ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.34

ВЫПУКЛЫЕ РОМБОДОДЕКАЭДРЫ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ BR-МНОЖЕСТВА[1]

А. А. Осипова (г. Владимир)

Аннотация

Область исследования работы относится к разделу теории чисел, занимающемуся изучением множеств ограниченного остатка.

Рассматриваются орбиты движения точек на торе. Орбиты задаются сдвигом на иррациональный вектор начальной точки. Для определения колличества точек орбиты, попавших в заданную область T на торе, вводится считающая функция $r(i)$. Справедлива ассимптотическая формула $r(i) = i\,\mathrm{Vol}\,(T) + \delta(i)$, где $\delta(i) = o(i)$ — остаточный член формулы, или отклонение считающей функции от ожидаемой величины. Множество называется множеством ограниченного остатка или BR-множеством, если границы отклонений не превосходят некоторой константы.

В работе используется новый метод построения множеств ограниченного остатка на основе разбиений параметрических многогранников. Рассматриваемые многогранники являются развертками тора. Необходимым условием для построения множеств ограниченного остатка, является разбиение развертки на такие области, при перекладывании котрых, снова будет получаться исходная развертка, а перекладывание будет соответсвовать сдвигу тора.

Автором было получено семейство разбиений, обладающих этим свойством, и порождающих двумерные BR-множества. Найденный метод параметрических многогранников, позволил не только получить точные оценки остаточных членов, необходимые для решения прикладных задач, но и определить средние значения отклонений, а так же построить оптимизацию границ отклонений, позволяющую применять полученные результаты для построения сбалансированных последовательностей (являющихся аналогом последовательности Штурма в одномерном случае).

В настоящей работе удалось обобщить рассмотренный метод на случай трехмерных торов и получить для них точные оценки остаточных членов и их средние значения.

Ключевые слова: множества ограниченного остатка, распределение дробных долей, развертка тора.

Библиография: 22 названия.

CONVEX RHOMBIC DODECAHEDRON AND PARAMETRIC BR-SETS

A. A. Osipova (Vladimir)

Abstract

The paper is devoted to the important problem of number theory: bounded remainder sets.

We consider the point orbits on low-dimensional tori. Any starting point generates the orbit under an irrational shift of the torus. The orbit is everywhere dense and uniformly distributed on the torus if the translation vector is irrational. Denote by $r(i)$ a function that gives the number of the orbit points which get some domain T. Then we have the formula $r(i) = i\,\mathrm{vol}(T) + \delta(i)$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 16-31-00055-мол_а).

where $\delta(i) = o(i)$ is the remainder. If the boundaries of the remainder are limited by a constant, then T is a bounded remainder set (BR-set).

The article introduces a new BR-sets construction method, it is based on tilings parametric polyhedra. Considered polyhedra are the torus development. Torus development should be to tile into figures, that can be exchanged, and we again obtain our torus development. This figures exchange equivalent shift of the torus.

Author have constructed tillings with this property and two-dimensional BR-sets. The considered method gives exact estimates and the average value of the remainder. Also we obtain the optimal BR-sets which have minimal values of the remainder. These BR-sets generate the strong balanced words (a multi-dimensional analogue of the Sturmian words).

The above method is applied to the case of three-dimensional torus in this paper. Also we obtain exact estimates and the average value of the remainder for constructed sets.

Keywords: bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development.

Bibliography: 22 titles.

1. Введение

Пусть на D-мерном торе $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L^D$ задана орбита $Orb_{x_0}(\alpha)$ движения начальной точки $x_0 = (0, 0)$. Здесь L^D — полная решетка размерности D над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^D$ — вектор сдвига S_α, порождающего орбиту $Orb_{x_0}(\alpha)$.

Зададим считающую функцию $r(i)$, определяющую колличество точек орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$, попавших в некоторую облась T на торе $\mathbb{T}^D$, то есть $r(i) = \sharp\{j : 0 \leq j < i, S_\alpha^j \in T\}$, где i — общее количество точек орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$.

В случае иррационального вектора α сдвига S_α, точки орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ всюду плотно и равномерно заполняют весь тор, и для $r(i)$ справедлива ассимптотическая формула

$$r(i) = i \operatorname{Vol}(T) + \delta_T(i), \tag{1}$$

где Vol (T) — объем области T, а $\delta_T(i) = o(i)$ — остаточный член формулы (1) или отклонение считающей функции $r(i)$ от ожидаемой величины i Vol (T).

Если существует такая константа C_T, что для остаточного члена $\delta_T(i)$ справедливо неравенство $\delta_T(i) \leqslant C_T$, то множество T называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set).

Одномерные множества ограниченного остатка достаточно широко изучены. Первые примеры были построены 1921 г. Э. Гекке [1], позднее П. Эрдешем [2], Г. Кестеном [3], В. Г. Журавлевым [4], А. В. Шутовым [5].

Более сложной оказалась задача о построении множеств ограниченного остатка и определении границ отклонений в многомерном случае. Первый двумерный пример BR-множеств был получен в 1954 г. Р. Сюзом [6]. В 2005 г. В. Г. Журавлев впервые получил оценки для фрактальных множеств ограниченного остатка, построенных на основе двумерного разбиения Рози [7]. В 2011 г. была опубликована работа, в которой описывался метод Журавлева, позволяющий строить множества ограниченного остатка на основе перекладывающихся торических разверток [8]. В 2012 г. В. Г. Журавлев получил многомерное обобщение теоремы Гекке [9].

В настоящей работе приводятся некоторые результаты автора, полученные ранее с помощью нового метода построения параметрических множеств ограниченного остатка на основе гексагональных разверток тора, в частности приведена теорема о точных оценках остаточных членов для описанных множеств (*Теорема 1*), а так же разработано обобщение метода на случай трехмерных торов. Для построенных трехмерных параметрических BR-множеств доказана теорема о точных границах отклонений (*Теорема 2*) и получены их средние значения (*Теорема 3*).

Далее для удобства будем использовать верхние индексы для указания размерности, о которой идет речь.

2. Гексагональные развертки и двумерные BR-множества

В 2011 г. автором были построены трехпараметрические множества ограниченного остатка на основе перекладывающихся гексагональных разверток $T^2(c^2)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$ [10].

Развертка $T^2(c^2)$ задается параметром $c^2 = (c_1^2, c_2^2)$ из пространства параметров

$$C^2 = \{c^2 = (c_1^2, c_2^2) \in \mathbb{R}^2; c_i^2 \geqslant 0, c_1^2 + c_2^2 \leqslant 1\}$$

и является выпуклым шестиугольником, координаты вершин которого $(0,0)$, $(1 - c_1^2, -c_2^2)$, $(1,0)$, $(1 - c_1^2, 1 - c_2^2)$, $(0,1)$, $(-c_1^2, 1 - c_2^2)$ (рисунок 4).

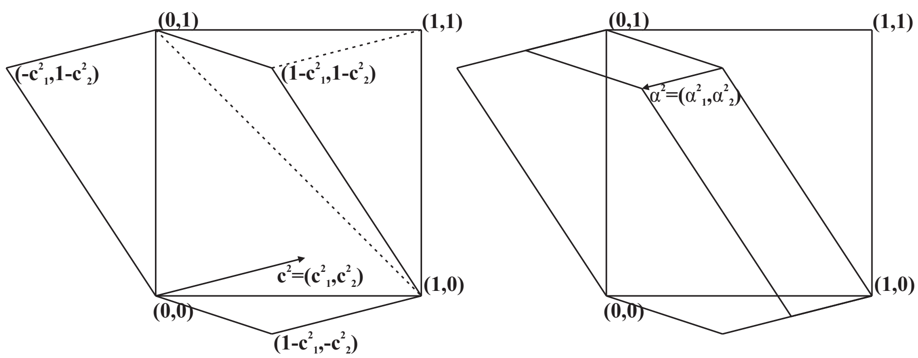

Рис. 4:

Замечание: для построения множеств ограниченного остатка на основе развертки тора необходимо разбить ее на $D + 1$ перекладывающуюся область. Перекладывание полученных областей должно вновь давать исходную развертку.

В двумерном случае такое разбиерние можно получить, отложив вкетор $-\alpha^2 = (-\alpha_1^2, -\alpha_2^2)$ от вершин шестиугольника $T^2(c^2)$ с коордмнатами $(1,0)$, $(1-c_1^2, 1-c_2^2)$, $(0,1)$ и соединив концы отложенных векторов. Здесь вектор $\alpha^2 = tc^2$, а параметр $0 < t \leqslant 1$ (рисунок 4).

Разбиение производится на три перекладывающиеся области $T_k^2, k = 0, 12$. Перекладывание областей T_k^2 соответствует сдвигу тора на вектор α^2 [11]. Области T_k^2 являются множествами ограниченного остатка, для них были получены следующие результаты [11].

Теорема 1. *Пусть дан сдвиг тора S_{α^2} на вектор α^2, и α^2 - иррациональный, т. е. числа $\alpha_1^2, \alpha_2^2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, пусть тор $\mathbb{T}^2$ разбит на области $\mathbb{T}_k^2 : \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \sqcup$ $\sqcup \mathbb{T}_2^2$, а его развертка $T^2(c^2)$ задана параметром $c^2 = (c_1^2, c_2^2) \in C^2$. Тогда для отклонений выполняются точные неравенства:*

$$\begin{array}{rll} 0 & \leqslant \delta_0(i) \leqslant & 2 - \sigma(c^2); \\ -1 & \leqslant \delta_1(i) \leqslant & c_1^2; \\ -1 & \leqslant \delta_2(i) \leqslant & c_2^2, \end{array}$$

где $\sigma(c^2) = c_1^2 + c_2^2$.

В работах автора [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17] были расширены результаты работы [10] и изучены свойства, построенных множеств, в частности найдены средние значения отклонений и доказаны теоремы об оптимизации границ отклонений.

3. Трехмерный случай

Использованный в двумерном случае метод можно обобщить на случай размерности $D = 3$.

Развертка $T^3(c^3)$ трехмерного тора $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, где $Z^3 = [l_1^3, l_2^3, l_3^3]$ — квадратная решетка с базисом $l_1^3 = (-1, 0, 0)$, $l_2^3 = (0, -1, 0)$, $l_3^3 = (0, 0, -1)$, задается параметром

$$c^3 \in C^3 = \{c^3 = (c_1^3, c_2^3, c_2^3) \in \mathbb{R}^3; c_i^3 \geqslant 0, c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 \leqslant 1\}$$

и является выпуклым ромбододекаэдром с координатами вершин $(0, 0, 0)$, $(1 - c_1^3, -c_2^3, -c_3^3)$, $(1-2c_1^3, 1-2c_2^3, -2c_3^3)$, $(-c_1^3, 1-c_2^3, -c_3^3)$, $(0, 1, 0)$, $(1-c_1^3, 1-c_2^3, -c_3^3)$, $(1, 0, 0)$, $(1-c_1^3, -c_2^3, 1-c_3^3)$, $(1 - 2c_1^3, -2c_2^3, 1 - 2c_3^3)$, $(-c_1^3, -c_2^3, 1 - c_3^3)$, $(-2c_1^3, 1 - 2c_2^3, 1 - 2c_3^3)$, $(0, 0, 1)$, $(-c_1^3, 1 - c_2^3, 1 - c_3^3)$, $(1 - 2c_1^3, 1 - 2c_2^3, 1 - 2c_3^3)$ (рисунок 5).

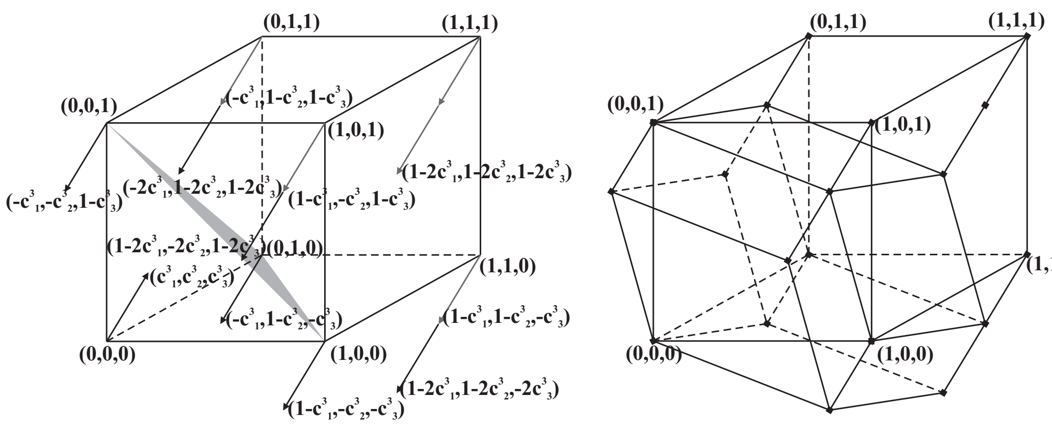

Рис. 5:

Пространство параметров C^3 обладает осью симеетрии третьего порядка, заданной уравнением $c_1^3 = c_2^3 = c_3^3$.

Разобьем развертку $T^3(c^3)$ на четыре непересекающиеся перекладывающиеся области $T_k^3, k = 0, 1, 2, 3$. Для этого используем параметр $0 < t \leqslant 1$. Отложим вектор $-\alpha^3 = = (-\alpha_1^3, -\alpha_2^3, -\alpha_3^3)$, такой что $\alpha^3 = tc^3$, от вершин ромбододекаэдра $T^3(c^3)$ с координатами $(-c_1^3, 1 - c_2^3, -c_3^3)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1 - c_1^3, -c_2^3, 1 - c_3^3)$, $(0, 0, 1)$, $(-c_1^3, 1 - c_2^3, 1 - c_3^3)$, $(1 - 2c_1^3, 1 - 2c_2^3, 1 - 2c_3^3)$ и соединим концы отложенных векторов. Получим интересующее нас разбиение $T_k^3 : T^3(c^3) = T_0^3 \sqcup T_1^3 \sqcup T_2^3 \sqcup T_3^3$. Объемы полученных областей равны $\mathrm{Vol}\,(T_0^3) = 1 - \alpha_1^3 - \alpha_2^3 - \alpha_3^3$, $\mathrm{Vol}\,(T_1^3) = \alpha_1^3$, $\mathrm{Vol}\,(T_2^3) = \alpha_2^3$, $\mathrm{Vol}\,(T_3^3) = \alpha_3^3$ соответсвенно.

Так как развертка $T^3(c^3)$ является перекладывающейся, то существует преобразование

$$S_v : T^3(c^3) \to T^3(c^3) : x \to S_v(x) = x + v_k^3, \tag{2}$$

где v_k^3 — векторы перекладывания для областей T_k^3, и они соответственно равны

$$\begin{array}{ll} v_0^3 = (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3), & v_1^3 = (\alpha_1^3 - 1, \alpha_2^3, \alpha_3^3), \\ v_2^3 = (\alpha_1^3, \alpha_2^3 - 1, \alpha_3^3), & v_3^3 = (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3 - 1). \end{array}$$

Схема перекладывания изображена на рисунке 6.

Предложение 1. *Пусть дан сдвиг $S_{\alpha^3} : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3 : x \longmapsto S_{\alpha^3}(x) = x + \alpha^3 \mathit{mod} \mathbb{Z}^3$ тора $\mathbb{T}^3$ на вектор α^3, и пусть для развертки тора $T^3(c^3)$ разбитой на области $T_k^3, k = 0, 1, 2, 3$ задано преобразование (2). Тогда выполняется равенство*

$$S_v(T^3) = S_{\alpha^3}(\mathbb{T}^3) \mathit{mod} \mathbb{Z}^3. \tag{3}$$

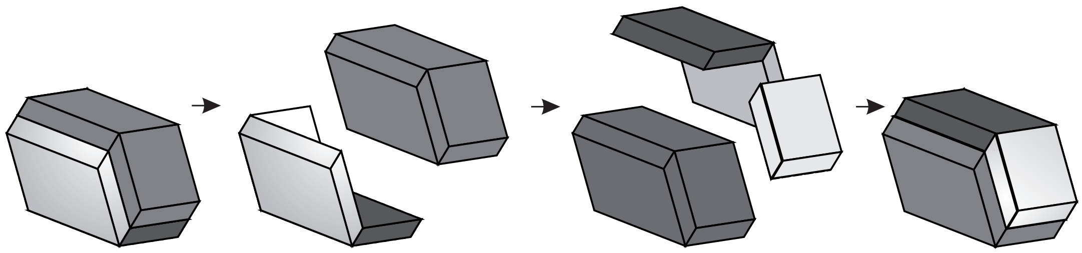

Рис. 6:

Доказательство. Так как преобразование S_v отображает ромбододекаедр $T^3(c^3)$ на себя, то для доказательства предложения достаточно показать, что для любого $x \in T^3(c^3)$ точки $S_v(x)$ и $x + \alpha^3$ различаются на векторы решетки $\mathbb{Z}^3$.

$$S_v(x) - (x+\alpha) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in T_0^3, \\ l_1^3, \text{если } x \in T_1^3, \\ l_2^3, \text{если } x \in T_2^3, \\ l_3^3, \text{если } x \in T_3^3, \end{cases}$$

где l_1^3, l_2^3, l_2^3 — базисные векторы решетки $\mathbb{Z}^3$. Равенство (3) доказано, таким образом сдвигу тора $\mathbb{T}^3$ соответствует перекладывание областей развертки $T^3(c^3)$.□

4. Границы отклонений

Так как перекладывание областей развертки $T^3(c^3)$ соответствует сдвигу тора $\mathbb{T}^3$, положение любой точки x орбиты $Orb_{x_0}(\alpha^3)$ можно определить формулой

$$\delta(i) = r_0(i)v_0^3 + r_1(i)v_1^3 + r_2(i)v_2^3 + r_3(i)v_3^3. \tag{4}$$

Функцию $\delta(i)$ будем называть суммарным векторным отклонением. Так как при перекладывании развертка тора $T^3(c^3)$ переходит сама в себя, то

$$\delta(i) \in T^3(c^3).$$

Из предложения 1 видно, что $v_0^3 = \alpha^3$, $v_{k'}^3 = \alpha^3 + l_{k'}^3$, $l_{k'}^3 \in \mathbb{Z}^3$, $k' = 1, 2, 3$, тогда выражение (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta(i) = r_0(i)\alpha^3 + r_1(i)(\alpha^3 + l_1^3) + r_2(i)(\alpha^3 + l_2^3) + r_3(i)(\alpha^3 + l_3^3) = \\ = (r_0(i) + r_1(i) + r_2(i) + r_3(i))\alpha^3 + r_1(i)l_1^3 + r_2(i)l_2^3 + r_3(i)l_3^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Общее количество точек орбиты

$$i = r_0(i) + r_1(i) + r_2(i) + r_3(i), \tag{6}$$

отсюда и формулы (5) получаем

$$\delta(i) = i\alpha^3 + r_1(i)l_1^3 + r_2(i)l_2^3 + r_3(i)l_3^3. \tag{7}$$

Решетка $\mathbb{Z}^3$ полная. Для ее базиса l_1^3, l_2^3, l_3^3 существует двойственный базис $l_1^{3*}, l_2^{3*}, l_3^{3*}$, связанный с исходным соотношением

$$l_m^* \cdot l_{k'} = \begin{cases} 0, \text{ при } m \neq k' \\ 1, \text{ при } m = k', \end{cases} \tag{8}$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение, m = 1,2,3, k = 1,2,3. Из (8) получаем координаты векторов двойственного базиса $l_1^{3*} = (-1,0,0)$, $l_2^{3*} = (0,-1,0)$, $l_3^{3*} = (0,0,-1)$. В данном случае он совпадает с базисом решетки $\mathbb{Z}^3$.

Используя (7) и (8), получаем равенства

$$l_{k'}^{3*} \cdot \delta(i) = r_{k'}(i) + i l_{k'}^{3*} \cdot \alpha^3 \text{ для } k' = 1,2,3. \tag{9}$$

Обозначим

$$\delta_{k'}(i) = l_{k'}^{3*} \cdot \delta(i) \tag{10}$$

и перепишем (9)в виде

$$\delta_{k'}(i) = r_{k'}(i) - i \text{ Vol } T_{k'}^3 \text{ для } k' = 1,2,3, \tag{11}$$

где

$$\text{Vol } T_{k'}^3 = -l_{k'}^{3*} \cdot \alpha^3. \tag{12}$$

Найдем теперь формулу для $\delta_0(i)$. Из (6) и тождества $\text{Vol } T_0^3 + \text{Vol } T_1^3 + \text{Vol } T_2^3 + \text{Vol } T_3^3 = 1$, имеем

$$[r_0(i) - i \text{ Vol } T_0^3] + [r_1(i) - i \text{ Vol } T_1^3] + [r_2(i) - i \text{ Vol } T_2^3] + [r_2(i) - i \text{ Vol } T_3^3] = 0.$$

По аналогии с отклонениями $\delta_{k'}(i)$ (10) определим нулевое отклонение

$$\delta_0(i) = r_0(i) - i \text{ Vol } T_0^3.$$

Тогда между всеми отклонениями $\delta_k(i), k = 0,1,2,3$ выполняется соотношение

$$\delta_0(i) + \delta_1(i) + \delta_2(i) + \delta_3(i) = 0$$

для всех $i = 0,1,2,\ldots$. Для нулевого отклонения получаем представление

$$\delta_0(i) = -\delta_1(i) - \delta_2(i) - \delta_3(i), \tag{13}$$

или согласно (10) и (13) для отклонения $\delta_0(i)$ можем записать

$$\delta_0(i) = -l_1^{3*}\delta(i) - l_2^{3*}\delta(i) - l_3^{3*}\delta(i) = -(l_1^{3*} + l_2^{3*} + l_3^{3*}) \cdot \delta(i).$$

Определим в дополнение к векторам (8) вектор l_0^{3*} равенством

$$l_0^{3*} = -l_1^{3*} - l_2^{3*} - l_3^{3*}, \tag{14}$$

тогда для отклонения $\delta_0(i)$ будет следовать представление

$$\delta_0(i) = l_0^{3*} \cdot \delta(i), \tag{15}$$

где $l_0^{3*} = (1,1,1)$.

Обобщая результаты формул (11) — (15) получаем

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i \text{ Vol } T_k^3 \text{ для } k = 0,1,2,3,$$

— отклонения считающих функций от ожидаемой величины или остаточные члены равномерного распределения для областей T_k^3, $k = 0,1,2,3$.

Теорема 2. *Пусть дан сдвиг тора S_{α^3} на вектор α^3, и α^3 - иррациональный, т. е. числа $\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, пусть тор $\mathbb{T}^3$ разбит на области*

$$\mathbb{T}_k^3 : \mathbb{T}^3 = \mathbb{T}_0^3 \sqcup \mathbb{T}_1^3 \sqcup \mathbb{T}_2^3, \sqcup \mathbb{T}_3^3,$$

а его развертка $T^3(c^3)$ задана параметром $c^3 = (c_1^3, c_2^3, c_3^3) \in C^3$. Тогда для отклонений $\delta_k(i)$ выполняются точные неравенства:

$$\begin{array}{rll} 0 & \leqslant \delta_0(i) \leqslant & 3 - 2\sigma(c^3); \\ -1 & \leqslant \delta_1(i) \leqslant & 2c_1^3; \\ -1 & \leqslant \delta_2(i) \leqslant & 2c_2^3, \\ -1 & \leqslant \delta_3(i) \leqslant & 2c_3^3, \end{array} \tag{16}$$

где $\sigma(c^3) = c_1^3 + c_2^3 + c_3^3$.

Доказательство. Из формул (11) и (15) следует, что границы отклонений $\delta_k(i)$ могут быть определены, как проекции сумарного векторного отклонения $\delta(i)$ на векторы базиса $l_1^{3*}, l_2^{3*}, l_3^{3*}$ двойственного базису квадратной решетки $\mathbb{Z}^3$ и вектор l_0^{3*} в случае $\delta_0(i)$.

Ромбододекаедр $T^3(c^3)$ является компактным множеством, поэтому для определения границ отколнений достаточно проверить проекции координат его вершин на направления векторов $l_0^{3*} = (1,1,1)$, $l_1^{3*} = (-1,0,0)$, $l_2^{3*} = (0,-1,0)$, $l_3^{3*} = (0,0,-1)$. Получим следующее множество значений (таблица 1).

n	Координаты вершины x_n	Значение $x \cdot l_0^{3*}$	Значение $x \cdot l_1^{3*}$	Значение $x \cdot l_2^{3*}$	Значение $x \cdot l_3^{3*}$
1.	$(0,0,0)$	0	0	0	0
2.	$(1-c_1^3, -c_2^3, -c_3^3)$	$1-\sigma(c^3)$	$c_1^3 - 1$	c_2^3	c_3^3
3.	$(-c_1^3, -c_2^3, 1-c_3^3)$	$1-\sigma(c^3)$	c_1^3	c_2^3	$c_2^3 - 1$
4.	$(-c_1^3, 1-c_2^3, -c_3^3)$	$1-\sigma(c^3)$	c_1^3	$c_2^3 - 1$	c_2^3
5.	$(1-2c_1^3, -2c_2^3, 1-2c_3^3)$	$2-2\sigma(c^3)$	$2c_1^3 - 1$	$2c_2^3$	$2c_2^3 - 1$
6.	$(1-2c_1^3, 1-2c_2^3, -2c_3^3)$	$2-2\sigma(c^3)$	$2c_1^3 - 1$	$2c_2^3 - 1$	$2c_2^3$
7.	$(-2c_1^3, 1-2c_2^3, 1-2c_3^3)$	$2-2\sigma(c^3)$	$2c_1^3$	$2c_2^3 - 1$	$2c_2^3 - 1$
8.	$(1,0,0)$	1	-1	0	0
9.	$(0,0,1)$	1	0	0	-1
10.	$(0,1,0)$	1	0	-1	0
11.	$(1-c_1^3, -c_2^3, 1-c_3^3)$	$2-\sigma(c^3)$	$c_1^3 - 1$	c_2^3	$c_2^3 - 1$
12.	$(1-c_1^3, 1-c_2^3, 1-c_3^3)$	$2-\sigma(c^3)$	$c_1^3 - 1$	$c_2^3 - 1$	c_2^3
13.	$(-c_1^3, 1-c_2^3, 1-c_3^3)$	$2-\sigma(c^3)$	c_1^3	$c_2^3 - 1$	$c_2^3 - 1$
14.	$(1-2c_1^3, 1-2c_2^3, 1-2c_3^3)$	$3-2\sigma(c^3)$	$2c_1^3 - 1$	$2c_2^3 - 1$	$2c_2^3 - 1$

Таблица 1.

Достаточно выбрать наибольшее и наименьшее значение из соответствующего столбца таблицы 1, учитывая, что $c_1^3 \geqslant 0$, $c_2^3 \geqslant 0$, $c_3^3 \geqslant 0$, а также $\sigma(c^3) \leqslant 1$. Неравенства (16) доказаны.

Так как вектор $\alpha^3 = (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3)$ иррациональный, то на основании критерия равномерного распределения Вейля [18], точки орбиты $Orb_{x_0}(\alpha^3)$ всюду плотно заполняют развертку тора $T^3(c^3)$. Положение точки на развертке определяется вектором $\delta(i)$. На основании вышесказанного, веторы $\delta(i)$ сколь угодно близко подходят к вершинам развертки, а на основании формул (11) и (15) отклонения $\delta_k(i)$, для областей $T_k^3, k = 0,1,2,3$ определяются проекциями $\delta(i)$ на векторы l_0^{3*}, l_1^{3*}, l_2^{3*}, l_3^{3*}, что доказывает точность границ отклонеий (16). □

5. Средние значения отклонений

Определим для любого $x \in \mathbb{R}^3$ векторную дробную часть $Fr(x)$, полагая $Fr(x) = x'$, где $x' = x \bmod \mathbb{Z}^3$ и $x' \in T^3(c^3)$.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$\delta(i) = Fr(i\alpha). \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим перекладывание (2). Тогда

$$S_v^i = i\alpha^3 + r_1(i)v_1^3 + r_2(i)v_2^3 + r_3(i)v_3^3,$$

т. е.

$$S_v^i = \delta(i).$$

Из этого равенства, предложения 1 и определения векторной дробной части следует соотношение (17).□

Определим среднее значение векторного отклонения

$$\langle\delta\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(i), \tag{18}$$

если предел существует.

Теорема 3. *Пусть задана развертка $T^3(c^3)$ трехмерного тора $\mathbb{T}^3$, разбитая на области $T_k^3, k = 0,1,2,3$. Пусть дан сдвиг S_{α^3} тора $\mathbb{T}^3$ на иррациональный вектор α^3. 1. Тогда существует среднее значение $\langle\delta\rangle$ (18) сумарного векторного отклонения $\delta(i)$, и оно вычисляется по формуле*

$$\langle\delta\rangle = C_{T^3(c^3)}, \tag{19}$$

где $C_{T^3(c^3)} = (\frac{1-c_1^3}{2}, \frac{1-c_2^3}{2}, \frac{1-c_3^3}{2})$ —центр тяжести фигуры $T^3(c^3)$.

2. Также для любого $k = 0,1,2,3$ существуют средние значения отклонений

$$\langle\delta_k\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta_k(i),$$

и они соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle\delta_0\rangle &= 1 - \tfrac{\sigma(c^3)}{2}, \\ \langle\delta_1\rangle &= -\tfrac{1-c_1^3}{2}, \\ \langle\delta_2\rangle &= -\tfrac{1-c_2^3}{2}, \\ \langle\delta_3\rangle &= -\tfrac{1-c_3^3}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Доказательство. Из формулы (17) следует

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} Fr(i\alpha). \tag{21}$$

Для доказательства (19) воспользуемся формулой (21) и критерием Вейля

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(i) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} Fr(i\alpha) = \int\limits_{T^3(c^3)} x dx = C_{T^3(c^3)}.$$

Для доказательства формулы (20) найдем проекции выражения (19) на направления векторов l_0^{3*}, l_1^{3*}, l_2^{3*}, l_3^{3*}.□

6. Заключение

Рассмотренный автором подход к построению двумерных и трехмерных множеств ограниченного остатка позволяет получать для остаточных членов равномерного распределения точные оценки, а так же находить средние значения отклонений. Как и в двумерном случае для трехмерных множеств может быть построена оптимизация границ отклонений, а на основе множеств ограниченного остатка, построенных оптимальным образом, могут быть получены сбалансированные последовательности, имеющие применение в таких областях, как динамические системы, теория кодов, теория коммуникации и задачи оптимизации, теория языков и лингвистика, теория распознавания и статистическая физика (Kawasaki-Ising model), например [19], [20], [21], [22].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. // Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. V. 5. P. 54-76.
2. Erdös P. Problems and results on diophantine approximation // Comp. Math. 1964. V. 16. P. 52–65.
3. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. V. 12. P. 193–212.
4. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71. Вып. 2. С. 89–122.
5. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 5. Вып. 3. С. 112–121.
6. Szüsz, R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats/ R. Szüs// Acta Math. Acad. Sci. Hungar. —1954. — № 5. — P. 35-39.
7. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83-106.
8. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества огранниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. № 392. С. 95–145.
9. Журавлев В. Г., Многомерное обобщение теоремы Гекке // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24. Вып. 1. С. 1–33.
10. Абросимова А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4(40). С. 15–23.
11. Абросимова А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2012. № 5(124). Вып. 26. С. 5–11.
12. Абросимова, А. А. Произведение торических разверток и построение множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Ученые записки орловского государственного университета. Серия: естественные, технические и медицинские науки. — 2012. — № 6. — Ч.2. — С. 30-37.

13. Абросимова, А. А. Фрактальные множества ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых ученых. - Нальчик: ООО"Редакция журнала Эльбрус". — 2012. —С. 18–21.

14. Абросимова, А. А. Оптимизация границ отклонений для множеств ограниченного остатка на двумерном торе/ А. А. Абросимова, Д. А. Блинов, Т. В. Полякова// Чебышевский сборник. — 2013. — Т. 14. — Вып. 1(45). — С. 9–17.

15. Абросимова, А. А. Границы отклонений для трехмерных множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2013. — № 19(162). — Вып. 32. — С. 5–21.

16. Абросимова, А. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных множеств ограниченного остатка/ А. А. Абросимова, Д. А. Блинов// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2013. — № 26(169). — Вып. 33. — С. 5–13.

17. Абросимова, А. А. BR-множества/ А. А. Абросимова // Чебышевский сборник. — 2015. — Т. 16. Вып. 2(54). — С. 8–22.

18. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzph änomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. 1910. V. 30. P. 377-407.

19. Knuth, D. Ecient balanced codes/ D. Knuth//IEEE Trans. Inf. Theory. — 1986. — V. IT-32. — №. 1. — P. 51-53.

20. Altman, E. Balanced Sequences and Optimal Routing/ E. Altman, B. Gaujual, A. Hordijk// Journal of Association for Computing Machinery. — 2000. — № 4. — P. 752 – 775.

21. Vuillon, L. Balanced words/ L. Vuillon// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2003. — № 10. — P. 787 – 805.

22. Heinis, A. Languages under substitutions and balanced words/ A. Heinis// J. de Theories des Nombres de Bordeaux. — 2004. — № 16. — P. 151-172.

REFERENCES

1. Abrosimova, A. A. 2011. "Bounded remainder sets on a two-dimensional torus", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no. 4(40), pp. 15–23.

2. Abrosimova, A. A. 2012. "Average values for deviation distribution of points on the torus", *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics & Physics*, vol. 5(124), no. 26, pp. 5–11.

3. Abrosimova, A. A. 2012. "Multiplication of toric developments and constructing of bounded remainder sets", *Uchenye zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Yestestvennyye, tekhnicheskiye i meditsinskiye nauki*, no. 6, part 2, pp. 30–37.

4. Abrosimova, A. A. 2012. "Fractal bounded remainder sets", *Materialy II Mezhdunarodnoy konferentsii molodykh uchenykh "Matematicheskoye modelirovaniye fraktal'nykh protsessov, rodstvennyye problemy analiza i informatiki" (II Int. Conf. Proc. of Young Scientists "Mathematical Modeling of Fractal Processes of Analysis and Informatics)*, Nalchik, pp. 18–21.

5. Abrosimova, A. A., Blinov, D. A. & Polyakova, T. V. 2013. “Optimization of boundaries of remainder for bounded remaider sets on two-dimensional torus”, *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, no. 1(45), pp. 9–17.

6. Abrosimova, A. A., 2013. “Boundaries of deviations for three-dimensional bounded remainder sets”, *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics & Physics*, vol. 19(162), no. 32, pp. 5–21.

7. Abrosimova, A. A. & Blinov, D. A. 2013. “Boundaries optimization of two-dimensional bounded remainder sets”, *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematics & Physics*, vol. 26(169), no. 33, pp. 5–13.

8. Abrosimova, A. A., 2015. “BR-sets”, *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, no. 2(54), pp. 8–22.

9. Altman, E., Gaujual B. & Hordijk A. 2000. “Balanced Sequences and Optimal”, *Routing Journal of Association for Computing Machinery*, no 4, pp. 752–775.

10. Erdös, P. 1964. “Problems and results on diophantine approximation”, *Comp. Math.*, vol. 16, pp. 52–65.

11. Hecke, E. 1921. “Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins”, *Math. Sem. Hamburg. Univ.*, vol. 5, pp. 54–76.

12. Heinis, A. 2004. “Languages under substitutions and balanced words”, *J. de Theories des Nombres de Bordeaux*, no 16, pp. 151–172.

13. Kesten, H. 1966. “On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1”, *Acta Arithmetica*, vol. 12, pp. 193–212.

14. Knuth, D. 1986. “Ecient balanced codes”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-32, no. 1, pp. 51–53.

15. Shutov, A. V. 2007. “Optimum estimates in the problem of the distribution of fractional parts of the sequence $n\alpha$”, *Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, vol. 5, no. 3, pp. 112–121.

16. Szüsz, R. 1954. “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, no. 5, pp. 35–39.

17. Vuillon, L. 2003. “Balanced words”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, no 10, pp. 787–805.

18. Weyl, H. 1910. “Über die Gibbs’sche Erscheinung und verwandte Konvergenzph änomene” *Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo*, vol. 30, pp. 377–407.

19. Zhuravlev, V. G. 2005. “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 322, pp. 83–106.

20. Zhuravlev, V. G. 2007. “One-dimensional Fibonacci tilings”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 71, no. 2, pp. 89–122.

21. Zhuravlev, V. G. 2011. “Exchanged toric developments and bounded remainder sets”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 392, pp. 95–145.

22. Zhuravlev, V. G. 2012. “Multidimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts”, *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 1–33.

Владимирский филиал Российского университета кооперации
Получено 12.12.2015 г.
Принято в печать 11.03.2016 г.