s \leq |c_s|F_s = \left| \sum_{t=0}^{s-1} c_t F_t \right| \leq \\ &\leq \sum_{t=0}^{s-2} F_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\varphi^s - 1}{\varphi - 1} - \frac{\bar{\varphi}^s - 1}{\bar{\varphi} - 1} \right); \\ \varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1} &\leq -\frac{\varphi^s - 1}{\bar{\varphi}} + \frac{\bar{\varphi}^s - 1}{\varphi}; \\ \varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1} &\leq \varphi^{s+1} + \varphi - \bar{\varphi}^{s+1} + \bar{\varphi}; \quad -1 \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречиво. Следовательно, единственность представления числа a в указанном виде доказана.

§4. Представление действительного числа в виде бесконечного ряда по обратным числам Фибоначчи

Будем говорить, что число $a \geq 0$ представимо в виде ряда

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, \quad (4)$$

где $a_0 = [a]$ — целая часть числа a , целые числа $\bar{\alpha}_k, k \geq 1$, могут принимать всего два значения 0 и 1, и, кроме того, для любого натурального n выполняется неравенство

$$0 \leq a - a_0 - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} < F_n^{-1}. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. Любое действительное число единственным образом представимо в виде (4) и (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала единственность представления a в виде (4) и (5). Предположим противное, т.е. найдутся, по крайней мере, два различных представления числа a с условиями (4) и (5):

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_k}{F_k}.$$

Поскольку эти представления различны, найдется m такое, что

$$A_1 = B_1, \dots, A_{m-1} = B_{m-1}, A_m \neq B_m,$$

где

$$A_m = a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, B_m = a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{\bar{\beta}_k}{F_k}, \bar{\alpha}_m \neq \bar{\beta}_m.$$

Из соотношений (4) получим

$$0 \leq a - A_m < F_m^{-1}, \quad 0 \leq a - B_m < F_m^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$0 \leq F_m(a - A_m) < 1, \quad 0 \leq F_m(a - B_m) < 1.$$

Следовательно,

$$-1 < F_m(A_m - B_m) < 1, \quad -1 < F_m(A_{m-1} - B_{m-1}) + \bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m = \bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m < 1,$$

но

$$|\bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m| = 1,$$

так как $\bar{\alpha}_m \neq \bar{\beta}_m$. Из полученных противоречивых неравенств находим, что для любого $m \geq 1$ справедливы равенства $A_m = B_m$. Тем самым единственность представления (4) и (5) доказана.

Теперь докажем существование представления числа a в виде (4) и (5). Определим “цифры” $\bar{\lambda}_k, k \geq 1$.

Положим $a_0 = [a]$

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} + \frac{x_n}{F_n}, \quad 0 \leq x_n < 1, \quad x_0 = \{a\}. \quad (6)$$

Отсюда находим $x_n + \bar{\lambda}_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}$, что дает возможность определить величины

$$\bar{\lambda}_n = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right], \quad x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\}.$$

Таким образом, $\bar{\lambda}_n, n > 1$ — целые, причем

$$-1 \leq \frac{F_n x_{n-1}}{F_{n-1}} - 1 < \bar{\lambda}_n \leq \frac{F_n x_{n-1}}{F_{n-1}} < \frac{F_n}{F_{n-1}} < 2,$$

т.е. $\bar{\lambda}_n$ может принимать только два значения: 0 и 1.

Вычислим сумму

$$\begin{aligned} A_n &= a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\left[\frac{F_k}{F_{k-1}} x_{k-1} \right]}{F_k} = \\ &= [a] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{k-1}}{F_{k-1}} - \frac{x_k}{F_k} \right) = [a] + \frac{x_0}{F_0} - \frac{x_n}{F_n} = a - \frac{x_n}{F_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется условие (5), что и завершает доказательство теоремы.

§5. Целочисленные рекуррентные соотношения и числа Пизо–Виджаярагхавана

Пусть $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая при $n \geq 0$ линейному рекуррентному соотношению с целыми постоянными коэффициентами

$$u_{n+r} = a_1 u_{n+r-1} + \dots + a_r u_n, \quad a_r \neq 0,$$

и пусть характеристический многочлен $f(x) = x^r - a_1 x^{r-1} - \dots - a_r$ рекуррентного соотношения имеет следующее разложение на линейные множители

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \dots (x - \alpha_s)^{e_s}, \quad e_1 + \dots + e_s = r.$$

Тогда u_n как функция от аргумента $n \geq 0$ имеет вид

$$u_n = \sum_{k=1}^s P_k(n) \alpha_k^n,$$

где степень многочлена $P_k(n)$ не превосходит $e_k - 1$, а его коэффициенты определяются начальным отрезком $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$ последовательности $\{u_n\}$.

Число $\alpha = \alpha_1 > 1$ называют числом Пизо–Виджаярагхавана (*PV*-число), если все его сопряженные, отличные от α , лежат внутри единичного круга $|z| < 1$. Предположим, что для любого $n \geq 1$ имеет место неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < \alpha$.

Покажем, что любое $a \in [0, 1)$ можно представить в виде

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{u_k}, 0 \leq \bar{a}_k < \alpha,$$

где $\bar{a}_k, k \geq 1$, — целые числа.

Положим

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{u_k} + \frac{x_n}{u_n}.$$

Тогда

$$a = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{a}_k}{u_k} + \frac{x_{n-1}}{u_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1},$$

$$\bar{a}_n = \left[\frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1} \right], x_n = \left\{ \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1} \right\}.$$

Следовательно,

$$-1 \leq \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1} - 1 < \bar{a}_n < \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1} < \alpha,$$

т.е. целые числа $\bar{a}_n$ могут принимать значения от 0 до $[\alpha]$.

Далее, поскольку

$$0 \leq a - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{u_k} = \frac{x_n}{u_n} < \frac{1}{u_n},$$

имеем, что

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{u_k}.$$

Единственность представления числа a в виде ряда по обратным значениям последовательности $\{u_n\}$ доказывается аналогично предыдущему.

2. Заключение

Построенные разложения действительных чисел в позиционной системе счисления, по мультипликативной системе натуральных чисел, по последовательности Фибоначчи, по целочисленной последовательности, обладающей рекуррентными соотношениями и связанной с числами Пизо–Виджаярагхавана, представляют интерес при изучении свойств арифметических функций и в анализе Фурье. В основе наших исследований лежат работы [1]–[15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k \theta$. // Acta math., 1914, **37**.
2. Borel E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. // Rend. Circolo math. Palermo, 1909, **27**.

3. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления// Изв. АН СССР, сер. матем (in Russian). 1959, **23** (Избр.тр. с.366-371).
4. Zeckendorf E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washigton. 1919. Ch.17.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2006. 640 с.
7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 212 с.
8. Холл М. Комбинаторика. — М.: Изд-во “Мир”. 1970. 424 с.
9. Бернулли Д.// Comment. Acad.Sci. Petrop., 1728, **3**, p. 85–100.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы, 3-е изд. Уч. пособие. — М.: Изд. дом “Вильямс”. 2000. 720 с.
11. de Moivre A.// Philos. Trans., 1722, **32**, p. 162–178.
12. Чебышев П. Л. Теория вероятностей. — Изд-во АН СССР. 1936, §23. с.143–147.
13. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.
14. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и приложения. — М.: Наука, 1987, 344 с.
15. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: ООО“Луч”, 2014, 224 с.
16. Ghyasi A. H. A generalization of the Gel’fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14**, No.3, p.370.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. (1914). The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., **37**.
2. Borel E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.// Rend. Circolo math. Palermo, **27**.
3. Gel’fond A. O. (1959). On one general property of numerical system// Izv. AN SSSR, Ser. math. (in Russian). **23** (Selected works. p.366-371).
4. Zeckendorf E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. (1919). History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washigton. Ch.17.
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. (2006). Lectures on mathematical analysis. — М.: Drofa. Pp. 640.
7. Cassels J. W. S. (1961). An introduction to Diophantine approximation. — Cambridge University Press. Pp.212.

8. Hall M., Jr. (1970). Combinatorial theory. — Waltham (Massachusetts)-Toronto-London: Blaisdell Publ. Comp. Pp. 424.
9. Bernoulli D. (1728). Combinatorial theory. // Comment. Acad. Sci. Petrop., **3**, p. 85–100.
10. Knuth D. E. (1998). The art computer programming. Fundamental algorithms. Third Ed. — Reading, Massachusetts-Harlow, England-Menlo Park, California-Berkley, California-Lon Mills, Ontario-Sidney-Bonn-Amsterdam-Tokyo-Mexico City: Addison Wesley Longman, Inc.. Pp. 720.
11. de Moivre A. (1922). // Philos. Trans., **32**, p. 162–178.
12. Chebyshev P. L. (1936). The theory of probabilities. — AN SSSR. §23. 143–147. (in Russian).
13. Landau E. (1947). Fundamentals of analysis. — M.: Inostr.literature.(in Russian).
14. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. (1987). Series and the Uolsh's transformations: the theory and applications. — M.: Nauka, pp. 344.(in Russian).
15. Mineev M. P., Chubarikov V. N. (2014). Lectures on arithmetical questions of cryptography. — M.: ООО“Luch”, pp. 224. (in Russian).
16. Ghyasi A. H. (2007). A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. **14**, No.3, p.370.

Получено 18.07.2022

Принято в печать 14.09.2022