

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С
ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде (г. Баку)

Аннотация

В работе исследована одна обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с интегральным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: Обратная краевая задача, уравнения Буссинеска, метод Фурье, классическое решение.

AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A SINGLE FOURTH-ORDER BOUSSINESQ
EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION

Y. T. Megraliev, F. Kh. Alizade (c. Baku)

Abstract

In this paper an inverse boundary problem for the fourth order Boussinesq equation with integral conditions is investigated. First of all the initial problem reduced to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Keywords: Inverse boundary problem, Boussinesq equation, method Fourier, classic solution.

1. Введение

В последнее время уделяется большое внимание изучению различных нелинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в средах с дисперсией. Одним из них является уравнение Буссинеска, выведенное автором в [1] и описывающее распространение длинных волн на мелкой воде. Это уравнение интересно как с физической, так и с математической точки зрения, и ему посвящено немало работ [2]–[5].

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

В данной работе, следуя [6], [7], доказаны существование и единственность решения обратной краевой задачи для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с интегральным условием.

2. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения [4]

$$u_{tt}(x, t) - 2\alpha u_{txx}(x, t) + \beta u_{xxxx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $x_0 \in (0, 1)$ — фиксированное число, $\alpha > 0$, $\beta > \alpha^2$ — заданные числа, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x, t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Классическим решением обратной краевой задачи (1) — (5) назовём пару $\{u(x, t), a(t)\}$ функций $u(x, t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) функция $u(x, t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
- 2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;
- 3) все условия (1) — (5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть $f(x, t) \in C(D_T)$, $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(t) \neq 0$,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0), \quad \psi(x_0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1) — (5) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)–(5), из (1) — (3),

$$u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$a(t)h(t) + f(x_0, t) = h''(t) - 2\alpha u_{txx}(x_0, t) + \beta u_{xxx}(x_0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{u(x, t), a(t)\}$ является решением задачи (1) — (5). Интегрируя уравнение (1) по t от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - 2\alpha(u_{tx}(1, t) - u_{tx}(0, t)) + \beta(u_{xxx}(1, t) - u_{xxx}(0, t)) = \\ = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx + \int_0^1 f(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (8)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) и с учётом (3), (4), легко приходим к выполнению (6).

Далее, считая $h(t) \in C^2[0, T]$ и дифференцируя два раза (5), получаем:

$$u_{tt}(x_0, t) = h''(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

Из (1) имеем:

$$u_{tt}(x_0, t) - 2\alpha u_{txx}(x_0, t) + \beta u_{xxx}(x_0, t) = a(t)u(x_0, t) + f(x_0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (10)$$

Отсюда, с учетом (5) и (9), приходим к выполнению (7).

Теперь, предположим, что $\{u(x, t), a(t)\}$ является решением задачи (1) — (3), (6), (7). Тогда из (8), с учётом (3) и (6), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - a(t) \int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (11)$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0$, очевидно, что

$$\int_0^1 u(x, 0) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 u_t(x, 0) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \quad (12)$$

Так как задача (11), (12) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$), т.е. выполняется условие (4).

Далее из (8) и (10) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_0, t) - h(t)) = a(t)(u(x_0, t) - h(t)) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (13)$$

В силу (2) и $\varphi(x_0) = h(0), \psi(x_0) = h'(0)$, имеем:

$$u(x_0, t) - h(0) = \varphi(x_0) - h(0) = 0, u_t(x_0, t) - h'(0) = \psi(x_0) - h'(0) = 0. \quad (14)$$

Из (13) и (14) заключаем, что выполняется условие (5). Лемма доказана.

3. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [8], что система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (15)$$

образует базис в $L_2(0, 1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$).

Так как система (15) образует базис в $L_2(0, 1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (6), (7) его первая компонента $u(x, t)$ имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \quad (16)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искоемых коэффициентов $u_{10}(t)$, $u_{1k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) функции, из (1) и (2)) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (17)$$

$$u''_{1k}(t) + 2\alpha\lambda_k^2 u'_{1k}(t) + \beta\lambda_k^4 u_{1k}(t) = F_{1k}(t; u, a) \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (18)$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k}, \quad u'_{1k}(0) = \psi_{1k} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (19)$$

$$u''_{2k}(t) + 2\alpha\lambda_k^2 u'_{2k}(t) + \beta\lambda_k^4 u_{2k}(t) = F_{2k}(t; u, a) \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (20)$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \quad u'_{2k}(0) = \psi_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где

$$F_{1k}(t; u, a) = a(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x, t) dx, \quad f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$F_{2k}(t; u, a) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t), \quad f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Далее, из (17) – (21) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t - \tau)F_{10}(\tau; u, a)d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (22)$$

$$u_{ik}(t) = e^{\alpha_k t} \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{ik} + \frac{\psi_{ik}}{\beta_k} \sin \beta_k t \right] + \\ + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (23)$$

где

$$\alpha_k = -\alpha \lambda_k^2, \quad \beta_k = \lambda_k^2 \sqrt{\beta - \alpha^2}.$$

После подстановки выражений $u_{10}(t)$, $u_{1k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) в (16), для определения компоненты $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1) — (3), (6), (7) получаем:

$$u(x, t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t - \tau)F_{10}(\tau; u, a)d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{1k} + \left[\frac{\psi_{1k}}{\beta_k} \sin \beta_k t \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \right\} \cos \lambda_k x + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{2k} + \frac{\psi_{2k}}{\beta_k} \sin \beta_k t \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (24)$$

Теперь из (16), с учетом (11), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(x_0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{1k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) \cos \lambda_k x_0 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{2k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) \sin \lambda_k x_0 \right\}. \quad (25)$$

$$(26)$$

Дифференцируя (23), получим:

$$u'_{ik}(t) = e^{\alpha_k t} \left[-\frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \varphi_{ik} \sin \beta_k t + \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t + \cos \beta_k t \right) \psi_{ik} \right] + \\ + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a) (\alpha_k \sin \beta_k (t - \tau) + \beta_k \cos \beta_k (t - \tau)) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \quad (i = 1, 2). \quad (27)$$

Далее, из (24) и (27), получаем:

$$2\alpha u'_{ik}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = \\ = e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \varphi_{ik} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \psi_{ik} \right] + \\ + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a) ((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau)) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau. \quad (28)$$

Тогда из (25), с учетом (28), находим:

$$a(t) = h^{-1}(t) \{ h''(t) - f(x_0, t) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \varphi_{1k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \psi_{1k} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a) ((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + \right. \\ \left. + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau)) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \right\} \cos \lambda_k x_0 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \varphi_{2k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \psi_{2k} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) ((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + \right. \\ \left. + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau)) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \right\} \sin \lambda_k x_0. \quad (29)$$

Таким образом, решение задачи (1) — (3), (6), (7) сведено к решению системы (24), (29) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1) — (3), (6), (7) важную роль играет следующая

ЛЕММА 2. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ — любое решение задачи (1) — (3), (6), (7), то функции

$$\begin{aligned} u_{10}(t) &= \int_0^1 u(x, t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx, \\ u_{2k}(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

удовлетворяют на $[0, T]$ системе (22), (23).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1) — (3), (6), (7) достаточно доказать единственность решения системы (24), (29).

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^5$ [9] совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k)$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и

$$J_T(u) \equiv \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} = J_T(u).$$

Через E_T^5 обозначим пространство $B_{2,T}^5 \times C[0, T]$ вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^5} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \\ \Phi_2(u, a) &= \tilde{a}(t), \end{aligned}$$

причём $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (21), (22) и (29).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left| \cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right| &\leq 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \equiv \varepsilon_1, \quad \left| \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \frac{1}{\lambda_k^2} \equiv \varepsilon_2 \frac{1}{\lambda_k^2}, \\ \left| \beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right| &\leq \left(\frac{3\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \beta \lambda_k^2 \equiv \varepsilon_3 \lambda_k^2, \\ \left| \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right| &\leq \frac{\beta + 2\alpha^2}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 2\alpha \equiv \varepsilon_4, \\ \frac{1}{\beta_k} \left| (2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau) \right| &\leq \varepsilon_4. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, имеем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} &\leq |\varphi_{10}| + T|\psi_{10}| + T\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2\varepsilon_1 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2\varepsilon_1 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_3 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\left. + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Предположим, что данные задачи (1) – (3), (6), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi(1)$,
 $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$.
2. $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$.
3. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T)$,
 $f(0, t) = f(1, t)$, $f_x(0, t) = f_x(1, t)$, $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t)$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Тогда из (30) – (32) получаем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} \\ &+ T\sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\varepsilon_1 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon_2 \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ 2\varepsilon_2 \sqrt{T} \|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + 2\varepsilon_2 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_3 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_4 \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &\left. + \frac{\sqrt{6T}}{6} \varepsilon_4 \|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее из (33) и (34) находим:

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^5} \leq A_1(T) + A_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ 4\varepsilon_1 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 4\varepsilon_2 \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 4\varepsilon_2 \sqrt{T} \|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\ A_2(T) &= (T + 4\varepsilon_2)T. \end{aligned}$$

Теперь из (35) имеем:

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq B_1(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (37)$$

где

$$B_1 = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_3 \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_4 \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6T}}{6} \varepsilon_4 \|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right\}, \\ B_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T.$$

Из неравенств (36) и (37) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (38)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + B_1(T), \quad B(T) = A_2(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1 – 4 и

$$B(T)(A(T) + 2)^2 \leq 1. \quad (39)$$

Тогда задача (1) – (3), (6), (7) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве E_T^5 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (40)$$

где $z = \{u, a\}$, а компоненты $\Phi_i (i = 1, 2)$ оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями (24), (29) соответственно.

Рассмотрим, оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^5 . Аналогично (38) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^5} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (41)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^5} \leq B(T) R (\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|_{B_{2,T}^5}). \quad (42)$$

Тогда из оценок (41) и (42), с учетом (39), следует, что оператор $\Phi(u, a)$ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор $\Phi(u, a)$ имеет единственную неподвижную точку (u, a) , которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (40), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (24), (29).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_{xxx}(x, t)$, $u_{xxxx}(x, t)$ в D_T .

Теперь из (27) находим:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\beta}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \cdot \\ & \cdot \left[\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\beta}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ & + 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \cdot \\ & \cdot \left[\sqrt{T} \|f_{xxx}(x, t)\| + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_t(x, t)$, $u_{tx}(x, t)$, $u_{ttx}(x, t)$ непрерывны в D_T .

Далее, из (18) и (20), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq 4\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + 2\beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left\| \|f_x(x, t) + a(t) u_x(x, t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_{tt}(x, t)$ непрерывна в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (6) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x, t), a(t)\}$ является решением задачи (1) — (3), (6), (7) и в силу леммы 2 это решение единственно. Теорема доказана. С помощью леммы 1, легко доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0), \psi(x_0) = h'(0).$$

Тогда задача (1) – (5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de surface au fond // J. Math. Pures Appl. 1872. Vol. 17. P. 55 – 108.
2. Clarkson P. A New exact solutions of the Boussinesq equation // European J. Appl. Math. 1990. Vol. 1. P. 279 – 300.
3. Hirota , R. Classical Boussinesq equation is a reduction of the modified KP equation // J. Phys. Soc. Japan. 1985. Vol. 54. P. 2409 – 2415.
4. Z. Y. Yan, F. D. Xie , H. Q. Zhang Symmetry Reductions, Integrability and Solitary Wave Solutions to High-Order Modified Boussinesq Equations with Damping Term // Communications in Theoretical Physics. 2001. Vol. 36, № 1. P. 1 – 6.
5. Варламов В. В. Асимптотика при больших временах решения уравнения Буссинеска с диссипацией // Журн. вычисл. мат. и мат. физика. 1994. Т. 34, № 8-9. С. 1194 – 1205.
6. Мегралиев Я. Т. Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2011. Т. 32(249), № 5. С. 51–56.
7. Мегралиев Я. Т. Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода // Вестник Брянского государственного университета. 2011. № 4. С. 22–28.
8. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
9. Худавердиев К. И., Велиев А. А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыюглы, 2010.

Бакинский Государственный Университет

Поступило 3.11.2013