

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 512.579

О СТРОГО ПРОСТЫХ ТЕРНАРНЫХ АЛГЕБРАХ С ОПЕРАТОРАМИ

В. Л. Усольцев(г. Волгоград)

Аннотация

В работе получены некоторые условия строгой простоты для алгебр с операторами, имеющих одну тернарную основную операцию. Описаны строго простые унары со стандартной и симметрической мальцевскими операциями, а также со стандартной операцией большинства. Получено также описание конгруэнц-простых унаров со стандартной операцией большинства.

Ключевые слова: строго простая алгебра, тернарная алгебра с операторами, унар с мальцевской операцией, функция меньшинства, функция большинства.

ABOUT STRICTLY SIMPLE TERNARY ALGEBRAS WITH OPERATORS

V. L. Usol'tsev (c. Volgograd)

Abstract

In this work is given some conditions of strictly simplicity for algebras with operators having one ternary main operation. It is described strictly simple unars with standard and symmetric Mal'tsev operations and with standard majority operation. The description of simple unars with standard majority operation is obtained as well.

Keywords: strictly simple algebra, ternary algebra with operators, unar with Mal'tsev operation, minority operation, majority operation.

Универсальная алгебра называется *строго простой*, если она является простой и не имеет собственных подалгебр, кроме, может быть, одноэлементных.

Строго простые алгебры изучались в ряде работ А. Сендрей, К. Кернса (см., напр., [1–4]) и др. Известно [3], что любое локально конечное минимальное многообразие порождается строго простой алгеброй. Строго простые алгебры также рассматриваются в рамках алгебраического подхода к исследованиям вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem, или задача "Обобщенная выполнимость") [5].

В настоящей работе интерес к строго простым алгебрам обусловлен их связями с абелевыми алгебрами.

Обозначим через $\text{Con}A$ решетку конгруэнций алгебры A . Через $[\alpha, \beta]$ обозначается коммутатор конгруэнций $\alpha, \beta \in \text{Con}A$ [6]. Алгебра называется *абелевой*, если для нее выполняется условие $[\nabla, \nabla] = \Delta$, где ∇ и Δ — единичная и нулевая конгруэнции.

М. Валериот [7] доказал, что любая конечная простая абелева алгебра является строго простой. Таким образом, изучение строго простых алгебр облегчает исследование абелевых алгебр, что, в свою очередь, способствует решению актуальной задачи описания полиномиально полных алгебр (см. [8]).

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра A сигнатуры $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, где Ω' произвольна, а Ω'' состоит из унарных операций, причем любая операция из Ω'' перестановочна с любой операцией из Ω' . Унарные операции из Ω'' называются *операторами*, а операции из Ω' — *основными операциями* алгебры A .

В настоящей работе алгебры с операторами изучаются в терминах их унарных редуков. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то *унарным редуком* алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ называется унар $\langle A, f \rangle$.

Будем называть алгебру с операторами *тернарной*, если она имеет единственную основную операцию, и эта операция является тернарной. Среди тернарных операций особое внимание уделяется операциям, перечисленным ниже.

Мальцевской называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$.

Будем называть мальцевскую операцию $d(x, y, z)$ *операцией Пиксли*, если она удовлетворяет тождеству $d(x, y, x) = x$.

Мальцевская операция $d(x, y, z)$ называется *функцией меньшинства* (minority operation), если она удовлетворяет тождеству $d(y, x, y) = x$. Из определения функции меньшинства следует, что она является *слабой функцией почти единогласия* (weak near-unanimity function), то есть операцией f , удовлетворяющей тождествам $f(x, \dots, x, y) = f(x, \dots, x, y, x) = \dots = f(y, x, \dots, x)$. Интерес к алгебрам, имеющим WNU-терм, обусловлен их приложениями в области исследования CSP-задач и в смежных областях (см., напр., [9]).

Тернарная операция $d(x, y, z)$ называется *функцией большинства* (majority operation), если она удовлетворяет тождествам

$$d(x, x, y) = d(x, y, x) = d(y, x, x) = x.$$

Функция большинства является тернарным вариантом *функции почти единогласия* (near-unanimity function), то есть операции f , удовлетворяющей тождествам $f(x, \dots, x, y) = f(x, \dots, x, y, x) = \dots = f(y, x, \dots, x) = x$. Алгебрам с NU-термами уделяется много внимания как в современной универсальной алгебре (см., напр., [10]), так и в теории графов и теоретической информатике.

Введем также в рассмотрение и назовем *функцией почти большинства* (near-majority operation) тернарную операцию $d(x, y, z)$, удовлетворя-

ющую тождествам $d(x, x, y) = d(y, x, x) = x$ и $d(x, y, x) = y$.

Необходимые определения и обозначения из теории унаров можно найти в [11].

Очевидное достаточное условие строгой простоты в общем случае дает

ЛЕММА 1. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, f \rangle \cong C_1^1$ или $\langle A, f \rangle \cong C_1^0 + C_1^0$ или $\langle A, f \rangle \cong C_p^0$, где p — простое число, то алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является строго простой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$, и унар $\langle A, f \rangle$ — связный. Если алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является строго простой, то ее унарный редукт $\langle A, f \rangle$ изоморфен либо циклу, либо цепи, либо унару, содержащему такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что $\langle A, \Omega \rangle$ является простой. Тогда, по [11, предложение 2], либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$. Во втором случае утверждение доказано.

Если f инъективна, то $\langle A, f \rangle$ изоморфен либо циклу, либо цепи, либо F_1 . Пусть $\langle A, f \rangle \cong F_1$, и B — некоторый его собственный подунар. Обозначим порождающие элементы унаров $\langle A, f \rangle$ и $\langle B, f \rangle$ через a и b соответственно. Заметим, что $b = f^k(a)$ для некоторого $k > 0$.

Предположим, что B не является подалгеброй алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Тогда найдутся такие $n > 0$, $x_1, \dots, x_n \in B$ и n -арная операция $\varphi \in \Omega$, что $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in A \setminus B$. Отсюда, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = f^d(a)$ для некоторого $d < k$.

Поскольку $x_1, \dots, x_n \in B$, то найдутся такие $m_1, \dots, m_n \in N \cup \{0\}$, что $x_i = f^{m_i}(b) = f^{m_i+k}(a)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi(f^{m_1+k}(a), \dots, f^{m_n+k}(a)) = \\ &= \varphi(f^d(f^{m_1+k-d}(a)), \dots, f^d(f^{m_n+k-d}(a))) = f^d(\varphi(f^{m_1+k-d}(a), \dots, f^{m_n+k-d}(a))). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая инъективность операции f , получаем

$$\varphi(f^{m_1+k-d}(a), \dots, f^{m_n+k-d}(a)) = a,$$

и $f^{k-d}(\varphi(f^{m_1}(a), \dots, f^{m_n}(a))) = a$, что противоречит выбору элемента a , как порождающего элемента унара $\langle A, f \rangle$.

Таким образом, B — бесконечная собственная подалгебра алгебры $\langle A, \Omega \rangle$, откуда $\langle A, \Omega \rangle$ не является строго простой. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f , где операция f неинъективна, а d — тернарная операция, которая относится либо к операциям Пиксли, либо к функциям меньшинства, либо к функциям большинства, либо к функциям почти большинства. Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является строго простой тогда и только тогда, когда ее унарный редукт $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из леммы 1. Докажем необходимость. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ является строго простой. Тогда она проста и, учитывая неинъективность операции f , по [11, предложение 2], унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$. Предположим, что унар $\langle A, f \rangle$ неизоморфен C_1^1 . Тогда найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $|\{a, b, c\}| = 3$. Так как $f(b) = a = f(c)$, то $B = \{a, b\}$ — собственный подунар унара $\langle A, f \rangle$. Из определений операций d следует, что B замкнуто относительно d . Таким образом, B — неоднородная собственная подалгебра в $\langle A, d, f \rangle$, что противоречит условию. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f , где операция f инъективна, а d — тернарная операция, которая относится либо к операциям Пиксли, либо к функциям меньшинства, либо к функциям большинства, либо к функциям почти большинства. Если алгебра $\langle A, d, f \rangle$ строго проста, то унар $\langle A, f \rangle$ не содержит собственных подунаров, изоморфных C_2^0 или $C_1^0 + C_1^0$.

Следует из замкнутости двухэлементных подмножеств относительно операций d .

Унаром с мальцевской операцией [12] называется алгебра $\langle A, p, f \rangle$ с перестановочными унарной операцией f и тернарной операцией p , на которой истинны тождества Мальцева. Аналогичным образом определим унары с операцией большинства и почти большинства. Очевидно, все они являются тернарными алгебрами с оператором.

В [12] показано, что на любом унаре $\langle A, f \rangle$ можно задать тернарную операцию p , называемую *стандартной*, так, что алгебра $\langle A, f, p \rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, удовлетворяющим тождествам Пиксли. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leq k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

В [13] показано, что на любом унаре $\langle A, f \rangle$ можно задать тернарную операцию s , называемую *симметрической*, так, что алгебра $\langle A, f, s \rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, удовлетворяющим тождеству $s(x, y, x) = y$. Предложенная конструкция восходит к [12] и задает функцию меньшинства:

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases}$$

По аналогии с (1) можно также задать на унаре тернарную операцию почти единогласия. Назовем ее *стандартной операцией большинства*:

$$m(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (2)$$

Определим также на унаре *стандартную операцию почти большинства*:

$$w(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) > k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases}$$

Рассмотрим условия конгруэнц-простоты для алгебр $\langle A, t, f \rangle$ и $\langle A, w, f \rangle$.

ЛЕММА 2. Пусть $\langle A, t, f \rangle$ — унар со стандартной операцией большинства t . Если унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, то алгебра $\langle A, t, f \rangle$ является простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условию леммы. Положим $X = A \setminus \{a\}$. При $|X| = 1$ унар $\langle A, f \rangle$ двухэлементен, и утверждение очевидно.

Пусть $|X| > 1$, θ — произвольная нетривиальная конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, K — некоторый ее неодноэлементный класс, $b, c \in K$ и $b \neq c$. В силу нетривиальности θ , найдется также такой элемент $d \in A$, что $d \notin K$.

Пусть $d = a$. Поскольку $f(a) = a = f(b)$ и $f(b) = a = f(c)$, то $k(c, b) = k(b, a) = 1$, откуда по определению (2) следует $t(c, b, a) = a = d$. В то же время, $t(b, b, a) = b$. Так как $b\theta c$, но при этом $(d, b) \notin \theta$, то отношение θ не стабильно относительно t . Пусть теперь $d \neq a$. Так как $f(c) = f(b) = f(d) = a$, то $t(c, b, d) = d$. Учитывая, что $t(b, b, d) = b$, снова получаем, что θ не стабильно относительно t . $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $\langle A, t, f \rangle$ — унар со стандартной операцией большинства t . Если операция f на унаре $\langle A, f \rangle$ инъективна, то алгебра $\langle A, t, f \rangle$ является простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ — произвольная нетривиальная конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, а K — ее некоторый неодноэлементный класс. Так как $\theta \neq \nabla$, то найдется такой элемент $a \in A$, что $a \notin K$. Пусть $b, c \in K$, $b \neq c$. Тогда, в силу инъективности операции f , $k(c, b) = k(b, a) = \infty$, и, следовательно, по определению (2), имеем $t(c, b, a) = a$. Отсюда, поскольку $t(b, b, a) = b$, то $(t(c, b, a), t(b, b, a)) \notin \theta$, то есть, отношение θ не стабильно относительно операции t . $\square$

Заметим, что аналоги лемм 2 и 3 верны и для алгебры $\langle A, w, f \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\langle A, t, f \rangle, \langle A, w, f \rangle$ — неодноэлементные унары со стандартной операцией большинства t и стандартной операцией почти большинства w . Алгебры $\langle A, t, f \rangle, \langle A, w, f \rangle$ являются конгруэнц-простыми тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из [11, предложение 2], в силу того, что $\langle A, t, f \rangle$, $\langle A, w, f \rangle$ являются алгебрами с оператором. Достаточность для $\langle A, t, f \rangle$ вытекает из лемм 2, 3, а для $\langle A, w, f \rangle$ — из соответствующих аналогов этих лемм. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\langle A, p, f \rangle$ — алгебра с оператором f , а p — либо стандартная мальцевская операция, либо симметрическая операция, либо стандартная операция большинства, либо стандартная операция почти большинства. Алгебра $\langle A, p, f \rangle$ является строго простой тогда и только тогда, когда либо $\langle A, f \rangle \cong C_1^1$, либо $\langle A, f \rangle \cong C_1^0 + C_1^0$, либо $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$ для некоторого $n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Из условия следует, что алгебра $\langle A, p, f \rangle$ — простая. Тогда из [11, теорема 2], [14, теорема 9] и теоремы 2 следует, что либо унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, либо операция f инъективна. В первом случае f неинъективна, и справедливость утверждения следует из теоремы 1.

Пусть теперь операция f инъективна. Допустим, что $\langle A, f \rangle$ — связный унар. Тогда он изоморфен либо F_1 , либо C^∞ , либо C_n^0 для некоторого $n > 0$.

Предположим, что $\langle A, f \rangle \cong F_1$, и a — порождающий элемент унара $\langle A, f \rangle$. Обозначим $b = f(a)$. Тогда, по условиям на операцию p , бесконечный подунар B , порожденный элементом b , является подалгеброй алгебры $\langle A, p, f \rangle$, причем, собственной, в силу условия $a \notin B$. Это противоречит строгой простоте алгебры $\langle A, p, f \rangle$.

Если $\langle A, f \rangle \cong C^\infty$, то он содержит собственный подунар, изоморфный F_1 , и дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным выше.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ — несвязный. Из условий на операцию p следует, что любая его компонента связности является подалгеброй алгебры $\langle A, p, f \rangle$. В силу несвязности $\langle A, f \rangle$, эта подалгебра является собственной. Тогда во всех случаях, кроме $\langle A, f \rangle \cong C_1^0 + C_1^0$, алгебра $\langle A, p, f \rangle$ не строго проста, что противоречит условию.

Достаточность. Если $\langle A, f \rangle \cong C_1^1$, или $\langle A, f \rangle \cong C_1^0 + C_1^0$, то утверждение следует из леммы 1.

Пусть $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$ для некоторого $n > 0$. Тогда алгебра $\langle A, p, f \rangle$ не имеет собственных подалгебр, поэтому достаточно доказать, что она проста. Если p — стандартная мальцевская операция, то простота $\langle A, p, f \rangle$ следует из [11, теорема 2]; если p — симметрическая операция, то из [14, теорема 9]; в других случаях — из теоремы 2. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Артамонову за ценные замечания и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Szendrei Á. Simple surjective algebras having no proper subalgebras // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1990. № 48. P. 329–346.
2. Szendrei Á. A survey on strictly simple algebras and minimal varieties // Univ. Algebra and Quasigroup Theory. Research and Exp. in Math. 1992. Vol. 19. P. 209–239.
3. Kearnes K.A., Szendrei Á. A characterization of minimal locally finite varieties // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 349, № 5. P. 1749–1768.
4. Kearnes K.A., Szendrei Á. Projectivity and isomorphism of strictly simple algebras // Algebra Universalis. 1998. Vol. 39. P. 45–56.
5. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P. Classifying the Complexity of Constraints using Finite Algebras // SIAM J. Comput. 2005. Vol. 34, № 3. P. 720–752.
6. McKenzie R., Freese R. Commutator theory for congruence modular varieties. 1987. London Math. Soc. Lecture Notes Ser. Vol. 125. 227 p.
7. Valeriot M. Finite simple Abelian algebras are strictly simple // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1990. № 108. P. 49–57.
8. Артамонов В.А. Полиномиально полные алгебры // Учен. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50), ч. 2. С. 23–29.
9. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59, № 3-4. P. 463–489.
10. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. P. 119–128.
11. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фундамент. и прикл. математика 2008. Т. 14, вып. 7. С. 189–207.
12. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Унив. алгебра и ее приложения: тез. докл. междунар. семинара. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
13. Усольцев В.Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p , заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 2(38). С. 127–134.
14. Усольцев В.Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Учен. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50), ч. 2. С. 229–236.

REFERENCES

1. Szendrei Á. Simple surjective algebras having no proper subalgebras. // J. Austral. Math. Soc. Ser A, 1990. № 48. P. 329–346.
2. Szendrei Á. A survey on strictly simple algebras and minimal varieties. // Univ. Algebra and Quasigroup Theory. Research and Exposition in Math., 1992, Vol. 19. P. 209–239.
3. Kearnes K.A., Szendrei Á. A characterization of minimal locally finite varieties. // Trans. Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 349, № 5. P. 1749–1768.
4. Kearnes K.A., Szendrei Á. Projectivity and isomorphism of strictly simple algebras. // Algebra Universalis, 1998. Vol. 39. P.45–56.
5. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P. Classifying the Complexity of Constraints using Finite Algebras. // SIAM J. Comput., 2005, Vol. 34, № 3. P.720–752.
6. McKenzie R., Freese R. Commutator theory for congruence modular varieties. // London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 1987. Vol. 125, 227 p.
6. Valeriot M. Finite simple Abelian algebras are strictly simple. //Proc. of the Amer. Math. Soc., 1990. № 108. P.49–57.
7. Artamonov V. A. Polinomial'no polnye algebrы [Polynomially complete algebras]. // Uch. zap. Orlovskogo gos. un-ta, 2012. Vol. 6(50), part 2. P. 23–29 (in Russian).
8. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations. // Algebra Universalis, 2008. Vol. 59, [No. 3-4. P. 463–489.
9. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms. *Algebra Universalis*, 2008. Vol. 58. P. 119–128.
10. Usol'tsev V.L. Simple and pseudosimple algebras with operators. //J. of Mathematical Sciences [Fund. i Prikl. Matem.], 2010. Vol. 164, [No. 2. P. 281–293. DOI: 10.1007/S1095800997306.
11. Kartashov V. K. Ob unarakh s mal'tsevskoi operatsiei [About unars with Mal'tsev operation]. // Univ. algebra i ee prilozheniia: Tez. dokl. mezhdunar. sem. Volgograd, 1999. P. 31–32 (in Russian).
12. Usol'tsev V. L. Svobodnye algebrы mnogoobrazii unarov s mal'tsevskoi operatsiei p , zadannogo tozhdestvom $p(x, y, x) = y$ [Free algebras of variety of unars with Mal'tsev operation, set by identity $p(x, y, x) = y$]. // Chebyshevsky sb., 2011. Vol. 12, № 2(38). P. 127–134 (in Russian).

13. Usol'tsev V. L. O polinomial'no polnykh i abelevykh unarakh s mal'tsevskoi operatsiei [About polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation]. // Uch. zap. Orlovskogo gos. un-ta, 2012. Vol. 6(50), part 2. P. 229–236 (in Russian).

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.

Поступило 14.09.2013