

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 512.548

ПЕРИОДИЧНОСТЬ В АБЕЛЕВЫХ n -АРНЫХ ГРУППАХ

Н. А. Щучкин (г. Волгоград)

Аннотация

В работе доказано, что всякая периодическая абелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых n -арных групп, относящихся к различным простым числам.

Ключевые слова: абелева n -арная группа, периодичность, прямое произведение.

PERIODICITY IN ABELIAN n -ARY GROUPS

N. A. Shchuchkin (c. Volgograd)

Abstract

It is proved that every periodic abelian n -ary group is isomorphic to the direct product of primary abelian n -ary groups belonging to different primes.

Key words: abelian n -ary group, periodicity, direct.

В этой статье продолжается изучение периодичности в абелевых n -арных группах, начатое в [1]. Алгебру $\langle G, f \rangle$ с n -арной операцией f ($n \geq 3$) называют n -арной полугруппой, если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}) = f(a_1^i, f(a_{i+1}^{i+n}), a_{i+n+1}^{2n-1})$$

для всех $i = 1, \dots, n-1$. Мы будем использовать стандартные обозначения

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \dots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n)$$

всякий раз, когда $x_{k+1} = \dots = x_{k+s} = x$ (x_i^j - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ). В n -арной полугруппе $\langle G, f \rangle$ определяют новую $(k(n-1)+1)$ -арную операцию $f_{(k)}$ по правилу

$$f_{(k)}(x_1^{k(n-1)+1}) = \underbrace{f(f(\dots f(f(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}) \dots), x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1})}_{k \text{ times}}.$$

Если в n -арной полугруппе $\langle G, f \rangle$ разрешимы и имеют единственные решения уравнения $f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = b$, где $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b$ — любые элементы из G , $i = 1, \dots, n$, то ее называют n -арной группой.

В n -арной группе $\langle G, f \rangle$ для фиксированного элемента a решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{a} x) = a$ обозначают через $\bar{a}$ и называют *косым* элементом для a . Определение косого элемента задает в n -арной группе $\langle G, f \rangle$ унарную операцию $\bar{\cdot}: x \rightarrow \bar{x}$, которая может быть использована при определении n -арной группы (см. [2, 3]).

n -Арная группа называется абелевой, если в ней верны тождества

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$. В произвольной абелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ множество P всех элементов конечного n -арного порядка образует n -арную подгруппу (Следствие 1, [1]), которую будем называть периодической частью n -арной группы $\langle G, f \rangle$.

В n -арной группе $\langle G, f \rangle$ элемент e называют единицей, если для любого $a \in G$ верно $f(\overset{(i-1)}{e}, a, \overset{(n-i)}{e}) = a$ для $i = 1, \dots, n$. Единица будет идемпотентом. В отличие от групп, n -арная группа может не содержать единицы либо иметь одну и больше единиц. Однако следующий результат такой же, как в группах.

ТЕОРЕМА 1. ([1], Следствие 2). *n -Арная фактор-группа $\langle G/P, f' \rangle$ абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ по периодической части P имеет одну единицу P , а остальные элементы имеют бесконечный порядок.*

На любой абелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ определяют абелеву группу $red_c \langle G, f \rangle$ с операцией $+$ по правилу $a + b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, где $c \in G$. Тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n + d, \quad (1)$$

где $d = f(\overset{(n)}{c})$ [4]. Элемент c — нуль в $red_c \langle G, f \rangle$. Верно и обратно: в любой абелевой группе G для выбранного d задается абелева n -арная группа $\langle G, f \rangle = abl_d G$, где f действует по правилу (1). Кроме того, для произвольно выбранного элемента d из абелевой группы G верно $G = red_0 abl_d G$, где 0 — нуль группы G , и для любого фиксированного элемента c из абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ верно $\langle G, f \rangle = abl_d red_c \langle G, f \rangle$.

Для идемпотента c абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ получим абелеву группу $red_c \langle G, f \rangle$, в которой $f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$. В этом случае n -арную группу $\langle G, f \rangle$ называют производной от абелевой группы $red_c \langle G, f \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *n -Арная фактор-группа $\langle G/P, f' \rangle$ абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ по периодической части P является производной от абелевой группы $red_P \langle G/P, f' \rangle$ без кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 7.1.1 [5] и теоремы 1 следует, что n -арная фактор-группа $\langle G/P, f' \rangle$ абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ по периодической части P будет производной от абелевой группы $\text{red}_P \langle G/P, f' \rangle$. Осталось показать, что $\text{red}_P \langle G/P, f' \rangle$ является группой без кручения. От противного. Допустим, что элемент $f(x, \overset{(n-1)}{P})$ группы $\text{red}_P \langle G/P, f' \rangle$, отличный от P , имеет конечный порядок k . Тогда верно равенство $kf(x, \overset{(n-1)}{P}) = P$. Откуда $(k(n-1) + 1)f(x, \overset{(n-1)}{P}) = f(x, \overset{(n-1)}{P})$. Так как n -арная фактор-группа $\langle G/P, f' \rangle$ является производной от абелевой группы $\text{red}_P \langle G/P, f' \rangle$, то $f(x, \overset{(n-1)}{P})^{(k)} = f(x, \overset{(n-1)}{P})$, т.е. мы получили, что элемент $f(x, \overset{(n-1)}{P})$, отличный от P , имеет конечный n -арный порядок. Это противоречит теореме 1. Следствие доказано.

Как и в группах, назовем n -арную группу периодической, если n -арные порядки всех ее элементов конечны.

ТЕОРЕМА 2. Любая абелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ является периодической тогда и только тогда, когда абелева группа $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ будет периодической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть абелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ является периодической. Строим абелеву группу $\text{red}_c \langle G, f \rangle$. Согласно предложению 2.5.14 из [6] n -арный порядок элемента c совпадает с порядком элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ в группе $\text{red}_c \langle G, f \rangle$. Пусть этот порядок будет равен k . Выбираем произвольный элемент $a \in G$, у которого n -арный порядок равен s . Тогда, используя (1), получим

$$a = a^{(s)} = f_{(s)}(\overset{(s(n-1)+1)}{a}) = (s(n-1) + 1)a + sd.$$

А значит, $k(s(n-1) + 1)a + skd = ka$, откуда $k(s(n-1) + 1)a = ka$, или $k((s(n-1) + 1) - 1)a = c$. А значит, группа $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ будет периодической.

Достаточность. Пусть абелева группа $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ будет периодической и элемент $d = f(\overset{(n)}{c})$ имеет порядок k . Выбираем произвольный элемент $b \in G$, у которого биарный порядок равен t . Тогда $ta = c$, а значит, $(tk(n-1) + 1)a + tkd = a$. Тогда, используя (1), получим $a = (tk(n-1) + 1)a + tkd = a^{(tk)}$. А значит, абелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ является периодической. Теорема доказана.

В периодической абелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ выделим множество G_p элементов, n -арные порядки которых есть степени фиксированного простого числа p . Будем считать, что все идемпотенты из $\langle G, f \rangle$ содержатся в G_p , так как идемпотент является нулевой степенью любого простого числа p . Как и в группах, верна

ТЕОРЕМА 3. В периодической абелевой n -арной группе множество элементов, n -арные порядки которых есть степени фиксированного простого числа p (включая и нулевые степени), образует n -арную подгруппу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_p — множество элементов периодической абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$, n -арные порядки которых есть степени фиксированного простого числа p . Выбираем $a_1, \dots, a_n$ из G_p с n -арными порядками p^{s_i} , $i = 1, \dots, n$. Полагаем $m = \max(s_1, \dots, s_n)$. Для всех выбранных a_i имеем

$$\begin{aligned} a_i^{\langle p^m \rangle} &= f_{(p^m)} \left(\binom{(p^m(n-1)+1)}{a_i} \right) = f_{(p^m)} \left(\binom{(p^{s_i}(n-1)+1)}{a_i}, \binom{(p^m-p^{s_i})(n-1))}{a_i} \right) = \\ &= f_{(p^{s_i}(p^{m-s_i}-1))} \left(a_i, \binom{(p^{s_i}(p^{m-s_i}-1)(n-1))}{a_i} \right) = f_{(p^{s_i}(p^{m-s_i}-1))} \left(\binom{(p^{s_i}(n-1)+1)}{a_i}, \binom{(p^{s_i}(p^{m-s_i}-2)(n-1))}{a_i} \right) = \\ &= f_{(p^{s_i}(p^{m-s_i}-2))} \left(a_i, \binom{(p^{s_i}(p^{m-s_i}-2)(n-1))}{a_i} \right) = \dots = f_{(p^{s_i})} \left(a_i, \binom{(p^{s_i}(n-1))}{a_i} \right) = a_i. \end{aligned}$$

Тогда, используя формулу (5) из [1], получим

$$f(a_1, \dots, a_n)^{\langle p^m \rangle} = f(a_1^{\langle p^m \rangle}, \dots, a_n^{\langle p^m \rangle}) = f(a_1, \dots, a_n).$$

Известно ([5], предложение 3.5) что если для элемента b из n -арной группы верно $b^{\langle m \rangle} = b$ для некоторого целого числа m , то m делится на n -арный порядок элемента b . Из предложения 3.5, [5] следует, что, p^m делится на n -арный порядок элемента $f(a_1, \dots, a_n)$, это означает, что n -арный порядок элемента $f(a_1, \dots, a_n)$ равен степени простого числа p .

Косым для элемента a из G_p конечного n -арного порядка p^s будет элемент $\bar{a} = a^{\langle p^s-1 \rangle}$, а его n -арный порядок равен $p^s / \text{НОД}(p^s, n-2)$ (см. [7]). А значит, n -арный порядок элемента $\bar{a}$ равен некоторой степени простого числа p . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество всех идемпотентов (если оно не пусто) в любой абелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ является n -арной подгруппой.

К числу периодических n -арных групп относятся, в частности, абелевы n -арные группы, n -арные порядки всех элементов которых являются степенями фиксированного простого числа p . Эти n -арные группы называют примарными по простому числу p . Верна

ТЕОРЕМА 4. Если абелева группа G является примарной по простому числу p , то абелева n -арная группа $\langle G, f \rangle = \text{abl}_d G$ будет примарной по этому же простому числу p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — примарная абелева группа по простому числу p и d имеет порядок p^k в группе G . Выбираем произвольный элемент $a \in G$, у которого порядок равен p^s . Обозначим $t = \max\{k, s\}$. Тогда $p^t a = 0$ и $p^t d = 0$, а значит, $(p^t(n-1)+1)a + p^t d = a$. Используя (1), получим $f_{p^t} \left(\binom{(p^t(n-1)+1)}{a} \right) = a$, откуда $a^{\langle p^t \rangle} = a$. Как и раньше, p^t делится на n -арный порядок элемента a , это означает, что n -арный порядок элемента a равен степени простого числа p . Теорема доказана.

Обратная теорема к теореме 4 не верна, т.е. из примарности абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ не всегда следует примарность абелевой группы $\text{red}_c \langle G, f \rangle$.

ПРИМЕР 1. Пусть (a) , (b) — циклические группы порядков 3, 2 соответственно и $G = (a) + (b)$ — прямая сумма этих групп. Определим абелеву тернарную (n -арную при $n = 3$) группу $\langle G, f \rangle = \text{abl}_a G$. Непосредственные вычисления показывают, что элементы $0, 2a, b, 2a+b$ имеют тернарные порядки, равные 3, а элементы $a, a+b$ будут идемпотентами. Значит, абелева тернарная группа $\langle G, f \rangle = \text{abl}_a G$ является примарной по простому числу 3, однако абелева группа $G = \text{red}_a \text{abl}_a G$ не является примарной.

Как и в группах, верна

ТЕОРЕМА 5. Всякая периодическая абелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых n -арных групп, относящихся к различным простым числам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В периодической абелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ определим абелеву группу $\text{red}_c \langle G, f \rangle$, которая будет периодической (согласно теореме 2).

Пусть σ — изоморфизм из $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ в внешнюю прямую сумму $\sum_{\alpha \in I} G_\alpha$ примарных подгрупп G_α , относящихся к различным простым числам p_α , действующий по правилу: если $g = g_{\alpha_1} + \dots + g_{\alpha_k}$, где для каждого $i = 1, \dots, k$ имеем $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ для некоторого $\alpha_i \in I$, то $\sigma(g) = \tau_g : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, где

$$\tau_g(\alpha) = \begin{cases} g_{\alpha_i}, & \text{если } \alpha = \alpha_i \text{ для некоторого } i = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \alpha_i \text{ для любого } i = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (2)$$

Для $d = f\left(\begin{smallmatrix} n \\ c \end{smallmatrix}\right)$ полагаем $d = d_{\alpha_1} + \dots + d_{\alpha_r}$. На каждой абелевой группе G_α строим абелевы n -арные группы $\langle G_\alpha, f_\alpha \rangle = \text{abl}_{d_\alpha} G_\alpha$, причем $d_\alpha = d_{\alpha_j}$ для некоторого $j = 1, \dots, r$ и для всех α из I , отличных от $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, полагаем d_α — нуль в группе G_α . По теореме 4 все так построенные n -арные группы $\langle G_\alpha, f_\alpha \rangle$ будут примарными по простым числам p_α . Покажем, что σ является изоморфизмом из $\langle G, f \rangle$ в $\prod_{\alpha \in I} \langle G_\alpha, f_\alpha \rangle$. Заметим, что n -арная операция f в n -арной группе $\prod_{\alpha \in I} \langle G_\alpha, f_\alpha \rangle$ действует по правилу $f(\tau_1, \dots, \tau_n)(\alpha) = f_\alpha(\tau_1(\alpha), \dots, \tau_n(\alpha))$.

Пусть $a_1, \dots, a_n \in G$ и $a_i = b_{\alpha_{i1}} + \dots + b_{\alpha_{ik_i}}$, где $b_{\alpha_{ij}} \in G_{\alpha_{ij}}$ для некоторого $\alpha_{ij} \in I$. Для удобства полагаем $d = b_{\alpha_{n+11}} + \dots + b_{\alpha_{n+1k_{n+1}}}$. Через J обозначим набор различных индексов среди индексов вида α_{ij} , где $i = 1, \dots, n+1$ и $j = 1, \dots, k_i$ для фиксированного i . Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(f(a_1^n)) &= \sigma(a_1 + \dots + a_n + d) = \sigma\left(\sum_{j=1}^{k_1} b_{\alpha_{1j}} + \dots + \sum_{j=1}^{k_n} b_{\alpha_{nj}} + \sum_{j=1}^{k_{n+1}} b_{\alpha_{n+1j}}\right) = \\ &= \sigma\left(\sum_{\beta \in J} (c_{1\beta} + \dots + c_{n\beta} + c_{n+1\beta})\right) = \sigma\left(\sum_{\beta \in J} f_\beta(c_{1\beta}, \dots, c_{n\beta})\right) = \tau_{\sum_{\beta \in J} f_\beta(c_{1\beta}, \dots, c_{n\beta})} \end{aligned}$$

где

$$c_{j\beta} = \begin{cases} b_{\alpha_{js}}, & \text{если } \beta = \alpha_{js} \text{ для некоторого } s = 1, \dots, k_j; \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha_{js} \text{ для любого } s = 1, \dots, k_j. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно правилу (2) имеем $\tau_{\sum_{\beta \in J} f_{\beta}(c_{1\beta}, \dots, c_{n\beta})}(\alpha) =$

$$= \begin{cases} f_{\beta}(c_{1\beta}, \dots, c_{n\beta}), & \text{если } \alpha = \beta \text{ для некоторого } \beta \in J; \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \text{ для любого } \beta \in J. \end{cases} \quad (4)$$

Далее, $f(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))(\alpha) = f(\tau_{a_1}, \dots, \tau_{a_n})(\alpha) = f_{\alpha}(\tau_{a_1}(\alpha), \dots, \tau_{a_n}(\alpha)) =$

$$= \begin{cases} f_{\beta}(\tau_{a_1}(\beta), \dots, \tau_{a_n}(\beta)), & \text{если } \alpha = \beta \text{ для некоторого } \beta \in J; \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \text{ для любого } \beta \in J. \end{cases} \quad (5)$$

Но для всех $i = 1, \dots, n$ имеем

$$\tau_{a_i}(\beta) = \begin{cases} b_{\alpha_{is}}, & \text{если } \beta = \alpha_{is} \text{ для некоторого } s = 1, \dots, k_i; \\ 0, & \text{если } \beta \neq \alpha_{js} \text{ для любого } s = 1, \dots, k_i, \end{cases}$$

т.е. $\tau_{a_i}(\beta) = c_{i\beta}$. Значит, отображения (4) и (5) совпадают, тем самым мы доказали, что σ сохраняет n -арную операцию. Теорема доказана.

Вновь как и в группах, верна

ТЕОРЕМА 6. *Периодическая часть конечно порожденной абелевой n -арной группы является конечной n -арной подгруппой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P — периодическая часть конечно порожденной абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$. P будет n -арной подгруппой в $\langle G, f \rangle$ ([1], следствие 1). Выбираем c из P и на $\langle G, f \rangle$ строим абелеву группу $red_c \langle G, f \rangle$ (см. выше).

Покажем, что каждый элемент из P в группе $red_c \langle G, f \rangle$ имеет конечный порядок. Отметим вначале, что $\langle G, f \rangle = abl_d red_c \langle G, f \rangle$. Вновь согласно предложению 2.5.14 из [6] n -арный порядок элемента c в n -арной группе $\langle G, f \rangle$ равен порядку (бинарному) элемента d в группе $red_c \langle G, f \rangle$. Пусть этот порядок равен k . Выбираем любой элемент a из G конечного n -арного порядка l . Полагаем $m = \text{НОК}(k, l)$ и $m = km_1$, $m = lm_2$. С одной стороны, $a^{<m>} = f_{(m)}^{(lm_2(n-1)+1)}(a) = a$, с другой стороны, $a^{<m>} = (m(n-1)+1)a + md$. Значит, $m(n-1)a + md = c$. Но $md = m_1(kd) = c$. Тогда $m(n-1)a = c$. Значит, a имеет конечный порядок в группе $red_c \langle G, f \rangle$.

Покажем теперь, что из конечной порожденности n -арной группы $\langle G, f \rangle$ следует конечная порожденность группы $red_c \langle G, f \rangle$. Для n -арной группы $\langle G, f \rangle$ существует универсальная обертывающая группа $\langle G^*, \oplus \rangle$. Множество $G_0 = \{a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{n-1} \mid a_i \in G\}$ является нормальной подгруппой в $\langle G^*, \oplus \rangle$ (см. [8]). Пусть $\langle G, f \rangle$ порождается конечным множеством X . Тогда $\langle G, f \rangle$ состоит из элементов, которые получаются после применений операции f к элементам из множества X и косым к этим элементам [9]. Значит, для каждого элемента g из $\langle G, f \rangle$ найдутся неотрицательные целые числа $t_1, m_1, \dots, t_k, m_k$ такие, что

$$g = f_{(q)}(x_{\alpha_1}^{t_1}, \bar{x}_{\alpha_1}^{m_1}, \dots, x_{\alpha_k}^{t_k}, \bar{x}_{\alpha_k}^{m_k}),$$

где $x_{\alpha_i} \in X$, $i = 1, \dots, k$ и $\sum_{i=1}^k (t_i + m_i) = q(n-1) + 1$. Так как G порождает $\langle G^*, \oplus \rangle$, то имеем конечную порожденность $\langle G^*, \oplus \rangle$. А тогда и подгруппа G_0 будет конечно порождена (как подгруппа конечно порожденной группы конечного индекса). Известно, что G_0 и $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ изоморфны, значит, $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ также конечно порождена.

Итак, абелева группа $\text{red}_c \langle G, f \rangle$ конечно порождена, а значит, множество всех элементов конечного порядка этой группы конечно. Раньше мы показали, что это множество содержит P . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любая периодическая конечно порожденная абелева n -арная группа конечна.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щучкин Н. А. Периодичность в полуабелевых n -арных группах // Ученые записки Орловского государственного университета, 2012. Т. 6, ч. 2. С. 254-259.
2. Gleichgewicht B. and Glasek K. Remarks on n -groups as abstract algebras // Coll. Math. 17, 1967. P. 209-219.
3. Dudek W. A. Remarks on n -groups // Demonstratio Math. 13, 1980. P. 165-181.
4. Timm J. Kommutative n -Gruppen: Diss., Hamburg, 1967. 156 p.
5. Русаков С. А. Алгебраические n -арные системы. Минск: Навука і тэхніка, 1992. 262 с.
6. Гальмак А. М. n -Арные группы. Ч. I. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.
7. Dudek I. M., Dudek W. A. On skew elements in n -groups // Demonstratio Math., 1981. Vol. XIV, №4. P. 827-833.
8. Post E.L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 48, 1940. P. 208-350.
9. Гальмак А. М. Конгруэнции полиадических групп. Минск: Беларуская навука, 1999. 180 с.

REFERENCES

1. Shchuchkin N. A. Periodicity in semiabelian n -ary groups // Proceedings of Orel State University, 2012. Vol. 6, Part 2. P. 254-259.
2. Gleichgewicht B. and Glasek K. Remarks on n -groups as abstract algebras // Coll. Math. 17, 1967. P. 209-219.

3. Dudek W.A. Remarks on n -groups // Demonstratio Math. 13, 1980. P. 165-181.
4. Timm J. Kommutative n -Gruppen: Diss, Hamburg, 1967. 156 p.
5. Rusakov S. A. Algebraic n -ary system. Minsk: Science and Technology, 1992. 262 p.
6. Gal'mak A. M. n -ary groups. Part I. Gomel: GSU F. Skoryna, 2003. 196 p.
7. Dudek I. M., Dudek W. A. On skew elements in n -groups // Demonstratio Math. 1981. Vol.XIV, №4. P. 827-833.
8. Post E.L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 48, 1940. P. 208-350.
9. Gal'mak A. M. Congruence polyadic groups. Minsk: Belarusian Science, 1999. 180 p.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Поступило 14.09.2013