

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49

## О решении модельного кинетического уравнения ES

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

**Гермидер Оксана Владимировна** — кандидат физико-математических наук, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (г. Архангельск).

*e-mail: o.germider@narfu.ru*

**Попов Василий Николаевич** — доктор физико-математических наук, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (г. Архангельск).

*e-mail: v.popov@narfu.ru*

## Аннотация

В статье описан метод нахождения решения линеаризованного эллипсоидально-статистического кинетического уравнения (ES) с однородным граничным условием на основе полиномиальной аппроксимации Чебышева в рамках задачи моделирования осевого течения разреженного газа в длинном канале. Канал образован из двух цилиндров, имеющих общую центральную ось. В качестве модели отражения молекул газа от цилиндров использовано диффузное отражение Максвелла. Течение газа обусловлено малым по абсолютной величине градиентом давления, направленным вдоль оси цилиндров. Проведен расчет массового потока газа в канале в зависимости от параметра разрежения и отношения радиусов цилиндров. Неизвестная функция, аппроксимирующая решение линеаризованного уравнения ES, представлена в виде частичной суммы разложения по многочленам Чебышева первого рода. Путем выбора узлов интерполирования и применения свойств конечных сумм многочленов Чебышева задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в этих узлах. Получены выражения массовой скорости газа в канале и потока массы газа через значения частичных сумм рядов многочленов Чебышева.

*Ключевые слова:* многочлены Чебышева первого рода, эллипсоидально-статистическое кинетическое уравнение, полиномиальная аппроксимация.

*Библиография:* 15 названий.

## Для цитирования:

О. В. Гермидер, В. Н. Попов. О решении модельного кинетического уравнения ES // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 37–49.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49

## On the solution of the model kinetic equation ES

O. V. Germider, V. N. Popov

**Germider Oksana Vladimirovna** — candidate of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk).

*e-mail: o.germider@narfu.ru*

**Popov Vasily Nikolaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk).

*e-mail: v.popov@narfu.ru*

## Abstract

The article describes a method for finding a solution to a linearized ellipsoidal-statistical kinetic equation (ES) with a homogeneous boundary condition based on the Chebyshev polynomial approximation in the framework of the problem of modeling the axial flow of a rarefied gas in a long channel. The channel is formed from two cylinders having a common central axis. Diffuse Maxwell reflection is used as a model for the reflection of gas molecules from cylinders. The gas flow is due to a small absolute value of the pressure gradient directed along the axis of the cylinders. The calculation of the mass flow of gas in the channel is carried out depending on the rarefaction parameter and the ratio of the radii of the cylinders. The unknown function approximating the solution of the linearized ES equation is represented as a partial sum of the expansion in Chebyshev polynomials of the first kind. By choosing interpolation nodes and applying the properties of finite sums of Chebyshev polynomials, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations with respect to the values of the desired function at these nodes. The expressions for the gas mass velocity in the channel and the gas mass flow are obtained in terms of the partial sums of the series of Chebyshev polynomials.

*Keywords:* Chebyshev polynomials of the first kind, ellipsoidal-statistical kinetic equation, polynomial approximation.

*Bibliography:* 15 titles.

## For citation:

O. V. Germider, V. N. Popov, 2022, “On the solution of the model kinetic equation ES”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 37–49.

## 1. Введение

В работе рассматривается модельное эллипсоидально-статистическое кинетическое уравнение [1], которое применяется в динамике разреженного газа, в частности, при описании процессов переноса газа в каналах микро- и нанoeлектронных систем [2]–[7]. В настоящее время для решения модельных кинетических уравнений широко применяются методы дискретных ординат и скоростей [3], [8], конечно-разностные методы [6], [7]. Однако при реализации данных методов возникает необходимость использовать достаточно подробную сетку [6], [7]. Последнее условие приводит к большому росту вычислительных затрат при расчете параметров течений газа в канале. Для уменьшения вычислительных затрат моделирования течения

газа в длинном концентрическом канале в настоящей работе предлагается метод, основанный на разложении искомой функции трех переменных в ряд по ортогональным многочленам Чебышева первого рода для каждой переменной. Выбор данной системы многочленов обусловлен устойчиво высокой скоростью равномерной сходимости разложения при увеличении порядка разложения [9], [10]. Получены выражения для частных производных функции и ее интегралов через коэффициенты частичной суммы ряда Чебышева. Краевая задача сведена к решению системы линейных уравнений, записанной в матричной форме, где в качестве узлов интерполирования выбраны точки экстремума и нули многочленов Чебышева. Вычисление коэффициентов разложения при этом выполнено с использованием свойств конечных сумм в этих точках. При таком подходе к построению решения не только минимизируется погрешность интерполирования, но и минимизируется влияние ошибок округления при вычислении значений искомой функции в узлах. Основной расчетной величиной является приведенный поток массы газа. Полученное для него выражение записывается через найденные значения функции в узлах.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим течение разреженного газа в длинном канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $R'_1$  и  $R'_2$  ( $R'_1 < R'_2$ ), под действием заданного градиента давления, направленного вдоль оси канала  $z'$ . Считаем, что цилиндры поддерживаются при постоянной температуре. Полагаем, что длина канала  $L' \gg D'_h$ , где  $D'_h = 2(R'_2 - R'_1)$  – гидравлический диаметр [8].

Состояние газа в точке  $\mathbf{r}'$  определяем функцией распределения молекул газа  $f'(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}$  – молекулярная скорость газа. В качестве масштабов длины, скорости, концентрации, температуры, функции распределения выберем соответственно величины:  $D'_h$ ,  $\beta^{-1/2}$ ,  $n'_0$ ,  $T'_0$ ,  $n'_0 \beta^{3/2}$ , где  $\beta = m'/(2k_B T'_0)$ ,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m'$  – масса молекул газа,  $n'_0$ ,  $T'_0$  – концентрация, температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат;  $p' = n'_0 k_B T'_0$ . Тогда для безразмерных величин имеем следующие соотношения

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{D'_h}, \quad R_1 = \frac{R'_1}{D'_h}, \quad R_2 = \frac{R'_2}{D'_h}, \quad f = \frac{f'}{n'_0 \beta^{3/2}},$$

$$\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \beta^{1/2} \mathbf{u}', \quad \mathbf{q} = \frac{\beta^{1/2}}{p'_0} \mathbf{q}', \quad n = \frac{n'}{n'_0}, \quad T = 1.$$

Считаем, что безразмерный градиент давления является малым по абсолютной величине, т.е.

$$G_p = \frac{dp}{dz}, \quad |G_p| \ll 1. \quad (1)$$

Учитывая, осесимметричный характер течения газа в канале, введем цилиндрические координаты  $\mathbf{r} = (\rho, r_\varphi, r_z)$  в конфигурационном пространстве и в пространстве скоростей  $\mathbf{C} = (C_\perp, C_\psi, C_z)$ . В линейном приближении имеем

$$p(z) = 1 + G_p z, \quad f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + G_p (z + h(\rho, \mathbf{C}))), \quad f_0(C) = \pi^{-3/2} \exp(-C^2),$$

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z h(\rho, \mathbf{C}) d^3 \mathbf{C}. \quad (2)$$

Основной расчетной величиной является приведенный поток массы газа

$$J_M = \frac{4}{(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} U_z(\rho) \rho d\rho. \quad (3)$$

Для нахождения  $h(\rho, \mathbf{C})$  используем уравнение ES [1]

$$\left( \frac{\partial h}{\partial \rho} \cos \psi - \frac{\partial h}{\partial \psi} \frac{\sin \psi}{\rho} \right) C_{\perp} + C_z + \text{Pr} \delta h(\rho, \mathbf{C}) = \frac{\text{Pr} \delta}{\pi^{3/2}} \int K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \exp(-C'^2) h(\rho, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}', \quad (4)$$

$$K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 2\mathbf{C}'\mathbf{C} + \frac{2}{3} \left( C'^2 - \frac{3}{2} \right) \left( C^2 - \frac{3}{2} \right) - \\ - 2(\text{Pr}^{-1} - 1) \sum_{i,j=1}^3 \left( C'_i C'_j - \frac{1}{3} C'^2 \delta_{ij} \right) \left( C_i C_j - \frac{1}{3} C^2 \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

где  $\delta$  – параметр разрежения газа,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\text{Pr}$  – число Прандтля, которое для одноатомного газа равно  $2/3$ . В частном случае  $\text{Pr} = 1$  модель ES сводится к модели Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК, BGK) [11].

Умножим левую и правую части уравнения (2) на  $\pi^{-1/2} C_z \exp(-C_z^2)$  и проинтегрируем по  $C_z$ .

Введем обозначение

$$Z_i(\rho, \zeta_i, C_{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C_z^2) C_z h(\rho, \mathbf{C}) dC_z, \quad (6)$$

где  $\zeta_i = \cos \psi_i$ ,  $\psi_1 \in [0, \pi]$  и  $\psi_2 = 2\pi - \psi_1$ , записываем выражение (2) через  $Z_i(\rho, \zeta_i, C_{\perp})$  ( $i = 1, 2$ )

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_{\perp}^2) C_{\perp} \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} Z_i(\rho, C_{\perp}, \zeta_i) d\zeta_i dC_{\perp}. \quad (7)$$

При  $\psi = \psi_1$  уравнение (4) имеет вид

$$\left( \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} \zeta_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial \zeta_1} \frac{1 - \zeta_1^2}{\rho} \right) C_{\perp} + \frac{1}{2} + \text{Pr} \delta Z_1(\rho, \zeta_1, C_{\perp}) = \\ = \text{Pr} \delta \left( U_z(\rho) + \zeta_1 C_{\perp} \sigma_1(\rho) + \sqrt{1 - \zeta_1^2} C_{\perp} \sigma_2(\rho) \right), \quad (8)$$

при  $\psi = \psi_2$

$$\left( \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} \zeta_2 + \frac{\partial Z_2}{\partial \zeta_2} \frac{1 - \zeta_2^2}{\rho} \right) C_{\perp} + \frac{1}{2} + \text{Pr} \delta Z_2(\rho, \zeta_2, C_{\perp}) = \\ = \text{Pr} \delta \left( U_z(\rho) + \zeta_2 C_{\perp} \sigma_1(\rho) - \sqrt{1 - \zeta_2^2} C_{\perp} \sigma_2(\rho) \right). \quad (9)$$

Здесь

$$\sigma_1(\rho) = \frac{1 - \text{Pr}^{-1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_{\perp}^2) C_{\perp}^2 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} Z_i(\rho, C_{\perp}, \zeta_i) d\zeta_i dC_{\perp}, \quad (10)$$

$$\sigma_2(\rho) = \frac{1 - \text{Pr}^{-1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_{\perp}^2) C_{\perp}^2 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 (-1)^{i+1} Z_i(\rho, C_{\perp}, \zeta_i) d\zeta_i dC_{\perp}. \quad (11)$$

Учитывая, что  $\zeta_2 = \zeta_1$ , перепишем уравнение (9) и функции (7), (10) и (11) в виде

$$\left( \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} \zeta_1 + \frac{\partial Z_2}{\partial \zeta_1} \frac{1 - \zeta_1^2}{\rho} \right) C_\perp + \frac{1}{2} + \text{Pr} \delta Z_2(\rho, \zeta_1, C_\perp) = \\ = \text{Pr} \delta \left( U_z(\rho) + \zeta_1 C_\perp \sigma_1(\rho) - \sqrt{1 - \zeta_1^2} C_\perp \sigma_2(\rho) \right), \quad (12)$$

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) C_\perp \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} Z_i(\rho, \zeta_i, C_\perp) d\zeta_i dC_\perp, \quad (13)$$

$$\sigma_1(\rho) = \frac{1 - \text{Pr}^{-1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) C_\perp^2 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} Z_i(\rho, \zeta_i, C_\perp) d\zeta_i dC_\perp, \quad (14)$$

$$\sigma_2(\rho) = \frac{1 - \text{Pr}^{-1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) C_\perp^2 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 (-1)^{i+1} Z_i(\rho, \zeta_i, C_\perp) d\zeta_i dC_\perp. \quad (15)$$

Пусть  $Z(\rho, \zeta, C_\perp) = Z_1(\rho, \zeta_1, C_\perp) + Z_2(\rho, \zeta_1, C_\perp)$  и  $\zeta = \zeta_1$ . Тогда

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) C_\perp \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} Z(\rho, \zeta, C_\perp) d\zeta dC_\perp. \quad (16)$$

Складывая левые и правые части уравнений (9) и (12), получаем

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial \rho} \zeta + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \frac{1 - \zeta^2}{\rho} \right) C_\perp + 1 + \text{Pr} \delta Z(\rho, \zeta, C_\perp) = 2 \text{Pr} \delta (U_z(\rho) + \zeta C_\perp \sigma(\rho)), \quad (17)$$

где

$$\sigma(\rho) = \sigma_1(\rho) = \frac{1 - \text{Pr}^{-1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-C_\perp^2) C_\perp^2 \int_{-1}^1 \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} Z(\rho, \zeta, C_\perp) d\zeta dC_\perp. \quad (18)$$

В качестве граничного условия на цилиндрах используем модель диффузного отражения Максвелла [12]. В этом случае

$$Z(R_i, \zeta, C_\perp) = 0, \quad (-1)^i \zeta < 0. \quad (19)$$

Таким образом, определение безразмерной массовой скорости газа  $U_z$  согласно (16) и вычисление потока массы газа в канале  $J_M$  по формуле (3) сводится к решению уравнения (17) с граничным условием (19).

### 3. Решение краевой задачи

Представляем  $Z(\rho, \zeta, C_\perp)$ , где  $\rho \in [R_1, R_2]$ ,  $\zeta \in [-1, 1]$  и  $C_\perp \in [0, +\infty)$ , в виде частичной суммы ряда полиномов Чебышева первого рода  $\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i), (j_i = \overline{0, n_i})\}$  [13], [14] для каждой переменной  $x_i \in [-1, 1]$  ( $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ):

$$x_1 = \frac{2\rho - R_2 - R_1}{R_2 - R_1}, \quad x_2 = \zeta, \quad x_3 = \frac{C_\perp - 1}{C_\perp + 1}. \quad (20)$$

В результате

$$Z(\rho, \zeta, C_{\perp}) = \sum_{\substack{k_i=0 \\ i=1,3}}^{n_i} a_{k_1 k_2 k_3} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) T_{k_3}(x_3) = \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \otimes \mathbf{T}_3(x_3) \mathbf{A}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{T}_i$  – матрица-строка размером  $1 \times n'_i$  ( $n'_i = n_i + 1$ ,  $i = \overline{1,3}$ ):

$$\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) T_1(x_i) \dots T_{n_i-1}(x_i) T_{n_i}(x_i)), \quad (22)$$

с помощью  $\otimes$  обозначается операция умножения Кронекера двух матриц,  $\mathbf{A}$  – матрица-столбец, имеющая размер  $n'_1 n'_2 n'_3 \times 1$  и составленная из коэффициентов  $a_{k_1 k_2 k_3}$ ;

$$\mathbf{A} = (a_{000} a_{001} \dots a_{n_1 n_2 n_3-1} a_{n_1 n_2 n_3})^T. \quad (23)$$

Получим выражения для производных от полиномов Чебышева. Учитывая, что из определения полинома Чебышева нулевой степени  $T_0(x_i) = 1$  вытекает

$$\frac{dT_0(x_i)}{dx_i} = 0,$$

а для производной от полинома Чебышева степени  $j_i > 0$  выполняется соотношение [13]

$$\frac{dT_{j_i}(x_i)}{dx_i} = 2j_i \sum_{\substack{k_i=0 \\ j_i-k_i-\text{нечет.}}}^{j_i-1} T_{k_i}(x_i), \quad i = 1, 2,$$

где под  $\sum'$  понимаем сумму, в которой первое слагаемое умножается на  $1/2$ , имеем

$$\frac{d\mathbf{T}_i}{dx_i} = \mathbf{D}_i \mathbf{T}_i, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

где  $\mathbf{D}_i$  – верхняя треугольная матрица размером  $n'_i \times n'_i$

$$D_{i,j_1 j_2} = \begin{cases} j_2, & j_1 = 0, \quad j_2 \text{ нечет.} \\ 2j_2 & j_1 > 0, \quad j_2 - j_1 > 0, \quad j_2 - j_1 \text{ нечет.} \end{cases} \quad (25)$$

Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов матриц начинаем с нуля.

Для вычисления интегралов (16) и (17) по переменной  $\zeta = x_2$  используем условие ортогональности полиномов Чебышева [13]

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_i(x_2) T_j(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = \delta_{i,j} \gamma'_i, \quad (26)$$

где  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера,

$$\gamma'_i = \begin{cases} 2, & i = 0, \\ 1 & i > 0. \end{cases}$$

Для вычисления интегралов (16) и (18) по переменной  $C_{\perp}$  применяем метод Clenshaw-Curtis [15], записывая эти интегралы в виде

$$\begin{aligned} P_{1+i,k_3} &= \int_0^{+\infty} \exp(-C_{\perp}^2) C_{\perp}^i T_{k_3}(x_3) dC_{\perp} = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{(1+x_3)^i}{(1-x_3)^{i+2}} \exp\left(-\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_3)^2}\right) T_{k_3}(x_3) dx_3, \quad i = 1, 2, \quad k_3 = \overline{0, n_3}. \end{aligned} \quad (27)$$

На основе (26) в (27) для (16) и (18) имеем

$$2U_z = \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_2 \mathbf{A}, \quad (28)$$

$$2\sigma_z = (1 - \text{Pr}^{-1}) \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_3 \mathbf{A}, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{P}_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x^i}{\sqrt{1-x_2^2}} \mathbf{T}_2(x_2) dx_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}} T_i(x_2) \mathbf{T}_2(x_2) dx_2 = (2\delta_{0i}, \delta_{1i}, 0 \dots 0, 0), \quad i = 0, 1,$$

а элементы матриц-строк  $\mathbf{P}_2$  и  $\mathbf{P}_3$  определяются (27).

Выражая переменные  $\rho$ ,  $\zeta$  и  $C_\perp$  из (28) через  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , записываем интегро-дифференциальное уравнение (17) и граничное условие (19) в матричной форме. Подставляя (21), (28) и (29) в (17) и (19) и учитывая (24), получаем

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{A} = -1, \quad (30)$$

$$\mathbf{T}_1(\pm 1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{T}_3(x_3) \mathbf{A} = 0, \quad \pm x_2 < 0, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = & \frac{4(1+x_3)}{1-x_3} (x_2 \mathbf{T}_1(x_1) \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{T}_2(x_2) + \\ & + \frac{(1-x_2^2)}{x_1 + 2(R_2 - R_1)} \mathbf{T}_1(x_1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{D}_2)) \otimes \mathbf{T}_3(x_3) + \\ & + \text{Pr} \delta \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \left( \mathbf{T}_2(x_2) \otimes \mathbf{T}_3(x_3) - \mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_2 - \frac{(1 - \text{Pr}^{-1}) x_2 (1 + x_3)}{1 - x_3} \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_3 \right), \end{aligned} \quad (32)$$

В качестве узлов интерполирования в (30) для  $x_1$  выберем точки экстремума многочлена  $T_{n_1}(x_1)$  на отрезке  $[-1; 1]$ , для  $x_2$  и для  $x_3$  — корни  $T_{n'_2}(x_2)$  и  $T_{n'_3}(x_3)$  на этом отрезке:

$$x_{1,k_1} = \cos \left( \frac{\pi(n_1 - k_1)}{n_1} \right), \quad k_1 = \overline{0, n_1}, \quad (33)$$

$$x_{i,k_i} = \cos \left( \frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)} \right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 2, 3. \quad (34)$$

Подставляя (33) и (34) в (17), приходим к системе линейных  $n'_1 n'_2 n'_3$ -уравнений, в которой, полагая, что  $n_2$  — нечетное число, вместо уравнений в узлах  $x_{1,0}$ ,  $x_{2,k_2}$  ( $k_2 = \overline{n'_2/2, n_2}$ ) записываем уравнения (31):

$$\mathbf{T}_1(-1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3}) \mathbf{A} = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}. \quad (35)$$

Аналогично, исключая уравнения в точках  $x_{1,n_1}$ ,  $x_{2,k_2}$  ( $k_2 = \overline{0, n'_2/2 - 1}$ ), заменяем их на

$$\mathbf{T}_1(1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3}) \mathbf{A} = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}. \quad (36)$$

В результате система линейных  $n'_1 n'_2 n'_3$ -уравнений записывается в матричной форме

$$\mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{K}$  – квадратная матрица размера  $n'_1 n'_2 n'_3 \times n'_1 n'_2 n'_3$ , в которой строки с индексами  $j_1 = k_2 n'_3 + k_3$  ( $k_2 = \overline{n'_2/2, n_2}$ ,  $k_3 = \overline{0, n_3}$ ):  $\mathbf{K}_{j_1} = \mathbf{T}_1(-1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3})$ , с индексами  $j_2 = n_1 n'_2 n'_3 + k_2 n'_3 + k_3$  ( $k_2 = \overline{0, n'_2/2 - 1}$ ,  $k_3 = \overline{0, n_3}$ ):  $\mathbf{K}_{j_2} = \mathbf{T}_1(1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3})$ , для остальных строк этой матрицы  $\mathbf{K}_j = \mathbf{B}(x_{1,k_1}, x_{1,k_2}, x_{1,k_3})$ ,  $F$  – матрица-столбец размера  $n'_1 n'_2 n'_3 \times 1$  единичными элементами за исключением  $F_{j_1} = F_{j_2} = 0$ .

Используя обозначение

$$\mathbf{Z} = (Z_{000}, Z_{001} \dots Z_{n_1 n_2 n_3 - 1} Z_{n_1 n_2 n_3})^T, \quad Z_{k_1 k_2 k_3} = Z(\rho_{k_1}, C_{\perp, k_2}, \zeta_{k_3}),$$

получаем выражение для коэффициентов в (21) через значения функции  $Z$  в узлах (33) и (34):

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_1^{-1} \otimes \mathbf{H}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{Z}, \quad (38)$$

где  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{G}_1$  – квадратные матрицы с элементами  $J_{k_1, j_1} = T_{j_1}(x_{1, k_1})$ ,  $H_{k_2, j_2} = T_{j_2}(x_{2, k_2})$ ,  $G_{k_3, j_3} = T_{j_3}(x_{3, k_3})$ ,  $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$ ,  $i = 1, 3$ .

Найдем обратные матрицы  $\mathbf{J}_1^{-1}$ ,  $\mathbf{H}_1^{-1}$  и  $\mathbf{G}_1^{-1}$ . Для этого рассмотрим суммы

$$g_1(j, l) = \frac{2}{n_1} \sum_{k=0}^{n_1}{}'' T_k(x_{1, j}) T_k(x_{1, l}), \quad j, l = \overline{0, n_1}, \quad (39)$$

$$g_i(j, l) = \frac{2}{n_i + 1} \sum_{k=0}^{n_i}{}' T_k(x_{i, j}) T_k(x_{i, l}), \quad j, l = \overline{0, n_i}, \quad i = 2, 3, \quad (40)$$

где двойной штрих у знака суммы (39) означает, что первое и последнее слагаемое умножается на  $1/2$ .

Подставляя (33) и (34) в  $T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$ , ( $j_i = \overline{0, n_i}$ ), имеем

$$T_{k_1}(x_{1, j_1}) = \cos\left(\frac{\pi k_1(n_1 - j_1)}{n_1}\right), \quad j_1, k_1 = \overline{0, n_1}, \quad (41)$$

$$T_{k_i}(x_{i, j_i}) = \cos\left(\frac{\pi k_i(2n_i - 2j_i + 1)}{2n'_i}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 2, 3. \quad (42)$$

Учитывая, что

$$s_n(j) = 2 \sum_{k=0}^n{}'' \cos(jk\pi) = \begin{cases} n, & j = 0, 2 \\ \frac{\sin(j\pi) \sin(jn\pi)}{1 - \cos(j\pi)}, & 0 < j < 2, \end{cases}$$

и подставляя соответственно (41) и (42) в (39) и (40), получаем

$$n_1 g_1(l_1, j_1) = s_{n_1}\left(\frac{l_1 - j_1}{n_1}\right) + s_{n_1}\left(2 - \frac{l_1 + j_1}{n_1}\right),$$

$$n'_i g_i(l_i, j_i) = s_{n'_i}\left(\frac{l_i - j_i}{n'_i}\right) + s_{n'_i}\left(\frac{2n_i - (l_i + j_i) + 1}{n'_i}\right) - \\ - (\cos(\pi(l_i - j_i)) + \cos(\pi(2n_i - (l_i + j_i) + 1))),$$

$$g_1(l_1, j_1) = \begin{cases} \frac{s_{n_1}(0) + s_{n_1}(2)}{n_1} = 2, & l_1 = j_1 = 0, \\ \frac{s_{n_1}(0)}{n_1} = 1, & 0 < l_1 = j_1 < n_1, \\ 0, & l_1 \neq j_1, \\ \frac{2s_{n_1}(0)}{n_1} = 2, & l_1 = j_1 = n_1, \end{cases} \quad (43)$$



$$g_i(l_i, j_i) = \begin{cases} \frac{s_{n'_i}(0)}{n'_i} = 1, & 0 \leq l_i = j_i \leq n_i, \\ 0, & l_i \neq j_i, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (44)$$

Из (43) и (44) следует, что обратные матрицы  $\mathbf{J}_1^{-1} = 2(\mathbf{J}_1^T)''/n_1$ ,  $\mathbf{H}_1^{-1} = 2(\mathbf{H}_1^T)'/n'_2$  и  $\mathbf{G}_1^{-1} = 2(\mathbf{G}_1^T)'/n'_3$ , где верхний индекс  $T$  у матриц  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{G}_1$  обозначает операцию транспонирования, а одиночный штрих у матриц  $\mathbf{H}_1^T$  и  $\mathbf{G}_1^T$  – умножение их строк с нулевым индексом на  $1/2$ , двойной штрих у матрицы  $\mathbf{J}_1^T$  – умножение строк и столбцов с индексами  $0$ ,  $n_1$  этой матрицы также на  $1/2$ .

Используя (38), приходим к уравнению относительно  $\mathbf{Z}$ ,

$$\mathbf{WZ} = \mathbf{F}, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{K}(\mathbf{J}_1^{-1} \otimes \mathbf{H}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_1^{-1}) = 4\mathbf{W}_1 + \delta\text{Pr}\mathbf{I} - \delta\text{Pr}(\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3), \\ \mathbf{W}_1 &= \mathbf{E}_{\mathbf{JH}} \circ (\mathbf{J}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{J}_1^{-1} \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{d},2} + \mathbf{I}_{\mathbf{d},1} \otimes (\mathbf{H}_2 \circ \mathbf{H}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{H}_1^{-1})) \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{d},3}, \\ \mathbf{W}_2 &= \mathbf{E}_{\mathbf{JH}} \circ (\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{H}_3) \otimes \mathbf{G}_2, \\ \mathbf{W}_3 &= \mathbf{E}_{\mathbf{JH}} \circ (\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{H}_4) \otimes \mathbf{G}_3, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}$  – единичные матрицы размерами  $n'_1 \times n'_1$  и  $n'_1 n'_2 n'_3 \times n'_1 n'_2 n'_3$ , соответственно;  $\mathbf{I}_{\mathbf{d},1}$ ,  $\mathbf{I}_{\mathbf{d},2}$  и  $\mathbf{I}_{\mathbf{d},3}$  – диагональные матрицы:

$$I_{d,1,k_1,k_1} = \frac{1}{x_{1,k_1} + 2(R_2 - R_1)}, \quad I_{d,2,k_2,k_2} = x_{2,k_2}, \quad I_{d,3,k_3,k_3} = \frac{1 + x_{3,k_3}}{1 - x_{3,k_3}}, \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = \overline{1, 3};$$

$\mathbf{E}_{\mathbf{JH}}$  – квадратная матрица размером  $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$ , все элементы которой равны 1, за исключением нулевых строк с индексами  $k$  ( $k = n'_2/2, n_2$ ) и  $n_1 n'_2 + k$  ( $k = 0, n'_2/2 - 1$ ;  $\mathbf{H}_2$  – квадратная матрица размером  $n'_2 \times n'_2$  с равными столбцами  $j$ :  $H_{2,k,j} = 1 - x_{2,k}^2$  ( $j, k = \overline{0, n_2}$ ),  $\mathbf{H}_3$  – квадратная матрица ( $n'_2 \times n'_2$ ), все элементы которой равны 1, матрица  $\mathbf{G}_2$  ( $n'_3 \times n'_3$ ) имеет равные строки  $\mathbf{P}_2 \mathbf{G}_1^{-1}$ ;  $\mathbf{H}_4 = \mathbf{V}_2 (\mathbf{H}_1^{-1})_1$ ,  $\mathbf{V}_i$  – матрица-столбец с элементами  $V_{i,k_i} = I_{d,i,k_i,k_i}$  ( $i = 2, 3$ ),  $(\mathbf{H}_1^{-1})_1$  – матрица, которая является первой строкой  $\mathbf{H}_1^{-1}$  при нумерации от нуля,  $\mathbf{G}_3 = \mathbf{V}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{G}_1^{-1}$ . Отметим, что применение выражения (38) для коэффициентов в (21) через значения функции  $Z$  в узлах (33) и (34) со свойством произведения Кронекера позволяет получить диагональные матрицы  $\mathbf{I}_{\mathbf{d},1}$ ,  $\mathbf{I}_{\mathbf{d},2}$  и  $\mathbf{I}_{\mathbf{d},3}$ .

Решение уравнения (45) находим  $LU$ -методом. Зная элементы матрицы  $\mathbf{Z}$ , восстанавливаем  $U_z(\rho)$ :

$$2U_z(\rho) = \mathbf{T}_1 \left( \frac{2\rho - R_2 - R_1}{R_2 - R_1} \right) \mathbf{J}_1^{-1} \otimes \mathbf{H}_{30} \otimes \mathbf{G}_{20} \otimes \mathbf{Z}, \quad (46)$$

где  $\mathbf{H}_{30}$  и  $\otimes \mathbf{G}_{20}$  – матрицы, которые являются соответственно сроками  $\mathbf{H}_3$  и  $\otimes \mathbf{G}_2$  с индексом  $0$ .

Подставляя (46) в (3), имеем

$$J_M = \mathbf{P}_4 \mathbf{J}_1^{-1} \otimes \mathbf{H}_{30} \otimes \mathbf{G}_{20} \mathbf{Z}, \quad (47)$$

$$\mathbf{P}_4 = \int_{-1}^1 \mathbf{T}_1(x_1) \left( x_1 \frac{1-R}{1+R} + 1 \right) dx_1, \quad R = \frac{R_1}{R_2}.$$

Учитывая, что [15]

$$2x_1 T_i(x_1) = T_{i+1}(x_1) + T_{|i-1|}(x_1), \quad \int_{-1}^1 T_i(x_1) dx_1 = \begin{cases} \frac{2}{1-i^2}, & i - \text{чет.}, \\ 0, & i - \text{нечет.} \end{cases} \quad (48)$$

приходим к следующим выражениям для элементов матрицы-строки  $\mathbf{P}_4$ :

$$\mathbf{P}_4 = \begin{cases} \frac{2}{1-i^2}, & i - \text{чет.}, \\ \frac{1-R}{1+R} \left( \frac{1}{1-(i-1)^2} + \frac{1}{1-(i+1)^2} \right), & i - \text{нечет.} \end{cases} \quad (49)$$

#### 4. Анализ результатов

Для проверки адекватности полученных результатов (47) проведем сравнение с аналогичными результатами, представленными в [8] для случая  $\text{Pr} = 1$ . Расчеты проводились с использованием системы компьютерной алгебры Maple. На рис. 1 показано относительное отклонение  $d_r$  величины приведенного потока массы газа, рассчитанного по формуле (47) с использованием найденных значений элементов матрицы  $\mathbf{Z}$  при  $n_i = 15$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), от его величины, полученной в [8] на основе решения уравнения БГК методом дискретных скоростей. Интерполирование  $d_r$  выполнено с применением кубического сплайна по точкам, которые отмечены на этом рисунке. Видно, что результаты настоящей работы в целом хорошо согласуются с результатами из [8]. С увеличением значений параметра разреженности  $\delta$  происходит уменьшение относительного отклонения  $d_r$ .

На рис. 2 представлены результаты вычислений относительного отклонения  $d_r$  величины  $J_M$  при  $\text{Pr} = 2/3$  от его величины при  $\text{Pr} = 1$ . Расчеты выполнены по формуле (47) при  $n_i = 15$  ( $i = \overline{1, 3}$ ).

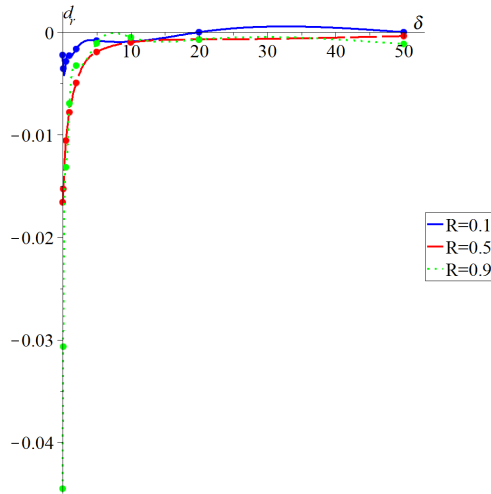


Рис. 1: Относительное отклонение  $d_r$  величины  $J_M$  при  $\text{Pr} = 1$

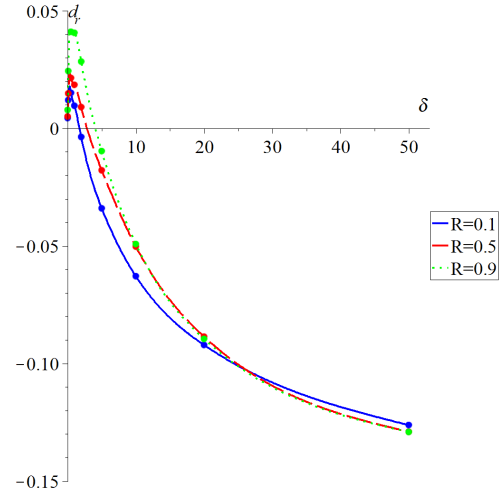


Рис. 2: Относительное отклонение  $d_r$  величины  $J_M$  при  $\text{Pr} = 2/3$  от значения  $J_M$  при  $\text{Pr} = 1$

Представленные результаты тестовых расчетов показывают, что предложенный метод решения модельного кинетического уравнения ES, обеспечивает хорошую точность счета в широком диапазоне изменения параметра разреженности  $\delta$  для различных значений отношения радиусов цилиндров.

Рис. 3 и 4 иллюстрируют сходимость результатов вычислений, соответственно при  $\text{Pr} = 1$  и  $\text{Pr} = 2/3$ . Количество узлов, которое использовано, составляет  $n_i = 15$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) и  $n_i = 7$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) для каждого рассматриваемого случая.

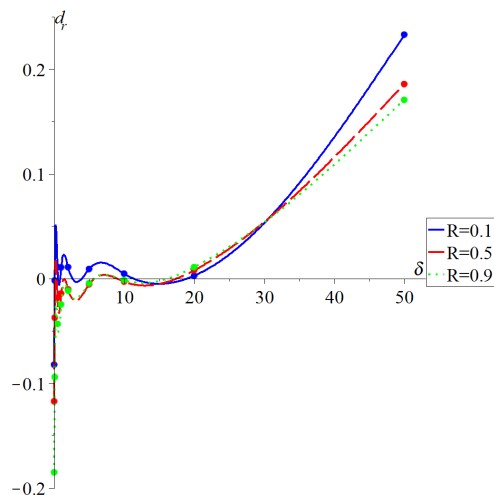


Рис. 3: Относительное отклонение  $d_r$  величины  $J_M$  при  $n_i = 7$  от значений  $J_M$  при  $n_i = 15$  ( $i = \overline{1,3}$ ) для  $Pr = 1$

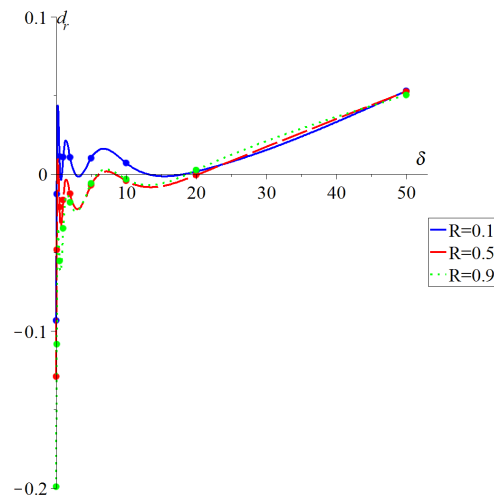


Рис. 4: Относительное отклонение  $d_r$  величины  $J_M$  при  $n_i = 7$  от значений  $J_M$  при  $n_i = 15$  ( $i = \overline{1,3}$ ) для  $Pr = 2/3$

## 5. Заключение

Методом полиномиальной аппроксимации Чебышева получено решение эллипсоидально-статистического кинетического уравнения в рамках задачи об изотермическом течении разреженного газа в длинном канале, образованном двумя цилиндрами, при полной аккомодации молекул газа на стенках этого канала. Реализация метода выполнена с использованием свойств сумм многочленов Чебышева в точках экстремума и нулей этих многочленов. Вычислены значения массового потока газа для широкого диапазона изменения значений параметра разрежения. Показано, что применение многочленов Чебышева при исследовании течений газа дает возможность эффективно находить интегральные характеристики этих течений с последующим их анализом.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Holway L.H. New statistical models for kinetic theory: Methods of construction // Physics of Fluids. 1966. Vol.9. P. 1658-1673.
2. Andries P., Bourgat J-F., Le Tallec P., Perthame B. Numerical comparison between the Boltzmann and ES-BGK models for rarefied gases // Comput Methods Appl Mech Eng. 2002. Vol. 191, № 31. P. 3369-3390.
3. Graur I.A., Polikarpov A.P. Comparison of different kinetic models for the heat transfer problem // Heat Mass Transfer. 2009. Vol. 46, № 2. P. 237-244.
4. Belyi V.V. Derivation of model kinetic equation // Europhysics Letters. 2015. Vol. 111. P. 40011.
5. Chen S., Xu K., Cai Q., A comparison and unification of ellipsoidal statistical and Shakhov BGK models // Adv. Appl. Math. Mech. 2015. Vol. 7. P. 245-266.

6. Ambrus V. E., Sharipov F., Sofonea V. Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio-based particle interactions // *Computers and Fluids*. 2020. Vol. 211. P. 104637
7. Фролова А.А., Титарев В.А. Кинетические методы решения нестационарных задач со струйными течениями // *Математика и математическое моделирование*. 2019. Vol. 4. P. 34-51.
8. Breyiannis G., Varoutis S., Valougeorgis D. Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2008. Vol. 27. P. 609-622.
9. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. Vol. 322. P. 55-65.
10. Шильков А.В. Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2018. № 249. 28 с.
11. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A. Model for collision process in gases // *Physical Review*. 1954. Vol. 94. P. 511-525.
12. Cercignani C. *Mathematical Methods in Kinetic Theory*. – New York: Plenum Press, 1969. – 227 p.
13. Mason J., Handscomb D. *Chebyshev polynomials*. – Florida: CRC Press, 2003. – 360 p.
14. Boyd J. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, second ed. – New York: Dover, 2000. – 668 p.
15. Clenshaw C. W., Curtis A. R. A method for numerical integration on an automatic computer // *Num. Math.* 1960. Vol. 2, P. 197-205.

## REFERENCES

1. Holway, L.H., 1966, “New statistical models for kinetic theory: Methods of construction“, *Physics of Fluids*, vol.9, pp. 1658-1673.
2. Andries, P., Bourgat, J-F., Le Tallec, P. & Perthame, B., 2002, “Numerical comparison between the Boltzmann and ES-BGK models for rarefied gases“, *Comput Methods Appl Mech Eng.*, vol. 191, no. 31. pp. 3369-3390.
3. Graur, I.A. & Polikarpov, A.P., 2009, “Comparison of different kinetic models for the heat transfer problem“, *Heat Mass Transfer*, vol. 46, no. 2. pp. 237-244.
4. Belyi, V.V., 2015, “Derivation of model kinetic equation“, *Europhysics Letters*, vol. 111, pp. 40011.
5. Chen, S., Xu K. & Cai, Q., 2015, “A comparison and unification of ellipsoidal statistical and Shakhov BGK models“, *Adv. Appl. Math. Mech.*, vol. 7. pp. 245-266.
6. Ambrus, V. E., Sharipov, F. & Sofonea, V., 2020, “Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio-based particle interactions“, *Computers and Fluids*, vol. 211. pp. 104637

7. Titarev V.A. & Frolova A.A., 2019, “Kinetic methods for solving unsteady problems“, *Mathematics and Mathematical Modeling*, no. 04. pp. 34–51.
8. Breyiannis, G., Varoutis, S. & Valougeorgis, D., 2008, “Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter“, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 27, pp. 609-622.
9. Baseri, A., Abbasbandy, S. & Babolian, E., 2018, “A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions“, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 322, pp. 55-65.
10. Shilkov, A.V., 2018, “Operator decomposition Scattering of the Particle Transport Equation in a Series in Spherical Tensors“, *Keldysh Institute Preprints named after M.V. Keldysh* no. 249, 28 pp. (Russian).
11. Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. & Krook, M. A., 1954, “Model for collision process in gases“, *Physical Review*, vol. 94, pp. 511-525.
12. Cercignani, C. 1969, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum Press, New York, 227 p.
13. Mason, J. & Handscomb, D. 2003, *Chebyshev polynomials*, CRC Press, Florida, 360 p.
14. Boyd, J. 2000, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, second ed., Dover, New York, 668 p.
15. Clenshaw, C.W. & Curtis, A.R. 1960, “A method for numerical integration on an automatic computer“, *Num. Math.*, vol. 2, pp. 197-205.

Получено 10.01.2022

Принято в печать 14.0.2022