ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-5-18

Метрический сегмент в классе Громова — Хаусдорфа[1]

О. Б. Борисова

Борисова Ольга Борисовна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: olyaboricova@gmail.com

Аннотация

В этой статье изучаются свойства метрического сегмента в классе всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, с расстоянием Громова — Хаусдорфа. При ограничении на компактные метрические пространства, расстояние Громова — Хаусдорфа становится метрикой. Метрическим сегментом называется класс точек, лежащих между двумя данными. По аксиоматике теории множеств фон Неймана — Бернайса — Гёделя (NGB) собственный класс — это такое «огромное семейство», эквивалентное классу всех множеств, которое уже само множеством не является. В этой статье показано, что любой метрический сегмент в классе Громова — Хаусдорфа, при условии, что существует хотя бы одно метрическое пространство, лежащее на ненулевых расстояниях до концевых точек сегмента, является собственным классом. А сегмент, у которого расстояние между концевыми точками равно нулю — множество. Также доказано, что при ограничении на компактные метрические пространства невырожденный метрический сегмент не является компактным множеством.

Ключевые слова: Расстояние Громова — Хаусдорфа, класс всех метрических пространств, аксиоматика фон-Неймана — Бернайса — Гёделя, метрический сегмент, компактность.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
О. Б. Борисова. Метрический сегмент в классе Громова — Хаусдорфа // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 5–18.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-01-00775а) и стипендии Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант №20-8-2-8-1).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-5-18

Metric Segments in Gromov–Hausdorff class[2]

O. B. Borisova

Borisova Olga Borisovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: olyaboricova@gmail.com

Abstract

We study properties of metric segments in the class of all metric spaces considered up to an isometry, endowed with Gromov–Hausdorff distance. On the isometry classes of all compact metric spaces, the Gromov-Hausdorff distance is a metric. A metric segment is a class that consists of points lying between two given ones. By von Neumann–Bernays–Gödel (NBG) axiomatic set theory, a proper class is a "monster collection", e.g., the collection of all sets. We prove that any metric segment in the proper class of isometry classes of all metric spaces with the Gromov-Hausdorff distance is a proper class if the segment contains at least one metric space at positive distances from the segment endpoints. If the distance between the segment endpoints is zero, then the metric segment is a set. In addition, we show that the restriction of a non-degenerated metric segment to compact metric spaces is a non-compact set.

Keywords: Gromov–Hausdorff distance, class of all metric spaces, von Neumann–Bernays–Gödel axioms, metric segment, compact set.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
O. B. Borisova, 2022, "Metric Segments in Gromov–Hausdorff class" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 5–18.

1. Введение

Расстояние Громова — Хаусдорфа — это величина, показывающая степень различия между двумя произвольными метрическими пространствами. Данное понятие тесно связано с расстоянием Хаусдорфа, впервые появившимся в 1914 году в книге Хаусдорфа «Теория множеств» [1]. Оно естественно определяет расстояние на непустых подмножествах некоторого метрического пространства и становится метрикой для замкнутых ограниченных подмножеств.

В 1981 Громов в своей работе [2] использовал изометричные вложения метрических пространств в одно общее метрическое пространство и рассматривал расстояние Хаусдорфа между их образами. Наименьшее возможное расстояние Хаусдорфа при таких вложениях принято называть расстоянием Громова — Хаусдорфа. Было доказано, что на метрических компактах, рассматриваемых с точностью до изометрии, данное расстояние является метрикой [3]. Независимо от Громова, шестью годами раннее, в работе Эдвардса [4] было введено эквивалентное расстояние между метрическими пространствами, но определенное несколько иным способом. Более подробный исторический обзор можно найти в работе [5].

[2]The study was performed under the support of the Russian Foundation for Basic Research (project №19-01-00775a) and the scholarship of the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation «BASIS» (grant №20-8-2-8-1).

Известно, что расстояние Громова — Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника, а на любых изометричных метрических пространствах равно нулю. Поэтому будем говорить о нем как о расстоянии между классами изометрии метрических пространств, вычисляя его на произвольном представителе класса (величина не зависит от выбора представителя). Так как на любом множестве можно определить метрику (например, положив равной 1 между любыми двумя различными элементами), по известному парадоксу Кантора, семейство всех классов изометрии не могут образовать множество. В данной статье мы будем использовать систему аксиом фон Неймана — Бернайса — Гёделя (NGB) теории множеств [6], чтобы корректно работать с такими семействами.

В теории NBG все объекты называются классами. Класс называют *множеством*, если существует класс, в котором этот класс является элементом. В противном случае класс называют *собственным классом*. Семейство всех множеств является собственным классом. Для классов стандартным образом определены операции отображения и декартова произведения. Таким образом, на собственном классе, как и на множестве, мы можем корректно задать функцию расстояния. Семейство классов изометрии метрических пространств (по приведенному выше замечанию) является собственным классом. Этот собственный класс, с определенным на нём расстоянием Громова — Хаусдорфа, — обобщенное псевдометрическое пространство, которое мы будем обозначать $\mathcal{GH}$. Пространство называю обобщенным псевдометрическим пространством, если определенная на его элементах функция расстояния удовлетворяет неравенству треугольника, но может принимать бесконечное значение и равняться нулю на паре не равных элементов.

В данной работе изучается класс элементов в пространства $\mathcal{GH}$, находящихся между двумя данными. А точнее, метрическое пространство $Z \in \mathcal{GH}$ лежит между $X, Y \in \mathcal{GH}$, если $d_{GH}(X, Z) + d_{GH}(Z, Y) = d_{GH}(X, Y)$, где $d_{GH}(\cdot)$ — обозначение расстояния Громова — Хаусдорфа. Класс всех таких Z называют *метрическим сегментом* и обозначают $[X, Y]$. Сегмент, у которого расстояние Громова — Хаусдорфа между концевыми точками равно нулю, называется *вырожденным*, иначе *невырожденным*.

В данной статье показано, что невырожденный метрический сегмент с непустой «внутренностью» (т.е. если в сегменте существует метрическое пространство с ненулевыми расстояниями до концевых точек) содержит в себе так много неизометричных метрических пространств, что уже является не множеством, а становится собственным классом. Вырожденный сегмент является множеством.

При ограничении $\mathcal{GH}$ на множество компактных метрических пространств, расстояние Громова — Хаусдорфа становится метрикой. Данное пространство называется *метрическим пространством Громова — Хаусдорфа* и обозначается $\mathcal{M}$. Геометрия этого пространства подробно описана в [3], [7]. В 2015 году А.О.Ивановым, Н.К.Николаевой и А.А.Тужилинымм было доказано одно из важных свойств этой метрики — строгая внутренность [8], [9]. Это означает, что в метрическом пространстве Громова — Хаусдорфа любые две точки соединены кратчайшей геодезической, длина которой равна расстоянию между ее концами.

Особые кратчайшие геодезические, образованные с помощью оптимального соответствия (точное определение будет введено ниже) назовём R-геодезическими. Примеры применения техники соответствий, и в том числе оптимальных соответствий, встречаются во многих работах, например [10], [11] или [12]. Объединение всех R-геодезических, соединяющих $X, Y \in \mathcal{GH}$, называется *R-сегментом* и обозначается $[X, Y]_R$. В 2018 году Д. Климбус показала, что для $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $[X, Y]_R \cap \mathcal{M}$ компактно [13]. В этой статье докажем, что для $X, Y \in \mathcal{M}$ невырожденный сегмент $[X, Y] \subset \mathcal{M}$, рассматриваемый в метрическом пространстве Громова — Хаусдорфа, не является компактным множеством. А для $X, Y \in \mathcal{GH}$ класс $[X, Y]_R$ — множество, в отличие от метрического сегмента $[X, Y]$.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание

к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. *Функцией расстояния* на X будем называть каждое симметричное отображение $d: X \times X \to [0, \infty]$, равное нулю на всех парах одинаковых элементов. Если d удовлетворяет неравенству треугольника, то отображение d называется *обобщенной псевдометрикой.* При выполнении условия $d(x, y) \neq 0$ для любых $x \neq y$, данное расстояние становится *обобщенной метрикой.* Если дополнительно справедливо неравенство $d(x, y) < \infty$ для любых $x, y \in X$, то это отображение назовем *метрикой* или *конечной метрикой*, чтобы подчеркнуть отличие от обобщенной метрики. Множество X с (обобщенной) (псевдо-)метрикой называется (*обобщенным*) (*псевдо-*)*метрическим пространством.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Иногда, для подчеркивания, о каком пространстве идет речь, будем добавлять нижний индекс $|xy|_X$. Для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = \inf\{|xa| : a \in A\}$. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств X. Для $A, B \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$d_H(A, B) = \max\Big\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab|\Big\}.$$

Величина $d_H(A, B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B.*

Пусть $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых ограниченных подмножеств X.

Предложение 1 ([3]). *Ограничение $d_H(A, B)$ на $\mathcal{B}(X)$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X.

Предложение 2 ([3]). *Ограничение $d_H(A, B)$ на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z'), состоящую из метрического пространства Z' и его двух подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). Положим

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\big\{r : \exists\, (X', Y', Z'),\ d_H(X', Y') \le r\big\}.$$

Величина $d_{GH}(X, Y)$ называется *расстоянием Громова — Хаусдорфа между X и Y.*

Предложение 3 ([3]). *Расстояние Громова — Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника.*

Так как для любых изометричных метрических пространств расстояние Громова–Хаусдорфа равно нулю, будем считать изометричные пространства эквивалентными. Таким образом, расстояние Громова — Хаусдорфа определено на классах изометрии метрических пространств (оно не зависит от представителей классов). Заметим, что расстояние Громова — Хаусдорфа может принимать бесконечные значения, и также существуют примеры неизометричных ограниченно компактных метрических пространств, для которых $d_{GH}(X, Y) = 0$, см. [3].

Семейство всех классов изометрии очень большое. Оно «не меньше» семейства всех множеств, так как на любом множестве мы можем задать метрику (например, положив расстояние 1 на всех парах различных точек). Из парадокса Кантора известно, что семейство всех множеств уже само не может быть множеством. В этой статье будем пользоваться аксиоматикой теории множеств фон Неймана — Бернайса — Гёделя (NGB) [6]. Напомним формулировки некоторых положений.

В NGB все объекты, аналоги привычных множеств, называются *классами*. Существует два вида классов: *множество* и *собственный класс*. Класс $\mathcal{A}$ называется *множеством*, если существует класс $\mathcal{C}$ такой, что $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. Класс $\mathcal{A}$ называется *собственным классом*, если для каждого класса $\mathcal{C}$ верно $\mathcal{A} \notin \mathcal{C}$.

Предложение 4 ([6]). *Класс всех множеств $\mathcal{V} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} = \mathcal{A}\}$ является собственным классом.*

Для любых классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ определены операции $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ стандартным образом, поэтому мы можем говорить о функции расстояния на классах. Собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, с расстоянием Громова — Хаусдорфа будем обозначать через $\mathcal{GH}$. Другим примером собственного класса является класс ограниченных метрических пространств, рассматриваемых с точность до изометрии. Этот класс с определенным на нем расстоянием Громова — Хаусдорфа будем обозначать через $\mathcal{B}$.

Предложение 5 ([3]). *Ограничение $d_{GH}(A, B)$ на $\mathcal{B}$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 6 ([3]). *Ограничение $d_{GH}(A, B)$ на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Расстояние Громова — Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}(X, Y)$ называются *отношениями между X и Y*.

Пусть $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ обозначают канонические проекции $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$. Отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ определено *искажение*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y),\ (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 7 ([3]). *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$. Соответствие называют *замкнутым*, если оно является замкнутым подмножеством $X \times Y$. Пусть $\mathcal{R}_c(A, B)$ — множество всех замкнутых соответствий.

Предложение 8 ([9], [12]). *Для $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y) \cap \mathcal{R}_c(X, Y) \neq \emptyset$.*

Пусть X, Y — произвольные метрические пространства. При каждом $t \in (0, 1)$ определим на $X \times Y$ функцию расстояния, положив

$$\big|(x, y)(x', y')\big|_t = (1 - t)|xx'| + t|yy'|.$$

Предложение 9 ([9]). *Определенная выше функция $|\cdot|_t$ является метрикой при всех $t \in (0, 1)$ на $X \times Y$.*

Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$, метрическое пространство $\big(\sigma, |\cdot|_t\big)$ обозначим через σ_t.

Предложение 10 ([9]). *Для любых $X,Y \in \mathcal{M}$ и любого замкнутого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ имеем $\sigma_t \in \mathcal{M}$ при каждом $t \in (0,1)$.*

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и доопределим семейство $R_t, t \in (0,1)$, в точках $t = 0,1$, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

Предложение 11 ([8], [9], [12]). *Для любых $X,Y \in \mathcal{M}$ и $R \in \mathcal{R}_{opt}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y)$ отображение $t \mapsto R_t, t \in [0,1]$, задает кривую в $\mathcal{M}$, соединяющую X и Y. Эта кривая является кратчайшей, причем ее длина равна $d_{GH}(X,Y)$. Тем самым, метрика пространства $\mathcal{M}$ — строго внутренняя.*

Пусть $\mathcal{A}$ — класс, наделенный обобщенной псевдометрикой, и $X,Y \in \mathcal{A}$. *Сегментом* с концами X и Y назовём подкласс

$$[X,Y] = \big\{Z \in \mathcal{A} : |XZ| + |ZY| = |XY|\big\}.$$

Если $|XY| = 0$, то сегмент называют *вырожденным*, иначе *невырожденным.*

Пусть теперь $X,Y \in \mathcal{GH}$. Определим R-сегмент $[X,Y]_R \subset [X,Y]$ следующим образом: рассмотрим произвольное оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}_{opt}(X,Y)$ (их может не быть) и пусть, как и выше, R_t – это R–геодезическая. Объединение всех таких R_t мы и обозначим $[X,Y]_R$.

Предложение 12 ([13]). *Для любых $X,Y \in \mathcal{M}$, множество $[X,Y]_R \cap \mathcal{M}$ компактно.*

Пусть X — метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. *Числом покрытия* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon)$ называется наименьшее количество открытых шаров радиуса ε, которыми можно покрыть пространство X.

Следующее предложение называется *критерием Громова предкомпактности семейства метрических компактов.*

Через $\operatorname{diam} X = \sup\big\{|ab| : a,b \in X\big\}$ обозначим диаметр пространства X.

Предложение 13 ([3]). *Пусть C — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Существует число $D \geq 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in C$ выполняется* $\operatorname{diam} X \leq D$ *и* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.

2. *Семейство $C \subset \mathcal{M}$ предкомпактно.*

В данной статье мощность множества X или по-другому его кардинальное число (кардинал) будем обозначать через $\#X$. Напомним некоторые свойства кардинальных чисел.

Предложение 14 ([14]). *Класс всех кардинальных чисел является собственным классом.*

Два множества X,Y *равномощны* или *имеют одинаковое кардинальное число*, т.е. $\#X = \#Y$, если существует взаимно однозначное соответствие между X и Y. Говорят, что *кардинал множества X меньше кардинала множества Y*, и пишут $\#X < \#Y$, если существует инъективное отображение X в U, где $U \subset Y$ и $U \neq Y$. Таким образом, на кардинальных числах определено отношение частичного порядка. Неравенство $\#X \leq \#Y$ обозначает, что либо $\#X < \#Y$, либо $\#X = \#Y$.

Предложение 15 (Теорема Кантора-Бернштейна-Шрёдера [6]). *Если для произвольных множеств X,Y верно $\#X \leq \#Y$ и $\#Y \leq \#X$, то $\#X = \#Y$.*

В данной статье мы будем принимать аксиому выбора построения теории множеств.

Класс называется *вполне упорядоченным*, если на нем установлено отношения порядка, и каждый его непустой подкласс имеет наименьший в смысле этого отношения элемент. Из определения следует, что во вполне упорядоченном классе любые два элемента сравнимы.

Предложение 16 (Принцип полного упорядочения [6]). *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Опираясь на аксиому выбора, доказывается следующая теорема.

Предложение 17 ([14]). *Всякое множество кардинальных чисел с введенным выше отношением порядка является вполне упорядоченным.*

Обозначим мощность множества натуральных чисел через $\aleph_0$, а мощность множества действительных чисел через $\mathfrak{c}$.

Для кардинальных чисел определены арифметические операции. Пусть $\#X = m$ и $\#Y = n$. *Сумма* кардиналов m и n равна мощности множества $X \cup Y$ при условии $X \cap Y = \emptyset$. *Произведение* кардиналов m и n, имеющее обозначение $m \cdot n$, — это мощность множества $X \times Y$. Операция *возведения в степень* с обозначением n^m определена как мощность множества всех отображений из X в Y.

Предложение 18 ([15]). *Произведение или сумма двух кардинальных чисел, отличных от нуля, где хотя бы одно из них бесконечно, равно большему из них.*

Вернемся к метрическим пространствам.

Назовем *плотностью* метрического пространства X наименьшее такое кардинальное число m, что в пространстве X имеется всюду плотное подмножество мощности m. Обозначим плотность через $\operatorname{den}(X)$. Благодаря полной упорядоченности кардинальных чисел, минимальное по мощности всюду плотное подмножество всегда существует.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Метрические пространства X и Y, удовлетворяющие условию $d_{GH}(X,Y) = 0$, имеют одинаковую плотность.*

Доказательство. Докажем неравенство $\operatorname{den}(X) \ge \operatorname{den}(Y)$, из которого будет следовать утверждение теоремы в силу симметричности формулировки относительно X и Y.

Пусть плотность X конечна. Тогда метрическое пространство X совпадает со своим всюду плотным подмножеством и $\#X = \operatorname{den}(X)$, то есть X конечно. Покажем от противного, что $\#X \ge \#Y$.

Пусть $\#X < \#Y$, тогда выберем $\#X+1$ произвольных различных точек пространства Y и обозначим через ε минимальное расстояние между ними. Из условия $d_{GH}(X,Y) = 0$ по предложению 7 следует существование соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ такого, что $\operatorname{dis} R < \varepsilon$. Так как на R каноническая проекция $\pi_Y(x,y) = y$ сюрьективна, то существует пара точек $y_1, y_2 \in Y$ и $x \in X$, удовлетворяющих условию $(x,y_1),(x,y_2) \in R$ и $|y_1y_2| \ge \varepsilon$. Но это противоречит условию $\operatorname{dis} R < \varepsilon$. Таким образом, $\operatorname{den}(X) = \#X \ge \#Y \ge \operatorname{den}(Y)$.

Пусть теперь плотность X бесконечна. Обозначим через $\widetilde{X}$ всюду плотное подмножество X такое, что $\#\widetilde{X} = \operatorname{den}(X)$. По предложению 7, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует соответствие $R_{1/n} \in \mathcal{R}(X,Y)$, удовлетворяющее условию $\operatorname{dis} R_{1/n} < \frac{1}{n}$. Обозначим через $Y_{1/n}$ «однозначный образ» отображения $R_{1/n}(\widetilde{X})$, то есть

$$Y_{1/n} = \bigcup_{x \in \widetilde{X}} y_{1/n}(x),$$

где $y_{1/n}(x) \in Y$ — один произвольно выбранный элемент из образа $R_{1/n}(x)$. Тогда $\#Y_{1/n} \le \#\widetilde{X}$.

Покажем, что $\widetilde{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_{1/n})$ является всюду плотным подмножеством Y. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$. Для натурального n, удовлетворяющему условию $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{n}$, выберем элемент x из прообраза $R_{1/n}^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R_{1/n}\}$. Найдем элемент $\widetilde{x}$ из всюду плотного подмножества $\widetilde{X}$, для которого $|x\widetilde{x}| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $\widetilde{y} = y_{1/n}(\widetilde{x}) \in Y_{1/n}$ получаем,

$$\big||x\widetilde{x}| - |y\widetilde{y}|\big| \le \operatorname{dis} R_{1/n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, существует $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, для которого верно $|y\widetilde{y}| < \varepsilon$. Из арифметики кардинальных чисел следует, что

$$\#\widetilde{Y} \le \sum_{n=1}^{\infty} \#Y_{1/n} \le \aleph_0 \cdot \#\widetilde{X} = \max\{\aleph_0, \#\widetilde{X}\} \le \#\widetilde{X} = \operatorname{den}(X)$$

Тогда $\operatorname{den}(Y) \le \#\widetilde{Y} \le \operatorname{den}(X)$. □

Следствие 1. *Для любого метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ класс $[X] := \{Z \in \mathcal{GH} : d_{GH}(X, Z) = 0\}$ является множеством. В частности, множеством является каждый вырожденный сегмент $[X, Y]$.*

Доказательство. Пусть для метрического пространства Z верно $Z \in [X]$. Тогда, по теореме 1, $\operatorname{den}(Z) = \operatorname{den}(X)$. Число элементов в метрическом пространстве не превосходит количества последовательностей из точек любого всюду плотного подмножества. Тогда $\#Z \le \operatorname{den}(Z)^{\aleph_0}$. Отметим также, что количество неизометричных метрических пространств с одинаковой мощностью m не превосходит $\mathfrak{c}^{m \cdot m}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность множества вещественных чисел (континуум). Таким образом, получаем неравенство $\#[X] \le \mathfrak{c}^{m \cdot m}$, где $m = \operatorname{den}(Z)^{\aleph_0}$. Это означает, что $[X]$ — множество.

Так как вырожденный сегмент $[X, Y] = [X] = [Y]$, получаем, что любой вырожденный сегмент — множество. □

Следствие 2. *Пусть для $X, Y \in \mathcal{GH}$ сегмент $[X, Y]$ — невырожден, и для любого $Z \in [X, Y]$ верно, что либо $d_{GH}(X, Z) = 0$, либо $d_{GH}(Y, Z) = 0$. Тогда $[X, Y]$ — множество.*

Доказательство. По неравенству треугольника для расстояния Громова — Хаусдорфа, любое метрическое пространство, находящееся на нулевом расстоянии до концевой точки сегмента, лежит в сегменте. Таким образом, $[X, Y]$ имеет следующий вид:

$$[X, Y] = [X] \cup [Y].$$

Из этого следует, что сегмент $[X, Y]$ — множество, как объединение двух множеств. □

В метрическом пространстве X замкнутый шар с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ будем обозначать $B_r(x_0)$. Чтобы подчеркнуть, в каком пространстве лежит шар, иногда будем добавлять верхний индекс. Таким образом, $B_r(x_0) = B_r^X(x_0) = \big\{x \in X : |xx_0| \le r\big\}$.

Теорема 2. *Пусть сегмент $[X, Y]$ невырожден для $X, Y \in \mathcal{GH}$. Пусть существует метрическое пространство $Z \in [X, Y]$ такое, что $d_{GH}(X, Z) > 0$ и $d_{GH}(Y, Z) > 0$. Тогда существует такое метрическое пространство $Z^* = Z \cup \{z^*\}$, где $z^* \in Z^*$ — изолированная точка, что $Z^* \in [X, Y]$, и Z^* удовлетворяет условиям $d_{GH}(X, Z^*) > 0$, $d_{GH}(Y, Z^*) > 0$.*

Доказательство. Построим необходимое метрическое пространство Z^*.

Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in Z$ и произвольное конечное δ, где

$$0 < \delta < \min\mathbf{l}\{2d_{GH}(X, Z), 2d_{GH}(Y, Z)\mathbf{r}\}.$$

Построим метрическое пространство $Z^* = Z \cup \{z^*\}$, сохранив расстояние между точками $z \in Z$ и определив расстояние до точки z^* следующим образом:

$$|z^*z|_{Z^*} = \begin{cases} \delta & \text{при } z \in Z \cap B^Z_\delta(z_0), \\ |z_0 z|_Z & \text{при } z \in Z \setminus B^Z_\delta(z_0), \\ 0 & z = z^*. \end{cases}$$

Убедимся, что данная функция является метрикой. Для этого достаточно проверить неравенство треугольника для z_1, z_2, z^*, где $z_1, z_2 \in Z$, так как остальные аксиомы очевидно выполняются.

Рассмотрим различные случаи расположения точек z_1, z_2.

Пусть $z_1, z_2 \in Z \cap B^Z_\delta(z_0)$, тогда треугольник равнобедренный и

$$|z^*z_1|_{Z^*} \le |z^*z_2|_{Z^*} + |z_2z_1|_{Z^*},$$

$$|z_1z_2|_{Z^*} = |z_1z_2|_Z \le |z_1z_0|_Z + |z_0z_2|_Z \le 2\delta = |z_1z^*|_{Z^*} + |z^*z_2|_{Z^*}.$$

Если же $z_1, z_2 \in Z \setminus B^Z_\delta(z_0)$, то расстояния между z_1, z_2, z^* соответственно равны расстояниям в Z между z_1, z_2, z_0. В последнем случае $z_1 \in Z \setminus B^Z_\delta(z_0)$, а $z_2 \in Z \cap B^Z_\delta(z_0)$, тогда

$$|z^*z_1|_{Z^*} = |z_0z_1|_Z \le |z_0z_2|_Z + |z_2z_1|_Z \le |z^*z_2|_{Z^*} + |z_2z_1|_{Z^*},$$

$$|z^*z_2|_{Z^*} = \delta \le |z^*z_1|_{Z^*} \le |z^*z_1|_{Z^*} + |z_1z_2|_{Z^*},$$

$$|z_1z_2|_{Z^*} = |z_1z_2|_Z \le |z_1z_0|_Z + |z_0z_2|_Z \le |z_1z^*|_{Z^*} + |z^*z_2|_{Z^*}.$$

Таким образом, $Z^* \in \mathcal{GH}$.

Далее, докажем, что $d_{GH}(X, Z^*) \le d_{GH}(X, Z)$. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Z)$ и построим по нему соответствие $R^* = R \cup \big(R^{-1}(z_0) \times \{z^*\}\big) \in \mathcal{R}(X, Z^*)$, где $R^{-1}(z_0) = \mathbf{l}\{x \in X : (x, z_0) \in R\mathbf{r}\}$. Подсчет искажения R^* разобьем на три части:

$$r_1 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz'|\big| : (x,z), (x',z') \in R^*; z, z' \in Z\Big\},$$

$$r_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz^*|\big| : |zz_0| > \delta; (x,z) \in R^*; x' \in R^{-1}(z_0)\Big\},$$

$$r_3 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz^*|\big| : |zz_0| \le \delta; (x,z) \in R^*; x' \in R^{-1}(z_0)\Big\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} R^* = \max\{r_1, r_2, r_3\}$. Оценим r_i сверху.

По построению соответсвия R^*, имеем $r_1 = \operatorname{dis} R$.

Так как в r_2 верно $|zz_0| > \delta$, то $|zz^*| = |zz_0|$ и

$$r_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz_0|\big| : |zz_0| > \delta; (x,z), (x', z_0) \in R\Big\} \le \operatorname{dis} R.$$

Теперь рассмотрим произвольные x, x', z из определения множества, по которому берется sup в определении r_3. Если $0 \le |xx'| - |zz^*|$, то

$$|xx'| - |zz^*| \le |xx'| - |zz_0| \le \operatorname{dis} R.$$

В противном случае,

$$0 < |zz^*| - |xx'| \le \delta \le 2d_{GH}(X, Z) \le \operatorname{dis} R,$$

поэтому и $r_3 \le \operatorname{dis} R$.

Таким образом,

$$\operatorname{dis} R^* \le \operatorname{dis} R.$$

Из этого неравенства и предложения 7 следует, что

$$d_{GH}(X,Z^*) \le d_{GH}(X,Z) < d_{GH}(X,Y).$$

Аналогично доказывается неравенство

$$d_{GH}(X,Y) > d_{GH}(Z,Y) \ge d_{GH}(Z^*,Y).$$

Тогда

$$d_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Z) + d_{GH}(Z,Y) \ge \\ d_{GH}(X,Z^*) + d_{GH}(Z^*,Y) \ge d_{GH}(X,Y),$$

где последние неравенство является неравенством треугольника для расстояния Громова — Хаусдорфа. Таким образом, $d_{GH}(X,Z^*) + d_{GH}(Z^*,Y) = d_{GH}(X,Y)$, а это означает, что $Z^* \in [X,Y]$. Также верно, что $d_{GH}(X,Z^*) > 0$ и $d_{GH}(Y,Z^*) > 0$, так как иначе одно из расстояний $d_{GH}(X,Z^*)$, $d_{GH}(Y,Z^*)$ равно $d_{GH}(X,Y)$, чего не может быть в силу полученных выше неравенств. □

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс X компактен, если и только если он конечен. Симплекс, имеющий n вершин, расстояния между которыми равны λ, обозначим через $\lambda\Delta_n$.

Теорема 3. *Пусть сегмент $[X,Y]$ невырожден для некоторых $X,Y \in \mathcal{GH}$. Пусть существует метрическое пространство $Z \in [X,Y]$ с хотя бы одной изолированной точкой, для которого $d_{GH}(X,Z) > 0$ и $d_{GH}(Y,Z) > 0$. Тогда для любого кардинального числа m существует метрическое пространство $W(m) \in [X,Y]$, где $W(m)$ имеет вид $W(m) = \widetilde{Z} \sqcup \mu\Delta_m$ для некого метрического пространства $\widetilde{Z}$ и $\mu > 0$. Если Z — компактное метрическое пространство, а m — конечный кардинал, то $W(m)$ тоже является компактом.*

Доказательство. Пусть $z^* \in Z$ — изолированная точка. Зафиксируем конечное $\mu > 0$ такое, что

$$\mu < 2\min\bigl\{d_{GH}(X,Z), d_{GH}(Z,Y), S(z^*)\bigr\},$$

где $S(z^*) = \inf\bigl\{|z^*z| : z \in Z, z \ne z^*\bigr\} > 0$. Для множества

$$W = W(m) = \mu\Delta_m \sqcup Z \setminus \{z^*\}$$

введем функцию расстояния следующим образом. Пусть $w_1, w_2 \in W$, тогда

$$|w_1w_2|_W = \begin{cases} |w_1w_2|_Z & \text{при } w_1, w_2 \in Z\backslash\{z^*\}, \\ |w_iz^*|_Z & \text{при } w_i \in Z, w_{3-i} \in \mu\Delta_m, i \in \{1,2\}, \\ \mu & \text{при } w_1, w_2 \in \mu\Delta_m, w_1 \ne w_2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Данная функция расстояния является метрикой. Аксиомы положительной определенности и симметрии очевидны. Проверим неравенство треугольника для различных точек W. Если все три точки w_1, w_2, w_3 лежат в $Z \setminus \{z^*\}$ или же $w_i \in \mu\Delta_m$, где $i \in \{1,2,3\}$, то неравенство треугольника сохраняется. Если $w_1, w_2 \in Z\backslash\{z^*\}$, а $w_3 \in \mu\Delta_m$, то расстояния между этими точками соответственно равны расстояниям между $w_1, w_2, z^* \in Z$, значит опять неравенство выполняется. Если же $w_1 \in Z\backslash\{z^*\}$, а $w_2, w_3 \in \mu\Delta_m$, то

$$|w_2w_3|_W = \mu < 2S(z^*) \le 2|z^*w_1|_Z = |w_2w_1|_W + |w_1w_3|_W,$$

$$|w_1w_2|_W = |w_1z^*|_Z < |w_1z^*|_Z + \mu = |w_1w_3|_W + |w_3w_2|_W.$$

Аналогично с $|w_1w_3|_W$.

Докажем, что $d_{GH}(X, W) \le d_{GH}(X, Z)$.

Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Z)$ и построим по нему соответствие $V \in \mathcal{R}(X, W)$ следующим образом. Положим $(x, w) \in V$ тогда и только тогда, когда $w \in Z \setminus \{z^*\}$ и $(x, w) \in R$, либо $w \in \mu\Delta_m$ и $(x, z^*) \in R$.

Посчитаем искажение V:

$$\operatorname{dis} V = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x, w), (x', w') \in V\Big\}.$$

Рассмотрим два случая разбиения на пары элементов V. Пусть

$$v_1 = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x, w), (x', w') \in V; w \in Z \setminus \{z^*\}, w' \in W\Big\},$$

$$v_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x, w), (x', w') \in V; w, w' \in \mu\Delta_m\Big\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\}$.

Для каждой пары $(x, w), (x', w') \in V$ из построения v_1 существует пара $(x, z), (x', z') \in R$, где $z, z' \in Z$ и $|ww'|_W = |zz'|_Z$, поэтому $v_1 \le \operatorname{dis} R$. Оценим сверху v_2. Перепишем v_2 в эквивалентном виде, пользуясь тем, что $|ww'|_W = \mu$ для $w, w' \in \mu\Delta_m$, и определением соответствия V:

$$v_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - \mu\mathbf{r}\big| : (x, z^*), (x', z^*) \in R\Big\}.$$

Благодаря выбору μ, имеем $\mu < 2d_{GH}(X, Z) \le \operatorname{dis} R$. Также для произвольных $x, x' \in X$ таких, что $(x, z^*), (x', z^*) \in R$, верно

$$|xx'| \le \operatorname{dis} R,$$

поэтому модуль разности величин $|xx'|$, μ и сама величина v_2 тоже не превосходит $\operatorname{dis} R$.

Таким образом, доказано, что $\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\} \le \operatorname{dis} R$.

Из этого неравенства и предложения 7 следует, что

$$d_{GH}(X, W) \le d_{GH}(X, Z).$$

Аналогично доказывается неравенство $d_{GH}(Z, Y) \ge d_{GH}(W, Y)$. Тогда

$$\begin{gathered} d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X, Z) + d_{GH}(Z, Y) \ge \\ d_{GH}(X, W) + d_{GH}(W, Y) \geqslant d_{GH}(X, Y), \end{gathered}$$

где последние неравенство является неравенством треугольника для метрики Громова — Хаусдорфа.

Таким образом, $d_{GH}(X, W) + d_{GH}(W, Y) = d_{GH}(X, Y)$, а это означает, что $W(m) \in [X, Y]$ для любого кардинального числа m.

Так как добавление конечного числа точек к компактному метрическому пространству сохраняет компактность, то в случае компактного Z и конечного m, построенное метрическое пространство $W(m)$ тоже является компактом. □

Следствие 3. *Пусть для невырожденного сегмента $[X, Y]$, где $X, Y \in \mathcal{GH}$, существует метрическое пространство $Z \in [X, Y]$, для которого $d_{GH}(X, Z) > 0$ и $d_{GH}(Y, Z) > 0$. Тогда сегмент $[X, Y]$ — собственный класс.*

Доказательство. По теореме 2 и теореме 3, в сегменте $[X,Y]$ лежат метрические пространства вида $W(m)=\widetilde{Z}\sqcup\mu\Delta_m$, где $\widetilde{Z}$ — метрическое пространство, а m — произвольное кардинальное число. Класс кардинальных чисел, удовлетворяющих условию $m\le\#\widetilde{Z}$ — является множеством, потому что их количество не превосходит кардинала $\#\mathcal{P}(\widetilde{Z})$. Так как объединение двух множеств является множеством, от противного получаем, что класс $\mathcal{A}=\{m$ — кардинал : $m>\#\widetilde{Z}\}$ — собственный класс. Построим сюръективное отображение сегмента $[X,Y]$ на собственный класс $\mathcal{A}$. Неизометричные метрические пространства $W(m)$, где $m>\#\widetilde{Z}$, отобразим в соответствующий кардинал $m\in\mathcal{A}$, а все остальные точки сегмента — в кардинал $\#\mathcal{P}(\widetilde{Z})$. Таким образом, сегмент «не меньше», чем собственный класс, поэтому и сам является собственным классом. $\square$

Следствие 4. *Пусть X,Y — неизометричные компактные метрические пространства. Тогда сегмент $[X,Y]\cap\mathcal{M}$ не является компактом.*

Доказательство. По предложению 11, сегмент $[X,Y]$ всегда содержит компактное метрическое пространство Z, лежащее на ненулевых расстояниях от X,Y. Тогда, по теореме 2 и теореме 3, в сегменте лежит компактное метрическое пространство $W(m)=\widetilde{Z}\sqcup\mu\Delta_m$ для некоторого $\mu>0$, некоторого метрического пространства $\widetilde{Z}$ и произвольного $m\in\mathbb{N}$. Но для $0<\varepsilon<\frac{\mu}{2}$ число покрытия $\operatorname{cov}\mathbf{l}(W(m),\varepsilon\mathbf{r})$ не меньше m, так как каждый открытый шар радиуса ε может покрыть не более одной точки из $\mu\Delta_m\subset W(m)$. Таким образом, для $\mathbf{l}\{W(m)\mathbf{r}\}_{m=1}^{\infty}\subset[X,Y]$ не существует функции $N\colon(0,\infty)\to\mathbb{N}$ такой, что для любого $m\in\mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство $\operatorname{cov}\mathbf{l}(W(m),\varepsilon\mathbf{r})\le N(\varepsilon)$. Тогда, по предложению 13, метрический сегмент $[X,Y]\cap\mathcal{M}$ не является предкомпактом и тем более компактом. $\square$

Теорема 4. *Пусть $X,Y\in\mathcal{GH}$ — произвольные непустые метрические пространства. Тогда R-сегмент $[X,Y]_R$ является множеством.*

Доказательство. Количество оптимальных соответствий между X и Y не превосходит $\#\mathcal{P}(X\times Y)$. Тогда мощность R-сегмента удовлетворяет неравенству $[X,Y]_R\le\#\mathcal{P}(X\times Y)\times\mathfrak{c}$. $\square$

4. Заключение

Таким образом, мы показали, что в классе Громова — Хаусдорфа метрический сегмент, в котором есть хотя бы один элемент, лежащий на ненулевых расстояниях до концевых точек сегмента, — собственный класс. В противном случае, метрический сегмент является множеством. При ограничении класса Громова — Хаусдорфа на компактные метрические пространства невырожденный метрический сегмент всегда является не компакнтым множеством.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

2. Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. // В сборнике: Publications Mathematiques Paris: I.H.E.S., Vol. 53, 1981.

3. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва – Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004. — 496 с.

4. Edwards D. The Structure of Superspace. // В сборнике: Studies in Topology, ed. by Stavrakas N. M. and Allen K. R., New York London San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

5. Tuzhilin A. A. Who Invented the Gromov–Hausdorff Distance? // ArXiv e-prints. 2017. arXiv:1612.00728.

6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. / Мендельсон Э.; пер. с англ. Ф.А. Кабакова под ред. С.И. Адяна. 2-ое из., исправленное. Москва, из. «Наука» гл. ред. физ-мат. лит., 1976. — 320 с.

7. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова — Хаусдорфа: случай компактов. М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017. — 111 с.

8. Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова — Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя. // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950 (arXiv:1504.03830).

9. Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A., Realizations of Gromov–Hausdorff Distance. // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1603.08850.

10. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space. // ArXiv e-prints. 2019. arXiv: 1904.09281.

11. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space. // Matematicki Vesnik. 2019. Vol. 71, № 1–2. P. 123–154.

12. Memoli F. On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison. // В сборнике: Proceedings of Point Based Graphics 2007, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

13. Клибус Д.П. Курсовая работа. Компактная выпуклость шаров в пространстве Громова — Хаусдорфа. [Электронный ресурс]. / Сайт кафедры дифф.геом. и прилож. мех-мата МГУ: Москва: 2018. — Режим доступа: http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2018-kr5-klibus.pdf, свободный.

14. John L. Kelley. General topology. / D. van Nostrand Company, Inc., New York, Toronto, and London, 1955.

15. Энгелькинг Р. Общая топология. / пер. с англ. М. Я. Антоновского и А.В. Архангельского. Москва: Мир, 1986. — 752 с.

REFERENCES

1. Hausdorff, F. 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].

2. Gromov, M. 1981, “Groups of Polynomial growth and Expanding Map”, In: *Publications Mathematiques*, I.H.E.S., Paris, Vol. 53.

3. Burago, D. Yu., Burago, Yu. D. & Ivanov, S. V., 2001, A Course in Metric Geometry, American Mathematical Society, Providence, RI.

4. Edwards, D. 1975, “The Structure of Superspace”, In: Studies in Topology, ed. by Stavrakas, N. M. and Allen, K. R., Academic Press, Inc. New York, London, San Francisco.

5. Tuzhilin, A. A. 2017, “Who Invented the Gromov–Hausdorff Distance?”, ArXiv e-prints, arXiv:1612.00728.

6. Mendelson, E. 1979, *Introduction to mathematical logic.* D. Van Nostrand company, INC. Princeton, New Jersey.

7. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A., 2017, Geometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances, the case of compact spaces, Izd-vo Popech. Soveta Mech.-Mat. Facult. MGU, Moscow [in Russian].

8. Ivanov, A. O., Nikolaeva, N. K. & Tuzhilin, A. A. 2016, “The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsi”, *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 6, pp. 171–173.

9. Iliadis, S. D., Ivanov, A. O. & Tuzhilin A. A. 2016, “Realizations of Gromov–Hausdorff Distanc”, ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850.

10. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 2019,“Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff spac”, ArXiv e-prints, arXiv: 1904.09281.

11. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, “Isometry group of Gromov–Hausdorff space”, *Matematicki Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.

12. Memoli, F. 2007, “On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison”, In: *Proceedings of Point Based Graphics 2007*, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

13. Klibus, D.P., 2018, *Coursework. Compact convexity of balls in the Gromov-Hausdorff space.* Available at: http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2018-kr5-klibus.pdf.

14. John L. Kelley. 1955, *General topology.* D. van Nostrand Company, Inc., New York, Toronto, and London.

15. Engelking, R. 1977, *General topology.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Manuscript of second edition, 1985.

Получено 25.01.21
Принято в печать 14.09.2022