ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-201-208

О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа 2

Х. аль-Ассад

Хафез аль-Ассад — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Аннотация

В данной работе найден аналог формулы А. Г. Постникова для примитивных характеров Дирихле по модулю, равному степени простого числа два. Вывод основан на детальном рассмотрении алгебраической структуры приведенной системы вычетов по модулю степени простого числа два.

Ключевые слова: характеры Дирихле, формула Постникова, суммы характеров.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
Х. аль-Ассад. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа 2 // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 201–208.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-201-208

On the character sums modulo equal of the power prime number 2

H. Al-Assad

Hafez Al-Assad — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Abstract

In this paper the analog of A.G.Postnikov formula for a primitive Dirichlet's character on modulo equals a prime-power of number two is found. The deduction is based on the detail consideration the algebraic structure of a reducing of a residues system modulo of a prime-power of the number two.

Keywords: Dirichlet's character, Postnikov's formula, character sums.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
H. Al-Assad, 2022, “On the character sums modulo equal of the power prime number 2”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 201–208.

1. Введение

В 1955 г. А.Г.Постников нашел формулу, выражающую значения характера Дирихле по модулю, равному степени нечетного простого числа, в виде экспоненты с мнимым показателем и с многочленом в экспоненте. Тем самым задача об оценке неполной суммы характеров была сведена к оценке сумм Г.Вейля.

Дирихле (1837 г.) ввел в рассмотрение характеры для изучения распределения простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть $D > 1$ — натуральное число, $(l, D) = 1$ и x — любое достаточно большое число. Тогда из расширенной гипотезы Римана при любом $D \leq x^{1/2-\varepsilon}$ для числа $\pi(x; D, l)$ простых чисел $p \leq x, p \equiv l \pmod D$ следует асимптотическая формула

$$\pi(x; D, l) = \frac{\pi(x)}{\varphi(D)}(1 + O((\ln x)^{-M})),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная, а M — как угодно велико.

Пусть $\tau_k(n)$ обозначает число решений в натуральных числах уравнения $x_1 \dots x_k = n$. Тогда из расширенной гипотезы Римана при $D \leq x^{1/2-\varepsilon}$ и $x \to \infty$ имеем асимптотику

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{x Q_k(\ln x)}{\varphi(D)}(1 + O((\ln x)^{-M})),$$

где $Q_k(x)$ — многочлен степени $k-1$ от переменной x с действительными коэффициентами, зависящими от k.

В настоящее время вышеприведенные асимптотики не удается получить. Тем не менее для последовательности чисел D, являющихся степенями фиксированного нечетного простого числа подобные асимптотики получены при $D \leq x^{3/8-\varepsilon}$ (1964 г., М. Б. Барбан, Ю. В. Линник, Н. Г. Чудаков) и (1979 г., М. М. Петечук).

В настоящей работе дан вывод аналога формулы А. Г. Постникова для примитивных характеров Дирихле по модулю, равному степени числа два.

2. Леммы о мультипликативной структуре приведенной системы вычетов по модулю, равному степени простого числа

Пусть p — простое число, μ — натуральное число. Как известно, приведенная система вычетов по модулю, равному $p^\mu, p > 2, \mu \geq 1$, степени простого числа, является циклической группой по умножению порядка $\varphi(p^\mu) = (p-1)p^{\mu-1}$. Ее обозначим P_μ. Группа P_μ разлагается в прямое произведение циклических групп P'_μ порядка $p-1$ и P''_μ порядка $p^{\mu-1}$. Данное утверждение основано на следующих леммах. Первая из них является следствием бинома Ньютона.

Лемма 1. *Пусть $p \neq 2$ — простое число g — любое целое число, $c \equiv 1 + gp \pmod{p^2}$. Тогда*

$$c^{p^{\mu-1}} \equiv 1 + gp^\mu \pmod{p^{\mu+1}}, \text{ если } \mu \geq 1.$$

Пусть, далее, $p = 2, c \equiv 1 + g2^2 \pmod{2^3}$. Тогда

$$c^{2^{\mu-2}} \equiv 1 + g2^\mu \pmod{2^{\mu+1}}, \text{ если } \mu \geq 2.$$

Доказательство см. [3], лемма 3, с.85.

Индукцией по параметру μ из леммы 1 выводится следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $p > 2$ — простое число, $\mu \geq 2$ — натуральное. Тогда группа P'_μ порождается классом вычетов w по модулю p^μ, образованным любым первообразным корнем w_0 по модулю p и удовлетворяющим сравнению $w \equiv w_0^{p^{\mu-1}} \pmod{p^\mu}$, причем выполняются сравнения*

$$w \equiv w_0 \pmod{p}, \quad w^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^\mu}.$$

Группа P''_μ порождается при любом $g \not\equiv 0 \pmod{p}$ по рождается классом вычетов $1 + gp \pmod{p^\mu}$, например, $1 + p \pmod{p^\mu}$.

Доказательство см. [3], п. е), с.87.

Далее, из прямого произведения $P_\mu = P'_\mu \otimes P''_\mu$, находим следующее представление.

Лемма 3. *Пусть $p > 2, \mu \geq 2$. Тогда любой элемент $a \in P_\mu$ единственным образом представляется в виде*

$$a \equiv w^{\alpha'}(1+p)^{\alpha''} \pmod{p^\mu}, 0 \leq \alpha' < p, 0 \leq \alpha'' \leq p^{\mu-1},$$

где w — первообразный корень по модулю p с условием $w^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^\mu}$.

Доказательство см. [3], III, с.88.

Другими словами, вычеты $w; 1+p$ являются базисом циклической группы P_μ. Это означает, что мультипликативным операциям в P_μ взаимно однозначно отвечают аддитивные операции с показателями $\alpha' \pmod{(p-1)}$ и $\alpha'' \pmod{p^{\mu-1}}$.

Весьма интересным представляется случай $p = 3$. В лемме 3 можно положить $w = -1$. Тогда для любого вычета a, взаимно простого с 3, получим

$$a \equiv (-1)^{\alpha'} 4^{\alpha''} \pmod{3^\mu},$$

причем, если a пробегает приведенную систему вычетов по модулю p^μ, т.е. все элементы группы P_μ, то показатели α' и α'' независимо друг от друга пробегают соответственно полные системы вычетов по модулям 2 и $3^{\mu-1}$ (см. [3], примеры, с.90). Этот случай $p = 3$ позволяет сформулировать подобное утверждение для $p = 2$.

3. О структуре приведенной системы вычетов по модулю степени простого числа 2

Приведенная система вычетов по модулю, равному степени $\mu \geq 1$ простого числа 2 состоит из $\varphi(2^\mu) = 2^{\mu-1}$ вычетов. При $\mu \geq 2$ эта система вычетов образует мультипликативную группу P_μ, которая является прямым произведением двух циклических групп P'_μ и P''_μ соответственно порядков 2 и $2^{\mu-2}$.

Лемма 4. *Пусть $p = 2, \mu \geq 3$. Тогда для любого $a \in P_\mu$ имеет место однозначное представление через базисные классы вычетов по модулю 2^μ вида*

$$a \equiv (-1)^{\alpha'} 5^{\alpha''} \pmod{2^\mu},$$

где показатели α' и α'' независимо друг от друга пробегают соответственно полные системы вычетов по модулям 2 и $2^{\mu-2}$.

Доказательство см. [3], V, с.92.

Отметим отличие циклической группы P_μ при $p > 2$, т.е. существование в ней первообразного корня по модулю p^μ, от группы P_μ при $p = 2, \mu \geq 3$, в которой для любого нечетного числа a справедливо сравнение $a^{2^{\mu-2}} \equiv 1 \pmod{2^\mu}$, т.е. в P_μ отсутствуют элементы порядка $\varphi(2^\mu) = 2^{\mu-1}$, а циклическая группа P''_μ по лемме 1 порождается при нечетном g вычетом $1 + 4g$ по модулю p^μ, например, классом вычетов числа 5 по модулю 2^μ, причем $5^{2^{\mu-3}} \not\equiv 1 \pmod{2^\mu}, 5^{2^{\mu-2}} \equiv 1 \pmod{2^\mu}$.

4. Характер Дирихле по модулю степени простого числа

Характер Дирихле по модулю натурального числа $m>1$ определяется на абелевой мультипликативной группе классов вычетов, взаимно простых с модулем m, как периодическая вполне мультипликативная функция, отличная от нуля на области определения. Для заданного m существует $\varphi(m)$ характеров. Они образуют группу, изоморфную группе вычетов из приведенной системе вычетов по модулю m (принцип двойственности). Любой характер χ по модулю $m=\prod\limits_{p^{\nu_p(m)}\|m} p^{\nu_p(m)}$ можно единственным образом представить в виде

$$\chi=\prod_{p|m}\chi_{p^{\nu_p(m)}}.$$

Поэтому дальнейшее изучение группы характеров проведем для приведенной системы вычетов по модулю степени простого числа p^ν.

По леммам 3 и 4 и по принципу двойственности ([3], с.237) имеем, что любой характер по модулю p^ν при $p\neq 2$ и $\nu>1$ имеет единственное представление в виде

$$\chi(x)=\chi_p^{\kappa'}(x)\chi_{p^\nu}^{\kappa''}(x),\quad \kappa' \pmod{(p-1)}, \kappa'' \pmod{p^{\nu-1}}$$

и при $p=2,\nu>2$ имеем

$$\chi(x)=\chi_4^{\kappa'}(x)\chi_{2^\nu}^{\kappa''}(x),\quad \kappa' \pmod 2, \kappa'' \pmod{2^{\nu-2}},$$

где $\chi_p(a)=e^{2\pi i\frac{\alpha'}{p-1}}$, а при $\nu>1$ имеем $\chi_{p^\nu}(a)=e^{2\pi i\frac{\alpha''}{p^{\nu-1}}}$, и соответственно при $p=2,\nu>2$ находим

$$\chi_4(a)=(-1)^{\alpha'}, \chi_{2^\nu}(a)=e^{2\pi i\frac{\alpha''}{2^{\nu-2}}},$$

причем характер будет примитивным по модулю p^ν, если при $p\neq 2$ имеем $\kappa'\not\equiv 0 \pmod{(p-1)}$ для $\nu=1$, и $\kappa''\not\equiv 0 \pmod p$ для $\nu>1$, и соответственно для $p=2$ находим $\kappa'\not\equiv 0 \pmod 2$ для $\nu=2$, и $\kappa''\not\equiv 0 \pmod 2$ для $\nu>2$.

5. Представление характера Дирихле по модулю степени простого числа в виде экспоненты с мнимым полиномиальным показателем

Будем рассматривать только примитивные характеры по модулю степени простого числа $p^\nu,\nu>1$. Пусть (лемма 3)

$$a\equiv w^{\alpha'}(1+p)^{\alpha''} \pmod{p^\nu}, b\equiv w^{\beta'}(1+p)^{\beta''} \pmod{p^\nu}.$$

Тогда из п.4 следует, что

$$\chi(ab)=e^{2\pi i\kappa'\frac{\alpha'+\beta'}{p-1}}\cdot e^{2\pi i\kappa''\frac{\alpha''+\beta''}{p^{\nu-1}}}.$$

Подобно, воспользовавшись леммой 4, при $p=2,\nu>2$, находим

$$a\equiv(-1)^{\alpha'}5^{\alpha''} \pmod{2^\nu}, b\equiv(-1)^{\beta'}5^{\beta''} \pmod{2^\nu}.$$

Вновь, пользуясь результатами из п.4, при $\nu>2$ получим

$$\chi(ab)=(-1)^{\kappa'(\alpha'+\beta')}\cdot e^{2\pi i\kappa''\frac{\alpha''+\beta''}{2^{\nu-2}}}.$$

Другими словами, для $\alpha' = \alpha'(a), \beta' = \beta'(b)$ и $\alpha'' = \alpha''(a), \beta'' = \beta''(b)$ имеем сравнения

$$\alpha'(ab) \equiv \alpha'(a) + \beta'(b) \pmod{(p-1)}, \alpha''(ab) \equiv \alpha''(a) + \beta''(b) \pmod{p^{\nu-1}}$$

если $p \neq 2, \nu > 1$, а при $p = 2, \nu > 2$ приходим к сравнениям вида

$$\alpha'(ab) \equiv \alpha'(a) + \beta'(b) \pmod 2, \alpha''(ab) \equiv \alpha''(a) + \beta''(b) \pmod{2^{\nu-2}}.$$

Положим $a \equiv 1 + px \pmod{p^2}$ при $p \neq 2$ и $a \equiv 1 + 4x \pmod 8$. Имеем $\alpha' \equiv 0 \pmod{(p-1)}$ или $\alpha' \equiv 0 \pmod 2$.

Отсюда вытекает, что при $p \neq 2, \nu > 1, 0 \leq s \leq \nu - 1$, справедливо равенство

$$\chi(1+p)^s = e^{2\pi i s \kappa'' \frac{\alpha''}{p^{\nu-1}}}, \alpha'' = \alpha''(1+p),$$

т.е. α'' — функция от вычета $1 + p$.

Подобно при $p = 2, \nu \geq 3, 0 \leq s \leq \nu - 2$, получим

$$\chi(5^s) = e^{2\pi i s \kappa'' \frac{\alpha''}{2^{\nu-2}}}, \alpha'' = \alpha''(5).$$

6. Формула Постникова и ее обобщения

Для полноты изложения приведем схему вывода формулы А.Г.Постникова. Это придаст определенную ясность нашим выводам при $p = 2$.

Теорема 1. (А. Г. Постников). *Пусть $p > 2$ — простое, n — натуральное, $n \neq ap^f - \nu$, $f \geq 1$, $0 \leq \nu \leq f$, $(a, p) = 1$. Пусть χ — примитивный характер по модулю p^n. Тогда найдется $(\Lambda, p) = 1$ такое, что*

$$\chi(1+pu) = e^{2\pi i \Lambda \frac{F_n(1+pu)}{p^n}},$$

где

$$F_n(1+pu) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(pu)^k}{k}.$$

Доказательство.

Шаг 1. По лемме 3 при $p > 2$ циклическая мультипликативная группа приведенной системы вычетов по модулю $p^n, n \geq 1$, порожденная первообразным корнем g по модулю p^n, является прямым произведением циклических P'_n и P''_n соответственно порядков $p - 1$ и p^{n-1}, причем группа P''_n порождается, например, вычетом $1 + p$ по модулю p^{n-1}.

Шаг 2. Для любого целого p-адического числа u функция $\ln(1 + pu)$ разлагается в сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(pu)^k}{k} = \ln(1+pu),$$

причем при любых целых p-адических u_1, u_2 справедливо тождество

$$\ln((1+pu_1)(1+pu_2)) = \ln(1+pu_1) + \ln(1+pu_2).$$

Следовательно, для многочлена

$$F_n(1+pu) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{(pu)^k}{k}$$

имеем
$$F_n((1+pu_1)(1+pu_2)) \equiv F_n(1+pu_1) + F_n(1+pu_2) \pmod{p^n}.$$

Для того, чтобы обеспечить справедливость последнего сравнения необходимо потребовать выполнения следующего условия

$$n+\nu-1-\alpha_{n+\nu} > n-1-\alpha_{n-1},$$

где α_k определяется из равенства $k = p^{\alpha_k}k_1, (k_1, p) = 1$. Пусть $n+\nu = ap^f, (a,p) = 1$, т.е. $f = \alpha_{n+p}$. Следовательно, $f-\nu < \alpha_{n-1}$. Поэтому $n \neq ap^f - \nu, f-\nu \geq \alpha_{n-1} \geq 0$. Окончательно, имеем для любого натурального $f \geq 1$ величина n удовлетворяет неравенствам $n \neq ap^f - \nu, 0 \leq \nu \leq f$.

Шаг 3. Далее, при $p \neq 2$ имеем $p^{-1}F_n(1+p) \equiv 1 \pmod p$ и $\alpha''(1+p) \not\equiv 0 \pmod p$. Отсюда получим, что найдется число $\Lambda \not\equiv 0 \pmod p$ и такое, что

$$\alpha''(1+p) \equiv \Lambda p^{-1}F_n(1+p) \pmod{p^{n-1}}.$$

Шаг 4. Поскольку группа P''_n — циклическая и вычет $1+p$ является ее образующей по модулю p^{n-1}, вычеты $(1+p)^s$ при $0 \leq s < p^{n-1}$ пробегают все элементы группы P''_n. Значит, для любого u по модулю p^{n-1} найдется единственное число s такое, что

$$1+pu \equiv (1+p)^s \pmod{p^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$s\alpha''(1+p) \equiv \alpha''((1+p)^s) \equiv \Lambda p^{-1}F_n((1+p)^s) \equiv p^{-1}F_n(1+pu) \pmod{p^{n-1}}.$$

Таким образом,
$$\chi(1+pu) = e^{2\pi i\Lambda \frac{F_n(1+pu)}{p^{n-1}}}.$$

Теорема 2. *Пусть n — натуральное, $n \neq a2^f - \nu, f \geq 1, 0 \leq 2\nu \leq f, (a,p) = 1$. Пусть χ — примитивный характер по модулю 2^n. Тогда найдется $(\Lambda, 2) = 1$ такое, что*

$$\chi(1+4u) = e^{2\pi i\Lambda \frac{F_n(1+4u)}{2^n}},$$

где
$$F_n(1+4u) \equiv \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(4u)^k}{k}.$$

Доказательство.

Шаг 1. По лемме 4 при $p=2$ и $n \geq 3$ мультипликативная группа приведенной системы вычетов не является циклической, но представляет собой прямое произведение циклических групп P'_n и P''_n соответственно порядков 2 и 2^{n-2}, причем группа P''_n порождается, например, вычетом 5 по модулю 2^{n-2}.

Шаг 2. Для любого целого 2-адического числа u имеем разложение $\ln(1+4u)$ в сходящийся степенной ряд вида
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(4u)^k}{k} = \ln(1+4u),$$

обладающий функциональным свойством функции логарифм:

$$\ln((1+4u_1)(1+4u_2)) = \ln(1+4u_1) + \ln(1+4u_2),$$

где u_1 и u_2 — любые целые 2-адические числа.

Следовательно, для многочлена

$$F_n(1+4u) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{(4u)^k}{k}$$

имеем

$$F_n((1+4u_1)(1+4u_2)) \equiv F_n(1+4u_1) + F_n(1+4u_2) \pmod{2^n}.$$

Пусть $k = 2^{\alpha_k} k_2, (2, k_2) = 1$ и пусть $2n + 2\nu - 2 - \alpha_{n+\nu} \leq 2n - 2 - \alpha_{n-1}$. Представим $n + \nu$ в виде $n + \nu = a2^f, (a, 2) = 1$. Тогда $f = \alpha_{n+p}$. Далее находим $f - 2\nu \geq \alpha_{n-1} \geq 0$. Отсюда следует, что формула верна для любого $f \geq 1$ при $n \neq a2^f - \nu, (a, 2) = 1$ и $0 \leq 2\nu \leq f$.

Шаг 3. Далее, имеем $4^{-1}F_n(5) \equiv 1 \pmod 2$ и $\alpha''(5) \not\equiv 0 \pmod 2$. Отсюда получим, что найдется число $\Lambda \not\equiv 0 \pmod 2$ и такое, что

$$\alpha''(5) \equiv \Lambda 4^{-1} F_n(5) \pmod{2^{n-2}}.$$

Шаг 4. Поскольку группа P_n'' — циклическая и вычет 5 является ее образующей по модулю 2^{n-2}, вычеты 5^s при $0 \leq s < 2^{n-2}$ пробегают все элементы группы P_n''. Значит, для любого u по модулю 2^{n-2} найдется единственное число s такое, что

$$1 + 4u \equiv 5^s \pmod{2^{n-2}}.$$

Следовательно,

$$s\alpha''(5) \equiv \alpha''(5^s) \equiv \Lambda 4^{-1} F_n(5^s) \equiv 4^{-1} F_n(1+4u) \pmod{2^{n-2}}.$$

Таким образом,

$$\chi(1+4u) = e^{2\pi i \Lambda \frac{F_n(1+4u)}{2^{n-2}}}.$$

7. Заключение

Найденная в работе формула для примитивного характера Дирихле по модулю, равному степени числа два, позволяет получить асимптотики для числа простых чисел, не превосходящих любой наперед заданной границы и лежащих в арифметической прогрессии с разностью, равной степени числа два. В частности, отсюда следует верхняя граница для наименьшего простого числа в данной прогрессии. Найденная формула дает возможность получить асимптотики средних значений арифметических функций в подобных прогрессиях с растущей разностью (см., [1]–[10]). Предполагается эти исследования выполнить в дальнейшем.

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Н.Чубарикову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Физматлит. 1976, 144 с.

2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Физматлит. 1983, 160 с.

3. Хассе Г. Лекции по теории чисел. — М.: Изд-во иностр. лит. 1953, с. 78-94.

4. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа// Изв. АН СССР, сер. матем., 1955. т.19, № 1, с.11-16.

5. Барбан М. Б., Линник Ю. В., Чудаков Н. Г. О простых числах в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого числа// Acta arithm., 1964. vol. 9, № 4, с.375-390.

6. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.

7. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.

8. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.:Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит-ры, 1983. 240 с.

9. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа// Изв. АН СССР, сер. матем., 1979. т.43, № 4, с.892-907.

10. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1976. Special variants of the trigonometrical sums method. — M.: Fizmatlit, pp. 144.

2. Vinogradov I. M. 1983. Elements of the number theory. — M.: Fizmatlit, pp. 160.

3. Hasse H. 1950. Vorlesungen ueber Zahlentheorie. — Berlin, 78-114.

4. Postnikov A. G. 1955. On character sums modulo equals the power of prime number.// Izv. AN SSSR, ser. math., v.19, No. 1, p.11-16.

5. Barban M. B., Linnik J. V., Chudakov N. G. 1964. On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference.//Acta arithm. V.9, №4, p.375–390.

6. Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, pp.888.

7. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.

8. Karatsuba A. A. 1983. Foundations of analytic number theory. 2nd Ed. — M.: Nauka. Gl. red. phis.-math.literature, pp. 240 (in Russian).

9. Petechuk M. M. 1979. A sum of the divisor function values in an arithmetic progression with a odd prime-power difference.//Acta arithm. V.9, №4, p.375–390.

10. Arkhipov G. I.„ Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lecture on mathematical analysis. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. pp. 640.

Получено 16.03.22
Принято в печать 22.06.2022