

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-179-190

**Обобщённая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения<sup>1</sup>**

А. Д. Бреки, С. Е. Александров, А. С. Биль, С. Г. Чулкин, В. А. Яхимович,  
А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Е. А. Протопопов

**Бреки Александр Джалюльевич** — доктор технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: albreki@yandex.ru*

**Александров Сергей Евгеньевич** — доктор химических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: albreki@yandex.ru*

**Биль Анастасия Сергеевна** — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: albreki@yandex.ru*

**Чулкин Сергей Георгиевич** — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru*

**Яхимович Валерий Александрович** — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: albreki@yandex.ru*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Колмаков Алексей Георгиевич** — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН (г. Москва).

*e-mail: imetranlab10@mail.ru*

**Протопопов Евгений Александрович** — кандидат технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: pea\_12@mail.ru*

**Аннотация**

В статье представлена обобщённая эмпирическая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения. На примере трения шара из стали ШХ15 по покрытиям из  $SiO_2$ , нанесённым на плоские поверхности из поликарбоната и полиэтилентерефталата, показано, что существуют отклонения от стационарного значения силы трения при скольжении на небольшие расстояния. Разработанная математическая модель описывает фрикционное взаимодействие как при стационарном значении силы трения, так и при отклонениях от него.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» научного проекта: "Применение цифрового моделирования и больших данных для повышения эффективности механической обработки титановых лопаток паровых турбин и их эксплуатации в условиях каплеударной эрозии № 22-19-00178.

*Ключевые слова:* математическая модель трения, покрытие из диоксида кремния, поликарбонат, полиэтилентерефталат, градиент механических свойств, трение покоя, трение скольжения.

*Библиография:* 18 названий.

**Для цитирования:**

А. Д. Бреки, С. Е. Александров, А. С. Биль, С. Г. Чулкин, В. А. Яхимович, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Е. А. Протопопов. Обобщённая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 179–190.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 539.621

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-179-190

### Generalized mathematical model of the dynamics of the change in the friction force at rest and the beginning of sliding<sup>2</sup>

A. D. Breki, S. E. Alexandrov, A. S. Biel, S. G. Chulkin, V. A. Yakhimovich,  
A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, E. A. Protopopov

**Breki Alexander Dzhalyulyevich** — doctor of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg State Polytechnic University; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

*e-mail:* albreki@yandex.ru

**Aleksandrov Sergey Evgenievich** — doctor of chemical sciences, professor, Peter the Great St. Petersburg State Polytechnic University (St. Petersburg).

*e-mail:* albreki@yandex.ru

**Biel Anastasia Sergeevna** — graduate student, Peter the Great St. Petersburg State Polytechnic University (St. Petersburg).

*e-mail:* albreki@yandex.ru

**Chulkin Sergey Georgievich** — doctor of technical sciences, professor, St. Petersburg State Marine Technical University; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

*e-mail:* sergej.chulkin@yandex.ru

**Yakhimovich Valery Alexandrovich** — graduate student, Peter the Great St Petersburg State Polytechnic University (St. Petersburg).

*e-mail:* albreki@yandex.ru

**Gvozdev Aleksander Evgenyevich** — doctor of technical science, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail:* gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**Kolmakov Alexey Georgievich** — doctor of technical science, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science (Moscow).

<sup>2</sup>The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation for the priority area of activity of the Russian Science Foundation "Conducting fundamental scientific research and exploratory scientific research by individual scientific groups" to the scientific project: "Application of digital modeling and big data to improve the efficiency of mechanical processing of titanium steam turbine blades and their operation under conditions of drop impact erosion № 22-19-00178.

*e-mail: imetranlab10@mail.ru*

**Protopopov Evgeny Aleksandrovich** — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: pea\_12@mail.ru*

### Abstract

In the article a generalized empirical mathematical model of the dynamics of changes in the friction force at rest and the beginning of sliding is presented. Using the example of the friction of a ball made of ShKh15 steel over  $SiO_2$  coatings deposited on flat surfaces made of polycarbonate and polyethylene terephthalate, it is shown that there are deviations from the stationary value of the friction force when sliding over short distances. The developed mathematical model describes the frictional interaction both at a stationary value of the friction force and at deviations from it.

**Keywords:** friction mathematical model, silicon dioxide coating, polycarbonate, polyethylene terephthalate, gradient of mechanical properties, static friction, sliding friction.

**Bibliography:** 18 titles.

### For citation:

A. D. Breki, S. E. Alexandrov, A. S. Biel, S. G. Chulkin, V. A. Yakhimovich, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, E. A. Protopopov, 2022, "Generalized mathematical model of the dynamics of the change in the friction force at rest and the beginning of sliding", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 179–190.

## 1. Введение

Трение принято разделять на статическое и динамическое. Переход от статического трения к динамическому трению реализуется после некоторого критического перемещения двух твёрдых тел относительно друг друга. Это критическое перемещение получило название «предельное предварительное смещение». Перемещение, величина которого меньше предельного, называется просто «предварительным смещением». При предварительном смещении реализуется движение на микроуровне, а после преодоления предельного предварительного смещения начинается движение на макроуровне [1].

Явление предварительного смещения было выявлено и исследовано А.В. Верховским [2, 3] и Дж. С. Ренкиным [4]. Вопросы тангенциальной жесткости и предварительного смещения [5] рассматривались в работах Г.А. Томлинсона [6], С.Э. Хайкина, А.Е. Саломоновича и А.П. Лисовского [7], В.С. Щедрова [8], И.В. Крагельского и Н.М. Михина [9], И.Р. Коняхина [10], Б.П. Митрофанова [11], Шилько С.В. [12–14].

Схема типичной зависимости средней силы трения от предварительного смещения и после него показана на рисунке 1а.

Согласно представленному на рисунке 1а закону максимальная сила статического трения всегда больше силы трения движения:

$$F_{fS} > F_{fst}, \quad (0)$$

а работа силы трения при предварительном смещении, в случае больших путей трения, много меньше общей работы силы трения:

$$W_{f\delta} \ll W_f. \quad (0)$$

Неравенство (1) впервые установил Леонард Эйлер [15–17], а также указал на скачкообразный переход от покоя к скольжению.

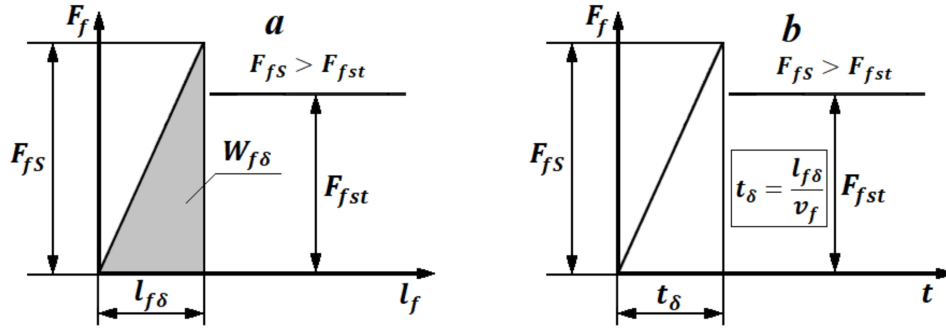


Рис. 1: Схема зависимости средней силы трения от пути трения [1]:  $F_{fs}$  - максимальная сила статического трения;  $l_{f\delta}$  - предварительное смещение;  $F_{fst}$  - стационарная сила трения движения;  $l_f$  - путь трения

Схема зависимости средней силы трения от времени при постоянной скорости скольжения имеет вид, аналогичный схеме зависимости средней силы трения от предварительного смещения (рисунок 1b).

Соответственно, в линейном приближении, основной закон изменения средней силы трения от пути трения при мгновенном переходе от покоя к скольжению имеет следующий вид:

$$F_f(l_f) = \begin{cases} k_{l\delta} \cdot l_f, & 0 < l_f < l_{f\delta}, \\ F_{fst}, & l_f > l_{f\delta}, \end{cases} \quad (0)$$

где  $k_{l\delta}$  - эмпирический коэффициент;  $F_{fst} = \text{const}$  - установившееся (стационарное) значение средней силы трения движения.

Соотношение (3) выполняется в условиях опытов, которые были поставлены от Леонардо да Винчи до Шарля Кулона, то есть на скользящих контактах, где изнашивание и изменение физических, химических и механических свойств поверхностных слоёв незначительны, а также не происходит изменения внешних условий, влияющих на процесс трения. В реальных условиях фрикционного взаимодействия твёрдых тел, периодически меняются как внешние условия, так и процессы, происходящие на скользящих контактах. Изменение состояний области контакта в процессе трения приводит в итоге к более сложным зависимостям силы трения от пути. С одной стороны, более сложные зависимости связаны с изменениями фактической площади контакта, а с другой стороны они связаны с переходами трибологической системы из одного состояния в другое при изменении процессов, происходящих в зоне трения [1]. В связи с этим, можно составить дополненную схему динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения (рисунок 2).

Следует отметить, что зависимости, представленные на рисунке 2, относятся к малым путям трения и малым скоростям скольжения без существенных преобразований физико-химического состояния поверхностных слоёв. Зависимость  $OAXS$  отражает классическое изменение силы трения при переходе от покоя к скольжению, которое описывал Леонард Эйлер (точка  $A$  соответствует началу скольжения). Изменение фактической площади контакта (ФПК) для графика  $OAXS$  проиллюстрировано на рисунке 3а.

Для случаев, показанных на рисунке 3b,c,d после «срыва» и начала скольжения сила трения продолжает расти до точки  $B$ , в которой происходит новый «срыв» уже в процессе скольжения и, в зависимости от материала поверхностных слоёв, их состояния, анизотропии физико-механических свойств и т.п. сила трения падает, а затем растёт, устанавливается либо уменьшается (возможны и комбинации). Рисунок 3 иллюстрирует эти изменения за счёт смены величины ФПК, однако важную роль играет также и удельная сила межмолекулярного притяжения.

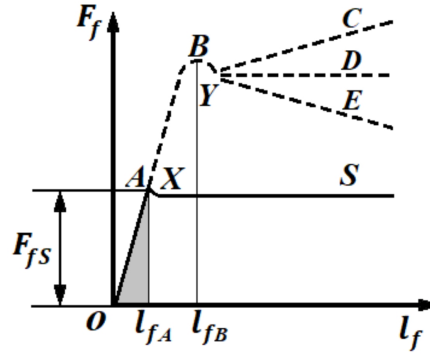


Рис. 2: Дополненная схема зависимости средней силы трения от пути трения ( $A$  – точка начала скольжения)

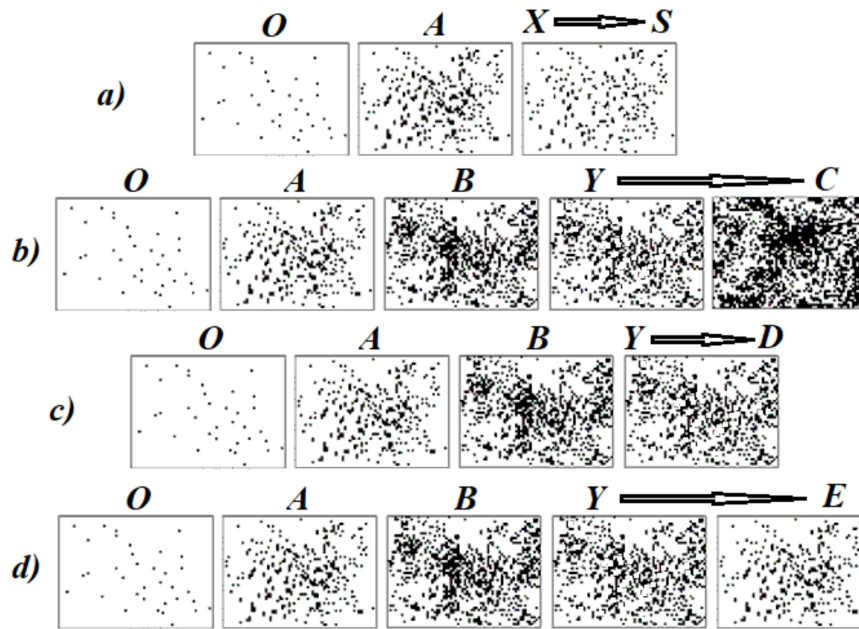


Рис. 3: Изменение фактической площади контакта при фиксированной нагрузке, малых перемещениях и небольших скоростях скольжения (аналогия с 2D перколяцией [18])

На рисунке 2 приведено графическое представление зависимостей силы трения от пути, однако нет их аналитического представления.

В работе [1] предложена следующая математическая модель, которая была использована для описания динамики изменения силы трения (во времени):

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{C_{i,1}x + C_{i,2}}{1 + \exp(-\psi_i \cdot (x - x_i))}. \quad (0)$$

Анализ графиков на рисунке 2 (с учётом комбинаций) позволил предположить, что зависимость силы трения от пути может быть представлена в виде (4) при  $n = 3$ , причём при  $i = 1$ , параметры  $x_1 = 0$ ,  $\psi_1 = 0$  и  $C_{1,2} = 0$  (образовавшийся множитель 0,5 опускаем):

$$F_f(l_f) = C_{1,1}l_f + \frac{C_{2,1}l_f + C_{2,2}}{1 + \exp(-\psi_2 \cdot (l_f - l_{f2}))} + \frac{C_{3,1}l_f + C_{3,2}}{1 + \exp(-\psi_3 \cdot (l_f - l_{f3}))}, \quad (0)$$

где  $\psi_i$  – резкость изменения силы трения при  $i$ -м качественном изменении состояния фрик-

ционного контакта ( $\psi_1 = 0$ ),  $C_{i,1}$  – эмпирические коэффициенты, характеризующие интенсивность изменения силы трения,  $C_{i,2}$  – эмпирические коэффициенты, характеризующие уровень повышения или снижения силы трения ( $C_{1,2} = 0$ ),  $l_f$  – путь трения,  $l_{fi}$  – значения пути, соответствующие максимальной (минимальной) интенсивности изменения силы трения ( $l_{f1} = 0$ ).

В границах данной работы реализована проверка математической модели (5) посредством экспериментального определения зависимостей силы трения от пути при скольжении стального шара по полимерным материалам как в чистом виде, так и с нанесённым на них покрытием.

## 2. Материалы и методика исследования

Для экспериментальной верификации математической модели (5) использовали следующие материалы пар трения:

1. Полиэтилентерефталат (ПЭТ) в виде прямоугольной пластины;
2. Поликарбонат в виде прямоугольной пластины;
3. Полиэтилентерефталат с покрытием из  $SiO_2$ ;
4. Поликарбонат с покрытием из  $SiO_2$ ;
5. Шар из стали марки ШХ15, диаметром 12,7 мм (0,5 дюйма).

Осаждение покрытий на ПЭТ и поликарбонат проводилось в плазме диэлектрического барьерного разряда при атмосферном давлении. Высота разрядного промежутка составляла 7 мм, подводимая мощность – 6 Вт. Рабочая атмосфера состояла из гелия и паров реагента, в качестве которого выступал тетраэтоксисилан (ТЭОС). Парциальное давление ТЭОС в реакторе составляло 115 Па. В течение всего процесса полимерные подложки находились при температуре 50°C.

С точки зрения химии полученные покрытия представляют собой оксид кремния с внедренными в структуру фрагментами  $CH_x$  групп, что было установлено при помощи ИК Фурье спектроскопии. Толщина полученных покрытий составляет приблизительно 440 нм.

Для оценки трения между поверхностью шара из стали ШХ15 и полимерными пластинами с покрытиями и без них была использована машина трения модели МТВМ (рисунок 4), позволяющая оценивать трение при малых скоростях скольжения и сверхмедленном скольжении.

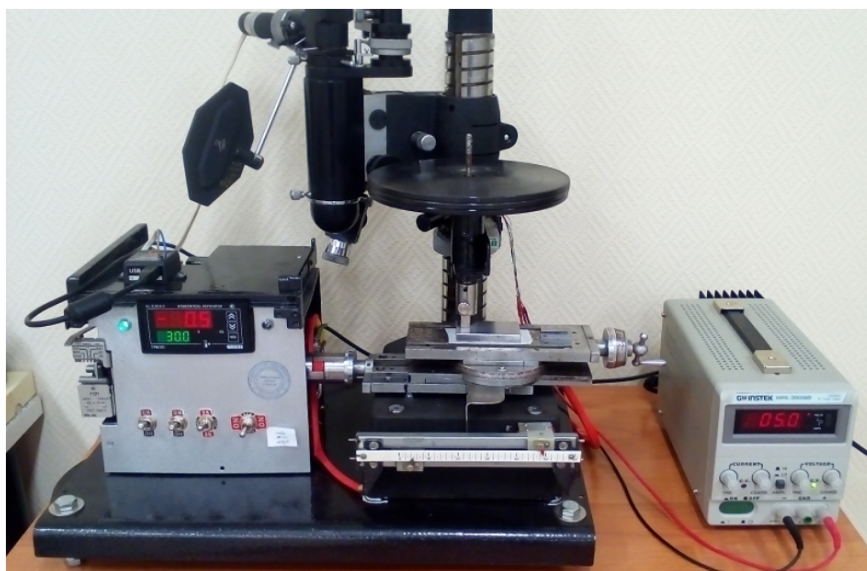


Рис. 4: Внешний вид машины трения МТВМ

Данная установка позволяет проводить испытания со скоростями скольжения от 37 нм/с

до 0,125 мм/с при контактном давлении до 100 МПа.

Для реализации данного исследования в условиях скольжения поверхностей использовалась схема испытаний «шар – плоскость» в режиме поступательного движения.

Неподвижным, жестко зафиксированным телом был стальной шар. Подвижными телами были пластины из полиэтилентерефталата и поликарбоната.

Контактное взаимодействие подвижного и неподвижного тела реализовывалось с нормальной силой  $F_N = 13$  Н. Скорость скольжения составляла 0,125 мм/с. Путь трения в одном опыте составлял 10 мм. Для испытания каждого образца производилось по 5 опытов при указанном комплексе условий.

### 3. Результаты и их обсуждение

Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по поликарбонату приведены на рисунке 5.

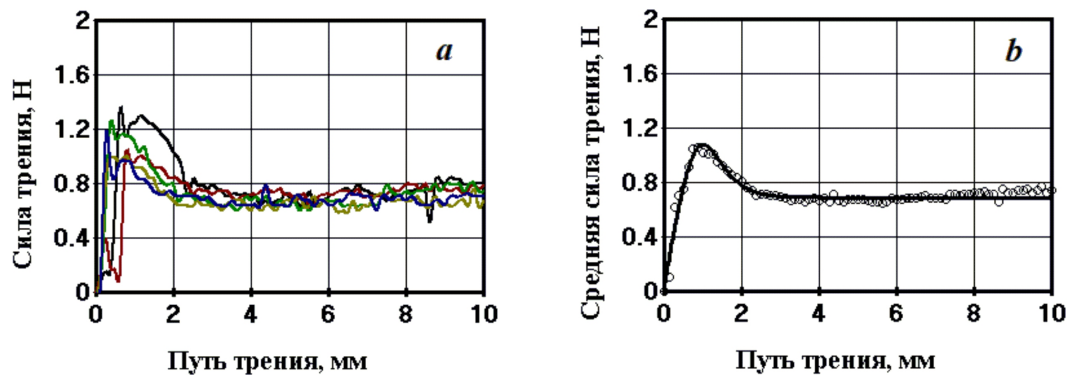


Рис. 5: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по поликарбонату: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

На рисунке 5а показана совокупность из 5 реализаций случайной функции (изменений силы трения в зависимости от пути в  $i$ -м опыте). Для анализа взяли 80 сечений совокупности реализаций, начиная с точки  $l_f = 0,125$  мм, с шагом (периодом дискретизации)  $l_{fd} = 0,125$  мм. Для каждого фиксированного сечения определили среднее значение силы трения, в результате получили соответствующую диаграмму рассеяния (точки на рисунке 5б), точки которой аппроксимировали функцией:

$$\bar{F}_f(l_f) = 1,6l_f + \frac{0,69 - 1,6l_f}{1 + \exp(-3(l_f - 0,9))}, \quad (0)$$

где  $\bar{F}_f(l_f)$  - средняя арифметическая сила трения по 5 реализациям случайной функции.

Интегрируя (6) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по поликарбонату:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[ 1,6l_f + \frac{0,69 - 1,6l_f}{1 + \exp(-3(l_f - 0,9))} \right] dl_f \cong 7,2 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по покрытию из  $SiO_2$  на поверхности поликарбоната приведены на рисунке 6.

На рисунке 6а показана совокупность из 5 реализаций случайной функции. Усреднение в этом и последующих экспериментах осуществляли так, как и в предыдущем случае. Зависимость средней силы трения шара по покрытию из  $SiO_2$  на поверхности поликарбоната (рисунок 6б) выражается следующей формулой:

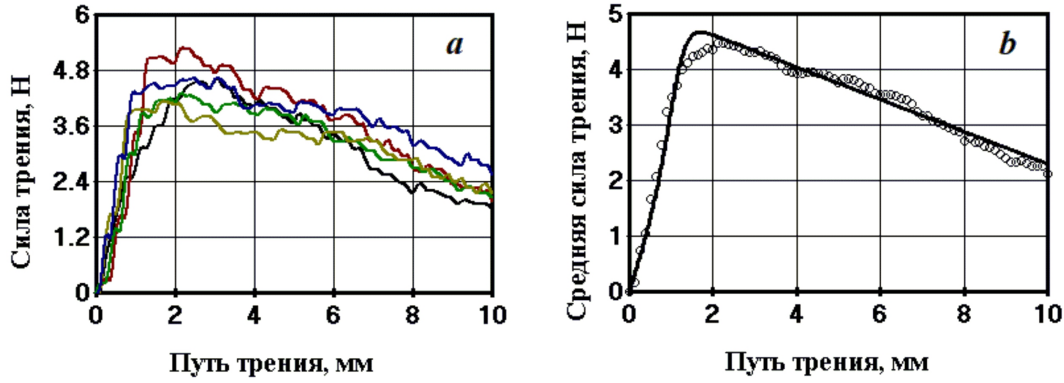


Рис. 6: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по  $SiO_2$  на поликарбонате: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

$$\bar{F}_f(l_f) = 2,3l_f + \frac{5,2 - 2,59l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))}. \quad (0)$$

Интегрируя (8) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по покрытию из  $SiO_2$  на поверхности поликарбоната:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[ 2,3l_f + \frac{5,2 - 2,59l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))} \right] dl_f \cong 33,5 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по ПЭТ приведены на рисунке 7.

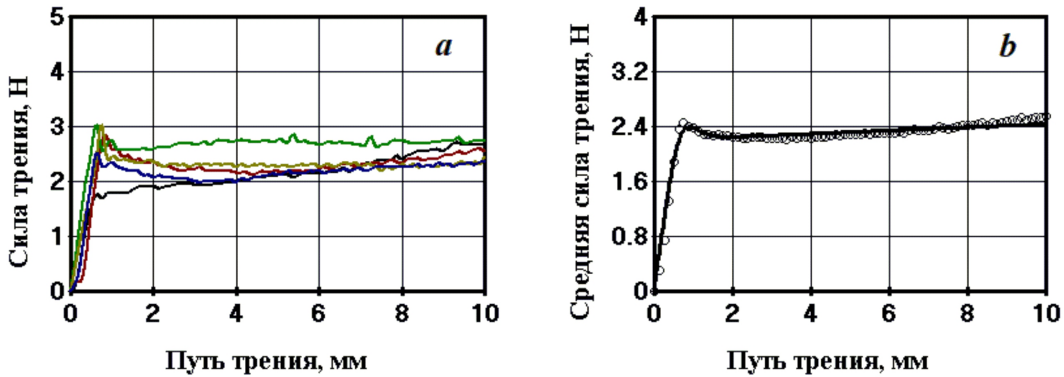


Рис. 7: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по ПЭТ: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

Зависимость средней силы трения шара по поверхности ПЭТ (рисунок 7б) выражается следующей формулой:

$$\bar{F}_f(l_f) = 3,5l_f + \frac{2,2 - 3,476l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 0,6))}. \quad (0)$$

Интегрируя (10) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по ПЭТ:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[ 3,5l_f + \frac{2,2 - 3,476l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 0,6))} \right] dl_f \cong 22,7 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Наконец, результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по покрытию из  $SiO_2$  на поверхности ПЭТ приведены на рисунке 8.

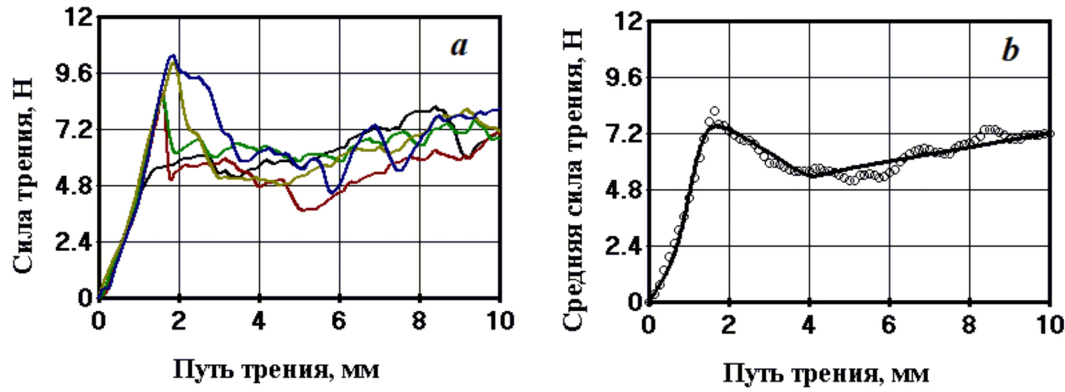


Рис. 8: Результаты исследования динамики изменения силы трения в случае скольжения шара по  $SiO_2$  на ПЭТ: а – пять реализаций случайной функции; б – средняя сила трения

Зависимость средней силы трения шара по покрытию из  $SiO_2$  на поверхности ПЭТ (рисунок 8б) выражается следующей формулой:

$$\bar{F}_f(l_f) = 2,3l_f + \frac{9,4 - 3,3l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))} + \frac{1,3l_f - 5,18}{1 + \exp(-5(l_f - 4,0))}. \quad (0)$$

Интегрируя (12) в пределах всего пути, получаем значение средней работы силы трения при скольжении шара по покрытию из  $SiO_2$  на поверхности ПЭТ:

$$\bar{A}_f = \int_0^{10} \left[ 2,3l_f + \frac{9,4 - 3,3l_f}{1 + \exp(-5(l_f - 1,1))} + \frac{1,3l_f - 5,18}{1 + \exp(-5(l_f - 4,0))} \right] dl_f \cong 59,3 \text{ Нмм}. \quad (0)$$

Значение среднего коэффициента трения определяется по следующей формуле:

$$\bar{f} = \frac{\int_0^{l_{fmax}} \bar{F}_f(l_f) dl_f}{F_N \cdot l_{fmax}} = \frac{\bar{A}_f}{F_N \cdot l_{fmax}}, \quad (0)$$

где  $\bar{f}$  - средний коэффициент трения для всего пути скольжения,  $l_{fmax}$  - максимальное значение перемещения (пути трения),  $F_N$  - фиксированное значение нормальной силы,  $\bar{A}_f$  - средняя работа силы трения (работа трения является характеристикой энергетических потерь в процессе фрикционного взаимодействия и интегрально характеризует антифрикционные свойства материала).

В результате расчётов по формуле (14) получены следующие значения средних коэффициентов трения:

- 1) для поликарбоната – 0,055;
- 2) для поликарбоната с покрытием из  $SiO_2$  – 0,26;
- 3) для полиэтилентерефталата – 0,175;
- 4) для полиэтилентерефталата с покрытием из  $SiO_2$  – 0,46.

Увеличение коэффициента трения может быть обусловлено возникновением отрицательного градиента механических свойств (по И.В. Крагельскому) в результате реализации технологического процесса нанесения покрытий. Также это явление может быть обусловлено избыточным давлением на покрытия, вследствие которого происходило разрушение, вносящее вклад в увеличение коэффициента трения.

## 4. Выводы

На основе полученных в экспериментальном исследовании результатов можно сделать следующие основные выводы:

1. Разработана дополненная схема зависимости средней силы трения от пути трения, учитывающая вариант роста силы трения после срыва и начала движения твёрдого тела. При этом показан вариант «срыва второго рода», который возникает в процессе движения, после которого может быть стационарное значение силы трения, её рост либо снижение.

2. Предложена новая математическая модель для описания динамики изменения силы трения при покое и начале движения твёрдого тела, описывающая все характерные участки разработанной схемы.

3. Реализована экспериментальная проверка новой математической модели при трении шара из стали ШХ15 по пластинам из поликарбоната, полиэтилентерефталата без покрытий и с покрытиями из  $SiO_2$ , в результате которой установлена её справедливость для данных пар трения.

4. Для исследуемых пар трения при выбранном комплексе условий характерен рост силы трения после начала движения, и известная схема *OAXS* не соблюдается. При этом для поликарбоната характерна зависимость типа *OABYD*, для поликарбоната с покрытием из  $SiO_2$  характерна зависимость типа *OABYE*, а для ПЭТ и ПЭТ с покрытием из  $SiO_2$  характерна зависимость типа *OABYC*.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреки А. Д. Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: диссертация ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»]. Санкт-Петербург, 2021. 378 с.
2. Верховский А. В., Авраамов В. М. Явление предварительных смещений при трогании с места катка // Известия Томского политехнического института. 1947. Т. 61. Вып. 1. С. 53-54.
3. Верховский А. В. Явление предварительного смещения при трогании несмазанных поверхностей с места // Журнал прикладной физики. 1926. Т.3. Вып. 3-4. С. 72-74.
4. Rankin J. S. The elastic range of friction // Philosophical Magazine. 1926. Vol. (8) 2. P. 806.
5. Максак В. И., Доцинский Г. А. Исследование явлений упругого предварительного смещения в связи с проблемой точности в машино- и приборостроении // Известия Томского политехнического института. 1972. Т. 225. С. 208-211.
6. Tomlinson G. A. A molecular theory of friction // Philosophical Magazine Series. 1929. Vol. 7. P. 935-939.
7. Хайкин С. Э., Саломонович А. Е., Лисовский Л. П. О силах сухого трения // Трение и износ в машинах. Сб. науч. тр. М.: АН СССР, 1939. Т. 1. С. 468-479.
8. Щедров В. С. Предварительное смещение на упруго-вязком контакте // Трение и износ в машинах. Сб. науч. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1950. № 5. С. 101-110.
9. Крагельский И. В., Михин Н. М. О природе контактного предварительного смещения твердых тел // Доклады АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 78-81.

10. Коняхин И. Р. Теория предварительных смещений применительно к вопросам контактирования деталей. Томск: Издательство Томского ун-та, 1965. 115 с.
11. Митрофанов Б. П. О деформации дискретного контакта: Автореферат дис. на соискание ученой степени кандидата технических наук / Томский политехн. ин-т им. С. М. Кирова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. 14 с.
12. Шилько С. В. Вариационный анализ предварительного смещения при упругом контактировании. Ч.1: Расчет параметров НДС // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 5. С. 795-800.
13. Шилько С. В. Вариационный анализ предварительного смещения при упругом контактировании. Ч.2: Определение характеристик трения и износа // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 973-978.
14. Шилько С. В., Кухорев Л. П. Методика и результаты исследования металлополимерного контактного сопряжения в условиях предварительного смещения // Трение и износ. 2007. Т. 28. № 1. С. 101-109.
15. Журавлев В. Ф. К истории закона сухого трения // Доклады Академии наук. 2010. Т. 433. № 1. С. 46-47.
16. Журавлёв В. Ф. К истории закона сухого трения // Известия Российской академии наук. Механика тв-го тела. 2013. № 4. С. 13-19.
17. Журавлев В. Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2014. № 2 (53). С. 21-31.
18. Breki A., Nosonovsky M. Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition // Applied Physics Letters. 2018. Vol. 113. No 24. P. 241602.

## REFERENCES

1. Breki, A. D. 2021, *Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricants in conditions of spontaneous changes in the states of friction contact: dissertation... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulevich Breki*, Saint Petersburg.
2. Verkhovsky, A. V. & Avraamov, V. M. 1947, "The phenomenon of preliminary displacements when starting from the rink", *Proceedings of the Tomsk Polytechnic Institute*, vol. 61, no. 1, pp. 53-54.
3. Verkhovsky, A. V. 1926, "The phenomenon of preliminary displacement when moving non-lubricated surfaces from a place", *Journal of Applied Physics*, vol. 3, no. 3-4, pp. 72-74.
4. Rankin, J. S. 1926, "The elastic range of friction", *Philosophical Magazine*, vol. (8) 2, p. 806.
5. Maksak, V. I. & Doschinsky, G. A. 1972, "Investigation of elastic pre-displacement phenomena in connection with the problem of accuracy in machine and instrument engineering", *Izvestiya Tomsk Polytechnic Institute*, vol. 225, pp. 208-211.
6. Tomlinson, G. A. 1929, "A molecular theory of friction", *Philosophical Magazine Series*, vol. 7, pp. 935-939.
7. Khaykin, S. E., Salomonovich, A. E. & Lisovsky, L. P. 1939, "On dry friction forces", *Friction and wear in machines. Collection of scientific tr.*, vol. 1, pp. 468-479.

8. Shchedrov, B. C. 1950, "Preliminary displacement on elastic-viscous contact", *Friction and wear in machines. Collection of scientific tr.*, no. 5, pp. 101-110.
9. Kragelsky, I. V. & Mikhlin, N. M. 1963, "On the nature of contact preliminary displacement of solids", *Reports of the USSR Academy of Sciences*, vol. 153, no. 1, pp. 78-81.
10. Konyakhin, I. R. 1965, *Theory of preliminary displacements in relation to the issues of contacting parts*, Publishing House of Tomsk University, Tomsk.
11. Mitrofanov, B. P. 1964, *On the deformation of discrete contact: Abstract of dis. for the degree of Candidate of Technical Sciences*, Tomsk Polytechnic University, Tomsk.
12. Shilko, C. B. 1992, "Variational analysis of preliminary displacement during elastic contact. Part 1: Calculation of VAT parameters", *Friction and wear*, vol. 13, no. 5, pp. 795-800.
13. Shilko, C. B. 1992, "Variational analysis of preliminary displacement during elastic contact. Part 2: Determination of friction and wear characteristics", *Friction and wear*, vol. 13, no. 6, pp. 973-978.
14. Shilko, S. V. & Kukhorev, L. P. 2007, "Methodology and results of the study of metal-polymer contact coupling under conditions of preliminary displacement", *Friction and wear*, vol. 28, no. 1, pp. 101-109.
15. Zhuravlev, V. F. 2010, "On the history of the law of dry friction", *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 433, no. 1, pp. 46-47.
16. Zhuravlev, V. F. 2013, "On the history of the law of dry friction", *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. The mechanics of the TV body*, no. 4, pp. 13-19.
17. Zhuravlev, V. F. 2014, "500 years of the history of the law of dry friction", *Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences series*, no. 2 (53), pp. 21-31.
18. Breki, A. & Nosonovsky, M, 2018. "Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition", *Applied Physics Letters*, vol. 113, no. 24, p. 241602.

Получено 6.03.22

Принято в печать 22.06.2022