

УДК 512.577

**О ПОЛУГРУППАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ
СВЯЗНЫХ УНАРОВ С ОДНОЭЛЕМЕНТНЫМ
ЦИКЛОМ**

С. В. Сыроватская (г. Волгоград)

Аннотация

К настоящему времени получен ряд глубоких результатов по проблеме описания классов унаров (алгебр с одной унарной операцией), полугруппа эндоморфизмов которых коммутативна, регулярна, является группой или обладает другим заданным свойством. В данной заметке рассматривается обратная задача — описание классов полугрупп, каждая из которых изоморфна полугруппе эндоморфизмов некоторого унара. В работе описаны полугруппы эндоморфизмов некоторого класса унаров с одноэлементным циклом.

Ключевые слова: унар, эндоморфизм, сплетение полугрупп.

**ON ENDOMORPHISM SEMIGROUP OF
CONNECTED MONOUNARY ALGEBRAS
WITH ONE-ELEMENT CYCLE**

S. V. Sirovatskaya (c. Volgograd)

Abstract

In this paper we consider the inverse problem. Our goal is to describe classes of semigroups which is isomorphic to the endomorphism semigroup of some monounary algebra. We describe the endomorphism semigroup for certain class of monounary algebras with an one-element cycle.

Keywords: unar, endomorphism, wreath product of semigroups.

1. Необходимые определения и обозначения

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$ с одной унарной операцией f называется *унаром*.

В дальнейшем через $\mathbb{N}$ обозначается множество целых положительных чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Запись $n_1 \mid n_2$ для $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ означает, что n_1 делит n_2 .

Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $a \in A$ под af^m подразумевается результат m -кратного применения операции f к элементу a , при этом $af^0 \stackrel{\text{def}}{=} a$. Элемент a унара $\mathfrak{A}$ называется *циклическим*, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $af^n = a$. Элемент a *периодический*, если af^m является циклическим элементом для некоторого $m \in \mathbb{N}_0$. *Глубиной* $d(a)$ элемента a называется наименьшее $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что af^m циклический. *Период* $p(a)$ элемента a — это наименьшее число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $af^{d(a)+n} = af^{d(a)}$.

Унар, порожденный элементом $a \in A$, называется *моногенным* и обозначается через (a) ([1]). Через C_n^m обозначается унар, порождаемый периодическим элементом a с глубиной $d(a) = m$ и периодом $p(a) = n$. Если $m = 0$, то C_n^0 называют *циклом* длины n . Под F_1 подразумевается свободный моногенный унар, называемый *лучом*.

Если $\mathfrak{B}$ является подунаром унара $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$, то будем использовать запись $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$. Унар, представляющий собой объединение бесконечной возрастающей цепочки

$$(a_1) < (a_2) < \dots < (a_i) < \dots,$$

где $i \in \mathbb{N}$, $(a_i) \cong C_n^i$, n — фиксированное число из $\mathbb{N}$, обозначается через C_n^∞ .

Элементы a и b унара $\mathfrak{A}$ называются *связными*, если $af^m = bf^k$ для некоторых $m, k \in \mathbb{N}_0$. Отношение связности есть отношение эквивалентности на A , и каждый класс этой эквивалентности является подунаром $\mathfrak{A}$, называемым *связной компонентой*. Говорят, что $\mathfrak{A}$ разбивается на свои связные компоненты. Унар *связный*, если любые два его элемента являются связными. Напомним (см., например, в [2]), что связный унар содержит не более одного цикла.

Другие термины, применяемые в теории унаров, можно найти, например, в [1].

Сформулируем определение сплетения полугрупп (см. [3]).

Далее $T(X)$ означает множество всех преобразований множества X и $\mathcal{T}(X) = \langle T(X), \cdot \rangle$ — симметрическая полугруппа X , где $x(\alpha_1\alpha_2) = (x\alpha_1)\alpha_2$ для произвольных $\alpha_1, \alpha_2 \in T(X)$, $x \in X$.

Пусть $\mathcal{R} = \langle R, * \rangle$, $\mathcal{S} = \langle S, * \rangle$ — полугруппы. Через $\mathcal{R}^Y$ обозначается полугруппа $\langle R^Y, \cdot \rangle$, где R^Y — множество всех отображений множества Y во множество R и для любых $\tau_1, \tau_2 \in R^Y$, $y \in Y$, $y(\tau_1\tau_2) = (y\tau_1) * (y\tau_2)$.

Сплетением $\mathcal{R} \text{ wt }^\psi \mathcal{S}$ *полугрупп* $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ *посредством представления* $\psi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}(Y)$ называется полугруппа $\langle R^Y \times S, * \rangle$, операция которой задана по правилу: для произвольных $\tau_1, \tau_2 \in R^Y$, $s_1, s_2 \in S$

$$(\tau_1, s_1) * (\tau_2, s_2) = (\tau_3, s_1 * s_2),$$

где $y\tau_3 = (y\tau_1) * ((y(s_1\psi))\tau_2)$ для любого $y \in Y$.

2. Результаты

Приведем сначала несколько вспомогательных результатов.

ЛЕММА 1. ([1], с. 8). Для элемента a унара $\mathfrak{A}$ равенство $af^k = af^{k+h}$ ($k \in \mathbb{N}_0, h \in \mathbb{N}$) имеет место тогда и только тогда, когда $d(a) \leq k$ и $p(a) \mid h$.

ЛЕММА 2. ([2], с. 577). Для любого $m \in \mathbb{N}_0$, f^m – эндоморфизм унара $\mathfrak{A}$.

Подполугруппу $\{f^m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ полугруппы $\text{End } \mathfrak{A}$ будем обозначать через $\chi_{\mathfrak{A}}$.

ЛЕММА 3. ([2], с. 578). Отображение φ_a , определенное по правилу: $x\varphi_a = a$ для любого $x \in A$, является эндоморфизмом унара $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $af = a$.

Следствием леммы 1 и обобщением лемм 2.8 и 2.10 из [2] является

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ – гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в унар $\mathfrak{B} = \langle B, g \rangle$. Гомоморфный образ $a\varphi$ периодического элемента a унара $\mathfrak{A}$ есть также элемент периодический, причем $d(a\varphi) \leq d(a)$ и $p(a\varphi) \mid p(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно вытекает из леммы 1. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть $\mathfrak{A}\varphi$ – гомоморфный образ унара $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A} \cong C_n^\infty$, то $\mathfrak{A}\varphi \cong C_{n_1}^0$ либо $\mathfrak{A}\varphi \cong C_{n_1}^\infty$ для некоторого $n_1 \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определений. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\mathfrak{A} \cong C_1^\infty$, то полугруппа $\text{End } \mathfrak{A}$ разбивается на подполугруппы

$$\text{End } \mathfrak{A} = \chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\},$$

где $a\varphi_0 = a_0$ для любого $a \in A$ (a_0 – циклический элемент унара $\mathfrak{A}$). При этом $\chi_{\mathfrak{A}} \cong \langle \mathbb{N}_0, + \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 3 включение $\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\} \subseteq \text{End } \mathfrak{A}$ очевидно.

Пусть $\varphi \in \text{End}$ – произвольный элемент. Допустим, что $\varphi \neq \varphi_0$. Значит, найдется элемент $a \in A$ такой, что $a\varphi \neq a_0$. Отсюда, $d(a), d(a\varphi) > 0$, причем, согласно лемме 4, $d(a\varphi) \leq d(a)$. Покажем, что $\varphi = f^m$, где $m = d(a) - d(a\varphi)$. Для произвольного $x \in A$ возможны варианты.

1) $x = a$. Так как $d(af^m) = d(a) - m = d(a\varphi)$ и поскольку для любого $k \in \mathbb{N}_0$ в унаре $\mathfrak{A}$ существует единственный элемент с глубиной, равной k , то $af^m = a\varphi$.

2) $x = af^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Тогда $x\varphi = (af^k)\varphi = (a\varphi)f^k = (af^m)f^k = (af^k)f^m = xf^m$.

3) $a = xf^t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Обозначим через $a_1 = x\varphi$, через $a_2 = xf^m$. Имеем:

$$a_1f^t = (x\varphi)f^t = (xf^t)\varphi = a\varphi; a_2f^t = (xf^m)f^t = (xf^t)f^m = af^m.$$

Таким образом, $a_1 f^t = a\varphi = a_2 f^t$. Предположим, что $a_1 \neq a_2$. Не нарушая общности, положим: $a_2 = a_1 f^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Значит, $a_1 f^t = a_2 f^t = (a_1 f^k) f^t = (a_1 f^t) f^k$, откуда $a_1 f^t = a_0$. Это противоречит тому, что $a\varphi \neq a_0$. Поэтому $x\varphi = a_1 = a_2 = x f^m$. Итак, $\varphi = f^m \in \chi_{\mathfrak{A}}$. Таким образом, $\text{End } \mathfrak{A} \subseteq \chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}$.

Докажем теперь, что $\chi_{\mathfrak{A}} \cap \{\varphi_0\} = \emptyset$. Предположим, $\varphi_0 = f^t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим элемент $y \in A$ с глубиной $d(y) = t + 1$. $y f^t = y\varphi_0 = a_0$, что противоречит определению глубины элемента. Значит, наше предположение неверно, и следовательно, $\text{End } \mathfrak{A} = \chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}$ есть разбиение множества $\text{End } \mathfrak{A}$.

Отметим, что $f^m \neq f^k$ для любых различных $m, k \in \mathbb{N}_0$. Действительно, пусть $m < k$. Если бы $f^m = f^k$, тогда для элемента $x \in A$ с глубиной $d(x) = k$ имело бы место равенство $x f^m = x f^k = a_0$, что противоречило бы определению глубины.

Ясно, что соответствие $\alpha: \{f^m \mid m \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$, определенное правилом: $\alpha(f^m) = m$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$, является изоморфизмом $\chi_{\mathfrak{A}}$ на полугруппу $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$. $\square$

Пусть $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ — разбиение $\mathfrak{A}$ на связные компоненты. Рассмотрим унар $\mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}_i \cong C_0^\infty$ для всякого $i \in I$. В каждом $\mathfrak{A}_i$ зафиксируем элемент a_i . $(a_i \mid i \in I)$ — это подунар $\mathfrak{A}$, порожденный множеством $\{a_i \mid i \in I\}$; $\theta_{(a_i \mid i \in I)}$ есть конгруэнция Риса по $(a_i \mid i \in I)$. Фактор-унар $\mathfrak{A}/\theta_{(a_i \mid i \in I)}$ будем обозначать через $C_1^{(\infty, \mathfrak{m})}$, где $\mathfrak{m} = |I|$. Заметим, что при $\mathfrak{m} = 1$, $C_1^{(\infty, \mathfrak{m})} \cong C_1^\infty$.

Если $\mathfrak{A} \cong C_1^{(\infty, \mathfrak{m})}$, то примем следующие обозначения:

$\mathfrak{C}$ — цикл с носителем $\{a_0\}$, содержащийся в унаре $\mathfrak{A}$;

$W = \{\mathfrak{W} \leq \mathfrak{A} \mid \mathfrak{W} \cong C_1^\infty\}$, пусть $W = \{\mathfrak{W}_i = \langle W_i, f \rangle \mid i \in I\}$, где $|I| = \mathfrak{m}$.

Напомним, что X^Y есть множество всех отображений из Y в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\mathfrak{A} \cong C_1^{(\infty, \mathfrak{m})}$, то для множества $\text{End } \mathfrak{A}$ имеет место разбиение

$$\text{End } \mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W} \text{End}_\alpha \mathfrak{A},$$

где для каждого $\alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W$

$$\text{End}_\alpha \mathfrak{A} = \{\varphi: A \rightarrow A \text{ — соответствие} \mid \text{для любого } a \in A$$

$$a \in W_i \Rightarrow a\varphi = \begin{cases} a_0, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{C}, \\ af^{m_i}, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_i, \\ bf^{m_i}, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_j, j \neq i, \text{ где } b \in W_j, d(b) = d(a) \end{cases},$$

$$\text{где } m_i \in \mathbb{N}_0 \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W$, $\varphi \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$. Из способа задания следует, что $\varphi: A \rightarrow A$ является отображением. Пусть $a \in A$, $a \in W_i$ для некоторого $i \in I$, откуда $af \in W_i$. Возможны варианты.

1) $\mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{C}$. Тогда $(a\varphi)f = a_0 f = a_0 = (af)\varphi$.

2) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_i$. Отсюда, $a\varphi = af^{m_i}$ для некоторого $m_i \in \mathbb{N}_0$. Имеем:

$$(a\varphi)f = (af^{m_i})f = (af)f^{m_i} = (af)\varphi.$$

3) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_j, j \neq i$. Тогда $a\varphi = bf^{m_i}$ для некоторого $m_i \in \mathbb{N}_0$, где $b \in W_j, d(b) = d(a)$. Отметим, что для произвольных элементов x, y любого унара из равенства $d(x) = d(y)$ следует $d(xg^n) = d(yg^n)$, где g есть операция унара, $n \in \mathbb{N}$. Так как $d(a) = d(b)$, следовательно, $d(af) = d(bf)$. При этом $bf \in W_j$. Значит, $(a\varphi)f = (bf^{m_i})f = (bf)f^{m_i} = (af)\varphi$.

Итак, $\varphi \in \text{End } \mathfrak{A}$. Таким образом, $\text{End}_\alpha \mathfrak{A} \subseteq \text{End } \mathfrak{A}$ для любого $\alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W$.

Докажем, что $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{W}_i\alpha$ для произвольных $\varphi \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$ и $i \in I$. Для $\mathfrak{W}_i\alpha$ возможны варианты:

1) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{C}$. Отсюда, по определению φ , $a\varphi = a_0$ для любого $a \in W_i$. Следовательно, $W_i\varphi \subseteq \{a_0\}$. Обратное включение очевидно, и значит, $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{C}$.

2) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_i$. Тогда для любого $a \in W_i$, $a\varphi = af^{m_i} \in W_i$. Поэтому $W_i\varphi \subseteq W_i$. Далее для произвольного $a \in W_i$ ввиду сюръективности отображения f на множестве W_i существует $x \in W_i$ такой, что $xf^{m_i} = a$, откуда $x\varphi = xf^{m_i} = a$, следовательно, $a \in W_i\varphi$. Таким образом, обратное включение имеет место, и $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{W}_i$.

3) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_j, j \neq i$. Для любого $a \in W_i$, $a\varphi = bf^{m_i}$, где $b \in W_j, d(b) = d(a)$. Откуда $W_i\varphi \subseteq W_j$. Пусть $x \in W_j$. Ввиду сюръективности отображения f_{W_j} существует $y \in W_j$ такой, что $yf^{m_i} = x$. Отсюда для элемента $z \in W_i, d(z) = d(y)$ имеем: $z\varphi = yf^{m_i} = x$. Значит, $W_j \subseteq W_i\varphi$. Итак, $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{W}_j$.

Из доказанного следует:

$$\text{End}_{\alpha_1} \mathfrak{A} \cap \text{End}_{\alpha_2} \mathfrak{A} = \emptyset \text{ для любых } \alpha_1, \alpha_2 \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W, \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Рассмотрим произвольный $\varphi \in \text{End } \mathfrak{A}$. Согласно лемме 5, для любого $i \in I$ $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{C}$ либо $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{W}_j$ для некоторого $j \in I$. Покажем, что $\varphi \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_i\varphi$ для каждого $i \in I$. Пусть $a \in A$ — произвольный элемент, $a \in W_i$ для некоторого $i \in I$. Возможны варианты:

1) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{C}$. Значит, $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{C}$, откуда $a\varphi = a_0$.

2) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_i$. Т. е. $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{W}_i$. Рассмотрим ограничение φ_{W_i} отображения φ на множестве W_i . $\varphi_{W_i} \in \text{End } \mathfrak{W}_i$. Так как $W_i\varphi_{W_i} \neq \{a_0\}$, следовательно, по предложению 1, $\varphi_{W_i} \in \chi_{\mathfrak{W}_i}$. Отсюда, $\varphi_{W_i} = f^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_0$. Поэтому $a\varphi = a\varphi_{W_i} = af^{m_i}$, где $m_i = m \in \mathbb{N}_0$.

3) $\mathfrak{W}_i\alpha = \mathfrak{W}_j, j \neq i$. Тогда $\mathfrak{W}_i\varphi = \mathfrak{W}_j$. Значит, найдется элемент $x \in W_i$ такой, что $x\varphi \neq a_0$. Обозначим через $m = d(x) - d(x\varphi)$. Согласно лемме 4, $m \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $y \in W_i$. Возможны случаи:

а) $y = x$. Тогда найдется $z_x \in W_j$ такой, что $d(z_x) = d(x)$. Так как $d(z_x f^m) = d(z_x) - m = d(x) - m = d(x\varphi)$ и $x\varphi \in W_j$, следовательно, $z_x f^m = x\varphi$.

б) $y = xf^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Пусть $z_y \in W_j$ таков, что $d(z_y) = d(y)$. Поскольку $d(z_x) = d(x)$, значит, $d(z_x f^k) = d(xf^k)$. Отсюда, $d(z_x f^k) = d(z_y)$. Поэтому $z_x f^k = z_y$. Имеем: $y\varphi = (xf^k)\varphi = (x\varphi)f^k = (z_x f^m)f^k = (z_x f^k)f^m = z_y f^m$.

в) $x = yf^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Выберем элемент $z_y \in W_j$ такой, что $d(z_y) = d(y)$. Так как $d(y) = d(z_y)$, следовательно, $d(yf^k) = d(z_y f^k)$, откуда $d(z_x) =$

$d(z_y f^k)$. При этом $z_x, z_y f^k \in W_j$. Таким образом, $z_x = z_y f^k$. Положим далее $b_1 = y\varphi$ и $b_2 = z_y f^m$. Тогда $b_1 f^k = (y\varphi) f^k = (y f^k) \varphi = x\varphi$. С другой стороны, $x\varphi = z_x f^m = (z_y f^k) f^m = (z_y f^m) f^k = b_2 f^k$. Отсюда следует, что $b_1 f^k = b_2 f^k = x\varphi$. Предположим, что $b_1 \neq b_2$. Пусть, для определенности, $b_2 = b_1 f^t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Отсюда, $b_2 f^k = (b_1 f^t) f^k = (b_1 f^k) f^t = (b_2 f^k) f^t$. Таким образом, получили противоречие с тем, что $x\varphi \neq a_0$. Следовательно, $b_1 = b_2$.

Итак, для любого $y \in W_i$, $y\varphi = z_y f^m$, где $z_y \in W_j, d(z_y) = d(y)$. Поэтому $a\varphi = b f^{m_i}$, где $m_i = m \in \mathbb{N}_0$, $b \in W_j, d(b) = d(a)$. Значит, $\varphi \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_i \varphi$ для любого $i \in I$.

Таким образом, $\text{End } \mathfrak{A}$ разбивается на множества $\text{End}_\alpha \mathfrak{A}, \alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W$.

□

В следующей теореме под **O** подразумевается нуль полугруппы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{A} \cong C_1^{(\infty, \mathfrak{m})}$. Если $\mathfrak{m} = 1$, то $\text{End } \mathfrak{A} \cong \langle \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbf{O}\}, + \rangle$. При $\mathfrak{m} > 1$

$$\text{End } \mathfrak{A} \cong (\text{End } \mathfrak{W} \text{ wr } {}^\psi \mathfrak{T}(X)) / \rho,$$

где $\mathfrak{W} \leq \mathfrak{A}, \mathfrak{W} \cong C_1^\infty; |X| = \mathfrak{m}; \psi$ есть тождественный автоморфизм полугруппы $\mathfrak{T}(X)$; конгруэнция ρ определена по правилу:

для любых $\tau_1, \tau_2 \in (\text{End } \mathfrak{W})^X, t_1, t_2 \in T(X)$

$(\tau_1, t_1) \rho (\tau_2, t_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\tau_1 = \tau_2) \& ((\forall x \in X)(x\tau_1 \neq \varphi_0 \Rightarrow xt_1 = xt_2))$ (здесь $\varphi_0 \in \text{End } \mathfrak{W}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим сначала, что $\mathfrak{m} = 1$. Изоморфность полугрупп $\text{End } \mathfrak{A}$ и $\langle \mathbb{N}_0 \cup \{\mathbf{O}\}, + \rangle$ очевидна с учетом предложения 1 и того факта, что φ_0 является нулем полугруппы $\text{End } \mathfrak{A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{m} > 1$. Конструкция ρ для сплетения $\mathcal{R} \text{ wr } {}^\xi \mathcal{S}$, где $\mathcal{R}$ — полугруппа с нулем, построена в [4]. Здесь же [4, лемма 1.1] приводится доказательство того, что бинарное отношение ρ является конгруэнцией $\mathcal{R} \text{ wr } {}^\xi \mathcal{S}$.

Определим соответствие $\gamma: \text{End } \mathfrak{A} \rightarrow ((\text{End } \mathfrak{W})^X \times T(X)) / \rho$ следующим образом.

Пусть $\text{End } \mathfrak{A} \ni \varphi$ — произвольный элемент. Согласно предложению 2, $\varphi \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$ для некоторого $\alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W$. Полагаем, что $X = \{x_i \mid i \in I\}$. Обозначим через t_φ преобразование множества X , заданное по правилу: для любого $i \in I$

$$x_i t_\varphi = \begin{cases} x_i, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{C} \text{ или } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_i, \\ x_j, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_j, j \neq i. \end{cases}$$

Элемент $\tau_\varphi \in (\text{End } \mathfrak{W})^X$ определим так. Пусть $I \ni i$ — произвольный элемент. Поскольку $\varphi \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$, значит, для любого $a \in W_i$

$$a\varphi = \begin{cases} a_0, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{C}, \\ a f^{m_i}, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_i, \\ b f^{m_i}, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_j, j \neq i, \text{ где } b \in W_j, d(b) = d(a) \end{cases}, \text{ где } m_i \in \mathbb{N}_0.$$

Мы полагаем:

$$x_i \tau_\varphi = \begin{cases} \varphi_0, & \text{если } \mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{C}, \\ f^{m_i}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, $\gamma(\varphi) = [(\tau_\varphi, t_\varphi)]_\rho$.

Из способа задания ясно, что γ — отображение. Можно показать, что γ — биекция.

Пусть $\text{End } \mathfrak{A} \ni \beta_1, \beta_2$ — произвольные элементы. $\gamma(\beta_1 \beta_2) = [(\tau_{\beta_1 \beta_2}, t_{\beta_1 \beta_2})]_\rho$.

С другой стороны,

$$\gamma(\beta_1) * \gamma(\beta_2) = [(\tau_{\beta_1}, t_{\beta_1})]_\rho * [(\tau_{\beta_2}, t_{\beta_2})]_\rho = [(\tau_{\beta_1}, t_{\beta_1}) * (\tau_{\beta_2}, t_{\beta_2})]_\rho;$$

$(\tau_{\beta_1}, t_{\beta_1}) * (\tau_{\beta_2}, t_{\beta_2}) = (\tau, t_{\beta_1 t_{\beta_2}})$, где $x\tau = (xt_{\beta_1})(\tau_{\beta_2})$ для любого $x \in X$.

По предложению 2, $\beta_1 \in \text{End}_{\alpha_1} \mathfrak{A}$, $\beta_2 \in \text{End}_{\alpha_2} \mathfrak{A}$, $\beta_1 \beta_2 \in \text{End}_\alpha \mathfrak{A}$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in (W \cup \{\mathfrak{C}\})^W$. Для произвольного $i \in I$ возможны варианты.

1) $\mathfrak{W}_i \alpha_1 = \mathfrak{C}$. Тогда $x_i \tau_{\beta_1} = \varphi_0$, откуда $x_i \tau = \varphi_0$. Напомним (см. доказательство предложения 2), что $\mathfrak{W}_i \alpha = \mathfrak{W}_i(\beta_1 \beta_2)$. Имеем: $\mathfrak{W}_i(\beta_1 \beta_2) = (\mathfrak{W}_i \beta_1) \beta_2 = \mathfrak{C} \beta_2 = \mathfrak{C}$. Следовательно, $x_i \tau_{\beta_1 \beta_2} = \varphi_0$.

2) $\mathfrak{W}_i \alpha_1 = \mathfrak{W}_j$ для некоторого $j \in I$. Отсюда, $x_i t_{\beta_1} = x_j$. Для любого $a \in W_i$ $a \beta_1 = b f^{m_i}$, где $b \in W_j, d(b) = d(a), m_i \in \mathbb{N}_0$. Значит, $x_i \tau_{\beta_1} = f^{m_i}$. Возможны случаи.

а) $\mathfrak{W}_j \alpha_2 = \mathfrak{C}$. Тогда $x_j \tau_{\beta_2} = \varphi_0$, и $x_i \tau = \varphi_0$. С другой стороны,

$\mathfrak{W}_i(\beta_1 \beta_2) = (\mathfrak{W}_i \alpha_1) \alpha_2 = \mathfrak{W}_j \alpha_2 = \mathfrak{C}$. Поэтому $x_i \tau_{\beta_1 \beta_2} = \varphi_0$.

б) $\mathfrak{W}_j \alpha_2 = \mathfrak{W}_h$ для некоторого $h \in I$. В этом случае для любого $y \in W_j, y \beta_2 = z f^{k_j}$ для подходящего $k_j \in \mathbb{N}_0$, где $z \in W_h, d(z) = d(y)$. Следовательно, $x_j \tau_{\beta_2} = f^{k_j}$. Таким образом, $x_i \tau = f^{m_i} f^{k_j} = f^{m_i + k_j}$. С другой стороны, $\mathfrak{W}_i(\beta_1 \beta_2) = \mathfrak{W}_j \alpha_2 = \mathfrak{W}_h$. При этом для произвольного $a \in W_i$

$a(\beta_1 \beta_2) = (a \beta_1) \beta_2 = (b f^{m_i}) \beta_2 = z f^{k_j}$, где $b \in W_j, d(b) = d(a), z \in W_h, d(z) = d(b f^{m_i})$.

Рассмотрим элемент $z_a \in W_h, d(z_a) = d(a)$.

Так как $d(z_a) = d(a) = d(b)$, значит, $d(z_a f^{m_i}) = d(b f^{m_i})$.

Отсюда, $z = z_a f^{m_i}$, и, следовательно, $a(\beta_1 \beta_2) = (z_a f^{m_i}) f^{k_j} = z_a f^{m_i + k_j}$. Итак, $x_i \tau_{\beta_1 \beta_2} = f^{m_i + k_j}$.

Таким образом, $\tau = \tau_{\beta_1 \beta_2}$.

Пусть $i \in I$ таков, что $x_i \tau \neq \varphi_0$. Откуда $x_i \tau_{\beta_1}, (x_i t_{\beta_1}) \tau_{\beta_2} \neq \varphi_0$. Поскольку $x_i \tau_{\beta_1} \neq \varphi_0$, значит, $\mathfrak{W}_i \alpha_1 = \mathfrak{W}_j$ для некоторого $j \in I$. Имеем $x_i t_{\beta_1} = x_j$. Из того, что $x_j \tau_{\beta_2} \neq \varphi_0$, следует: $\mathfrak{W}_j \alpha_2 = \mathfrak{W}_h$ для подходящего $h \in I$. Поэтому $x_j t_{\beta_2} = x_h$. Таким образом, $x_i(t_{\beta_1} t_{\beta_2}) = (x_i t_{\beta_1}) t_{\beta_2} = x_j t_{\beta_2} = x_h$. При этом $\mathfrak{W}_i(\beta_1 \beta_2) = (\mathfrak{W}_i \alpha_1) \alpha_2 = \mathfrak{W}_j \alpha_2 = \mathfrak{W}_h$. Отсюда, $x_i t_{\beta_1 \beta_2} = x_h$. Итак, $(\tau, t_{\beta_1 t_{\beta_2}}) \rho (\tau_{\beta_1 \beta_2}, t_{\beta_1 \beta_2})$. Значит, $\gamma(\beta_1 \beta_2) = \gamma(\beta_1) * \gamma(\beta_2)$ для любых $\beta_1, \beta_2 \in \text{End } \mathfrak{A}$. Следовательно, γ — изоморфизм полугрупп $\text{End } \mathfrak{A}$ и $(\text{End } \mathfrak{W} \text{ wr } {}^\psi \mathfrak{T}(X)) / \rho$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Т. 27, №1. С. 7–20.
2. Varlet J. C. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A, \Gamma \rangle$ // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1970. Vol. 39. P. 575–589.
3. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А. и др. Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991.
4. Knauer U., Mikhalev A. Endomorphism monoids of free acts and O-wreath products of monoids. I. Annihilator properties // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. P. 177–187.

REFERENCES

1. Kartashov V. K. Quasivarieties of unars // Math. Notes. 1980. Vol. 27. P. 5–12. DOI: 10.1007/BF01149807.
2. Varlet J. C. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A, \Gamma \rangle$ // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1970. Vol. 39. P. 575–589.
3. Artamonov V. A., Salii V. N., Skornyakov L. A. et al. Obshchaia algebra [General Algebra]. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian).
4. Knauer U., Mikhalev A. Endomorphism monoids of free acts and O-wreath products of monoids. I. Annihilator properties // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. P. 177–187. DOI: 10.1007/BF02572514.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Поступило 14.09.2013