

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 519.71

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-121-150

О работах О. М. Касим-Заде в области теории сложности и теории многозначных логик

В. В. Кочергин

Кочергин Вадим Васильевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vvkoch@yandex.ru

Аннотация

В работе предпринята попытка не только дать обзор результатов, полученных О. М. Касим-Заде, крупнейшим специалистом по дискретной математике и математической кибернетике, но и осознать его научное наследие в таких направлениях как исследование мер схемной сложности булевых функций, связанных с функционированием схем, проблематика неявной и параметрической выразимости в конечнозначных логиках, вопросы глубины и сложности булевых функций и функций многозначной логики в бесконечных базисах.

Ключевые слова: схемная сложность, активность, мощность, глубина, бесконечный базис, неявная выразимость, параметрическая выразимость.

Библиография: 91 названий.

Для цитирования:

В. В. Кочергин. О работах О. М. Касим-Заде в области теории сложности и теории многозначных логик // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 121–150.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 519.71

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-121-150

On the papers of O. M. Kasim-Zade in field of complexity theory and theory of multivalued logics

V. V. Kochergin

Kochergin Vadim Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vvkoch@yandex.ru

Abstract

The paper is an attempt both to give an overview of the results of O M Kasim-Zade, the largest specialist in discrete mathematics and mathematical cybernetics, and to understand his scientific legacy in fields such as research measures the circuit complexity of Boolean functions related to the operation of the circuits, the problems of implicit and parametric expressibility in finite-valued logics, the questions of the depth and the complexity of Boolean functions and functions of multivalued logics in infinite bases.

Keywords: circuits complexity, activity, power, depth, infinite basis, implicit expressibility parametric expressibility.

Bibliography: 91 titles.

For citation:

V. V. Kochergin, 2022, “On the papers of O. M. Kasim-Zade in field of complexity theory and theory of multivalued logics”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 121–150.

Октай Мурадович Касим-Заде (29.04.1953 – 22.12.2020), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, запомнится нам не только как крупнейший организатор в области дискретной математики и математической кибернетики, но и, прежде всего, как автор ярких научных результатов. Публикаций по современным меркам у Октая Мурадовича не так много, но практически каждая печатная работа является крупным научным достижением. Многие статьи О. М. Касим-Заде задали векторы развития целым разделам теории синтеза и сложности управляющих систем, некоторые работы открыли новые важнейшие направления исследований. Научное наследие О. М. Касим-Заде велико и еще ждет своего осмысления. В данной работе автор попытался сделать первый шаг в этом направлении.

Октай Мурадович родился 29 апреля 1953 года в г. Баку в семье известного азербайджанского учёного, профессора, инженер-полковника Военно-морского флота.

Окончив с отличием школу в Баку, в 1970 году Октай Мурадович поступил на только что открывшийся факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Там судьба свела его с академиком Олегом Борисовичем Лупановым, который стал для Октая Мурадовича не только научным руководителем, но и образцом математика, педагога и руководителя.

Практически вся профессиональная трудовая деятельность О. М. Касим-Заде была тесно связана с Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша и механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова.

В ИПМ О. М. Касим-Заде работал в отделе теоретической кибернетики, который возглавлял чл.-корр. АН СССР С. В. Яблонский и в котором работал О. Б. Лупанов, с 1976 года по 2006 год (с 1992 г. — по совместительству). В 1986 году по предложению О. Б. Лупанова Октай Мурадович начинает вести научно-педагогическую работу на кафедре дискретной математики механико-математического факультета МГУ. С 1992 года механико-математический факультет становится основным местом работы Октая Мурадовича.

О. М. Касим-Заде защитил кандидатскую диссертацию на тему «Об одной мере сложности схем из функциональных элементов» в 1980 году и докторскую диссертацию на тему «О синтезе некоторых классов управляющих систем, связанных с неявными и параметрическими представлениями булевых функций» в 1996 году.

В том же 1996 году Октай Мурадович стал заместителем заведующего кафедрой дискретной математики, а в 2006 году после смерти О. Б. Лупанова Октай Мурадович Касим-Заде возглавил кафедру дискретной математики и в должности заведующего кафедрой работал до последних дней. Надо сказать, что при этом Октай Мурадович всегда оставался доброжелательным, предельно отзывчивым, чутким и приятным в общении человеком, который тем не

менее становился принципиальным и твёрдым, когда что-либо касалось общего дела, интересы которого он всегда ставил выше личных интересов.

Октай Мурадович был замечательным преподавателем, обладал великолепными ораторскими способностями, легко и непринужденно приковывал к себе внимание аудитории. Он мог на простых и понятных примерах объяснять сложные вопросы.

Круг научных интересов О. М. Касим-Заде сформировался под сильным влиянием академика О. Б. Лупанова и был необычайно широк. Следующий небольшой штрих ярко подчеркивает последний факт — когда Октаю Мурадовичу было тридцать с небольшим, О. Б. Лупанов привлек его в качестве соредактора-составителя к издательству знаменитого «Кибернетического сборника» — серии сборников переводов лучших работ зарубежных авторов по теоретической кибернетике.

В вопросах публикации собственных научных результатов Октай Мурадович был крайне щепетилен. Он отдавал в печать только те результаты, которые считал действительно принципиальными продвижениями в исследуемых задачах, при этом к своим результатам предъявлял очень серьезные требования. К сожалению, значительное число интересных результатов осталось неопубликованными. С другой стороны, практически каждая работа Октая Мурадовича представляет собой яркий научный результат. Многие работы определили дальнейшие направления исследований в соответствующих областях. Все его работы имеют законченный вид, тщательно выверены, имеют безупречную внутреннюю структуру, написаны безукоризненно как с математической стороны, так и со стороны умения преподнести материал. Стоит отметить, что Октай Мурадович неоднократно отмечал, что есть, так сказать, три «математических языка»: первый — язык, на котором автор придумывает результаты, второй — язык, на котором следует рассказывать, а третий — язык, предназначенный для изложения результатов в виде научных статей; при этом, вообще говоря, эти три языка очень сильно отличаются друг от друга. Сам Октай Мурадович был непревзойденным мастером не только устного слова, но и письменного.

Среди всех научных трудов О. М. Касим-Заде можно выделить несколько больших циклов работ — исследования мер сложности, связанных с функционированием схем, результаты по проблематике неявной и параметрической выразимости, а также работы, связанные с изучением вопросов глубины и сложности в бесконечных базисах.

Основные результаты этих циклов, а также многих других работ, относятся к одному из важнейших разделов дискретной математики и математической кибернетики — теории управляющих систем (в первую очередь к теории сложности и теории многозначных логик), однако, возникающие при исследовании поставленных задач вопросы затрагивают большой спектр проблем из других разделов дискретной математики и математической кибернетики, а зачастую и выходят за рамки дискретной математики и математической кибернетики.

1. Исследование мер сложности, связанных с функционированием схем

Хронологически первый большой цикл работ О. М. Касим-Заде (см., в частности, [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 21]) составляют исследования, посвященные изучению двух мер сложности, называемых, соответственно, мощностью и активностью, логических схем или схем из функциональных элементов (определение схем из функциональных элементов см., например, в [26]), которые в отличие от классических мер — таких, как собственно сложность и глубина, — характеризуют схемы не с точки зрения внешних параметров — размера, веса, стоимости, времени срабатывания, — а тесно связаны с функционированием самой схемы.

Мощностью схемы S на входном наборе α называется величина $E(S, \alpha)$, равная числу элементов схемы S , выходы которых принимают значение 1, а активностью схемы S на входном

наборе α называется величина $W(S, \alpha)$, равная числу элементов схемы S , хотя бы на один вход которых подается значение 1. Мощность (активность) схемы — это максимально возможное значение мощности (активности) на наборе, мощность (активность) булевой функции в базисе B — минимально возможное значение мощности (активности) схемы, реализующей эту функцию в базисе B . Стандартным образом вводятся функции Шеннона мощности и активности в базисе B , обозначаемые соответственно $E_B(n)$ и $W_B(n)$, как максимум значений мощности (активности) булевых функций от n переменных. Начало исследованиям этих энергетических мер сложности положили работы [2, 4, 5], в которых, в частности, было доказано, что для любого конечного базиса B выполняются соотношения

$$n \preceq E_B(n) \preceq \frac{2^n}{n}, \quad n \preceq W_B(n) \preceq \frac{2^n}{n}$$

(здесь и далее запись $f(n) \preceq g(n)$ означает, что $f(n) = O(g(n))$ при $n \rightarrow \infty$).

О. М. Касим-Заде установил [2, 3] общую картину расположения порядков роста функций Шеннона мощности $E_B(n)$, отвечающих конечным базисам B , на условной «шкале» порядков роста от n до $2^n/n$: для любого конечного базиса B выполнено либо соотношение

$$n \preceq E_B(n) \preceq n^2,$$

либо соотношение

$$2^\gamma \preceq E_B(n) \preceq \frac{2^n}{n},$$

где γ — положительная константа, зависящая только от базиса. При этом приведен пример бесконечного семейства конечных базисов B_m , $m = 1, 2, \dots$, имеющих попарно различные экспоненциальные порядки роста функций Шеннона мощности:

$$E_{B_m}(n) = \Theta\left(\left(\frac{2^n}{n}\right)^{1/m}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Этот пример также показывает, что совокупность всех функций Шеннона экспоненциального типа нельзя равномерно ограничить снизу экспонентой от n .

О. М. Касим-Заде исследована [3] зависимость поведения функции Шеннона мощности $E_B(n)$ от базиса B , выявлены некоторые параметры базиса, влияющие на поведение функции Шеннона мощности, установлено, что для почти всех конечных базисов рост функции Шеннона мощности линеен.

О. М. Касим-Заде также установил, что задача о возможностях построения схем, асимптотически наилучших по сложности и оптимальных по порядку роста по мощности, может иметь в зависимости от базиса как положительный, так и отрицательный ответ. Так, в случае базиса $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ для произвольной булевой функции от n переменных предложен [1] метод построения схемы сложности $(1 + o(1))2^n/n$ и мощности $O(n)$, в то время как для случая базиса $B = \{(x \vee \bar{y})\bar{z}\}$, в котором

$$L_B(n) \sim \frac{2^n}{2n}, \quad E_B(n) = \Theta(n),$$

установлено [2, 3], что доля функций f_n от n переменных, для которых найдется схема S_{f_n} , удовлетворяющая условиям

$$L_B(S_{f_n}) \leq (1 + o(1))\frac{2^n}{2n}, \quad E_B(S_{f_n}) = O(n),$$

стремится к нулю с ростом n .

В работах [6, 8] О. М. Касим-Заде рассматривал аналогичные задачи для случая, когда в качестве меры сложности схем выступает активность. Им установлено, что для любого конечного базиса B выполнено либо соотношение

$$n \preceq W_B(n) \preceq n^2,$$

либо соотношение

$$2^{n/2} \preceq W_B(n) \preceq \sqrt{n}2^{n/2},$$

либо соотношение

$$W_B(n) = \Theta\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

причем доказано, что для каждого из этих трех типов роста есть соответствующие базисы, а также среди функций Шеннона активности $W_B(n)$ существует не более трех различных порядков роста, удовлетворяющих условиям $2^{n/2} \preceq W_B(n) \preceq \sqrt{n}2^{n/2}$.

Последний факт показывает принципиальное различие между двумя близкими мерами сложности — мощностью и активностью: существует бесконечное число различных порядков роста экспоненциального типа для функций Шеннона мощности, а для функций Шеннона активности есть не более четырех (и не менее двух) различных порядков роста экспоненциального типа.

Стоит отметить, что все описанные результаты, касающиеся активности схем, переносятся [8] без принципиальных изменений на меру сложности, называемую P -активностью, отличающуюся от активности тем, что активными элементами схемы дополнительно считаются и элементы, выходы которых принимают значение 1.

В [6] также установлено, что в случае базиса $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ для произвольной булевой функции от n переменных можно построить схему сложности $(1 + o(1))2^n/n$ и активности $O(n^2)$.

В работах [9, 21] О. М. Касим-Заде исследовал мощность, в том числе и среднюю мощность (усреднение берется по всем входным наборам), простейших функций — конъюнкции n переменных K_n и дизъюнкции n переменных D_n . Для реализации этих функций в базисах $\{\&, -\}$, $\{\vee, -\}$, $\{\&, \vee, -\}$ и базисе, состоящем из всех антимонотонных двуместных функций, установлены порядки роста (в отдельных случаях — асимптотики роста или даже точные значения) мощности и средней мощности. В большинстве случаев он оказался линейным. К исключениям относятся следующие случаи: в базисе $\{\&, \vee, -\}$ мощность и средняя мощность реализации функции D_n растут как $\Theta(\sqrt{n})$ и $O(\log_2^* n)$ (здесь запись $\log_2^* n$ обозначает двоичный «сверхлогарифм» числа n , т. е. количество последовательных логарифмирований по основанию 2, необходимое для получения из числа n числа, не превосходящего 1) соответственно; в базисах, включающих конъюнкцию, средняя мощность функции K_n равна $1/2 - 2^{-n}$.

2. Неявная и параметрическая выразимость

Чтобы сформулировать основные результаты О. М. Касим-Заде, так или иначе относящиеся к тематике неявной и параметрической выразимости булевых функций и функций многозначной логики, стоит напомнить ряд определений.

Пусть A — произвольная система булевых функций. Будем рассматривать системы уравнений вида

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) = \Psi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) \\ \dots \\ \Phi_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) = \Psi_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q, z) \end{cases},$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Psi_1, \dots, \Psi_p$ — некоторые формулы, составленные из символов функций, входящих в систему A , символов основных переменных $x_1, \dots, x_n$, внутренних переменных (параметров) $y_1, \dots, y_q$ и выделенной переменной z (эти формулы могут не содержать функциональных символов, т. е. являться символами переменных). Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция от основных переменных. Система уравнений описанного вида называется параметрическим представлением функции f над системой функций A , если указанная система уравнений имеет по меньшей мере одно решение $y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_q = g_q(x_1, \dots, x_n), z = g_0(x_1, \dots, x_n)$ в функциях от основных переменных, причем во всяком таком решении значение выделенной переменной z определено однозначно и равно $f(x_1, \dots, x_n)$, т. е. $f(x_1, \dots, x_n) = g_0(x_1, \dots, x_n)$.

Функция f называется параметрически выразимой над системой функций A , если для f существует параметрическое представление над A .

Функция f называется неявно выразимой над системой функций A , если для f существует параметрическое представление над системой A без внутренних переменных.

Множество всех булевых функций, параметрически (неявно) выразимых над системой функций A , называется параметрическим замыканием (неявным расширением) этой системы и обозначается через $P(A)$ ($I(A)$). Операция параметрического замыкания, сопоставляющая всякой системе булевых функций A ее параметрическое замыкание $P(A)$, является операцией замыкания в обычном смысле, т. е. удовлетворяет условиям монотонности, экстенсивности и идемпотентности.

Система всех параметрически замкнутых классов булевых функций была найдена А. В. Кузнецовым [21]. Эта система конечна и состоит из следующих 25 замкнутых относительно суперпозиции классов булевых функций: $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3, P_1, P_3, P_5, P_6, S_1, S_3, S_5, S_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9$ (обозначения классов даны по [45]). Так как всякий параметрически замкнутый класс замкнут относительно суперпозиции, эта система является подсистемой системы всех замкнутых относительно суперпозиции классов булевых функций.

Теорема Кузнецова показывает, насколько в случае булевых функций операция параметрического замыкания превосходит по выразительной силе операцию замыкания по суперпозиции: под действием этой операции счетная структура классов Поста «сжимается» в конечную структуру из 25 классов.

В работе [21] была высказана гипотеза о конечности числа параметрически замкнутых классов в любой конечнозначной логике P_k , $k \geq 2$, (проблема 15 из [21]). В случае $k = 3$ справедливость этой гипотезы установлена А. Ф. Данильченко [6]. Окончательно проблему решили С. Баррис и Р. Уиллард [52], доказав справедливость гипотезы А. В. Кузнецова для всех конечных значений k .

В работе [21] был также поставлен вопрос (в другой, но эквивалентной формулировке) о соотношении неявной и параметрической выразимости в двузначной логике P_2 (проблема 12). Решение этой проблемы было получено О. М. Касим-Заде в работе [12], в которой было доказано, что неявное расширение любой системы булевых функций совпадает с ее параметрическим замыканием, и тем самым установлено, что в двузначной логике P_2 неявная выразимость эквивалентна параметрической выразимости.

Отметим, что в многозначной логике дело обстоит совершенно по-иному: при $k \geq 3$ неявная выразимость в P_k не эквивалентна параметрической выразимости; более того, если $k \geq 3$, то число систем функций из P_k , имеющих различные неявные расширения, равно континууму, в то время как число параметрически замкнутых классов конечно.

Октай Мурадович проявлял повышенное внимание к еще одной важной задаче — проблеме неявной полноты в k -значной логике, $k \geq 2$. Эта задача получила решение в несколько этапов. Сначала для случая булевых функций О. М. Касим-Заде решил [12, 15] проблему неявной полноты в терминах неявно предполных классов, т. е. максимальных по включению не полных неявно систем функций: система A функций алгебры логики неявно полна в P_2 тогда и только тогда, когда A не содержится целиком ни в одном из шести явно замкнутых классов функций

T_1, T_0, S, L, K, D (в обозначениях из [45] это классы $C_2, C_3, D_3, L_1, P_6, S_6$). Затем он же нашел (см., например, [35]) критерий неявной полноты в терминах минимальных по включению неявно полных замкнутых по суперпозиции классов: система A неявно полна в P_2 тогда и только тогда, когда замыкание по суперпозиции этой системы содержит класс M всех монотонных функций алгебры логики. Класс M является единственным минимальным по включению замкнутым по суперпозиции неявно полным классом в P_2 . В P_3 аналогичный критерий неявной полноты получила [35] Е. А. Орехова, ученица О. М. Касим-Заде. Она описала все минимальные неявно полные замкнутые по суперпозиции классы в P_3 , которых оказалось 27. Ей же был доказан [36] критерий неявной шепферовости в P_3 . Позднее О. М. Касим-Заде доказал [30] критерий неявной полноты в P_k при произвольном $k \geq 2$, позволяющий устанавливать неявную полноту системы функций по множеству функций от трех переменных, лежащих в замыкании этой системы по суперпозиции. Одним из следствий этого критерия является тот факт, что любая неполная система функций в P_k расширяется до некоторого неявно предполного класса и число таких классов в P_k конечно при любом $k, k \geq 2$. В связи с проблематикой неявной полноты в k -значной логике стоит упомянуть также недавние результаты еще одного ученика О. М. Касим-Заде — М. В. Старостина. Им установлен [42, 43] критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах неявно предполных классов: система функций трехзначной логики неявно полна в P_3 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из 54 явно предъявленных неявно предполных классов.

Изложенные выше результаты о неявной и параметрической выразимости в двузначной логике касались исключительно вопросов выразимости, т. е. чисто качественной стороны проблемы синтеза неявных и параметрических представлений булевых функций. Завершение исследований по качественным вопросам синтеза неявных и параметрических представлений в двузначной логике естественным образом выдвинуло на первый план задачу изучения метрических аспектов этой проблемы, связанных с построением неявных и параметрических представлений, наилучших с точки зрения той или иной меры сложности, и с оценкой их сложности.

Существуют различные меры сложности неявных и параметрических представлений. Одна из таких мер обобщает известную меру сложности формул (суперпозиций): предполагается, что каждой функции, входящей в заданную систему A , приписано некоторое число — вес этой функции, и под сложностью всякого неявного (параметрического) представления над системой A понимается сумма весов всех вхождений функций из A в уравнения, составляющие рассматриваемое представление. Эта мера сложности рассматривалась О. М. Касим-Заде в работах [20, 23].

Другая естественная мера сложности неявных и параметрических представлений, когда под сложностью неявного (параметрического) представления понимается число входящих в него уравнений — ранг представления — исследовалась О. М. Касим-Заде в работах [15, 16]. В этих работах, как обычно, для рассматриваемой меры сложности вводятся соответствующие функции Шеннона, называемые ранговыми функциями. Основные результаты этих работ касаются поведения ранговых функций неявных и параметрических представлений над произвольными системами булевых функций. В этих работах установлены порядки роста ранговых функций неявных и параметрических представлений для всех систем булевых функций.

Пусть A — некоторая система булевых функций, f — булева функция, неявно (параметрически) выразимая через функции системы A . Наименьшее число уравнений, достаточное для построения неявного (параметрического) представления функции f над системой A , называется рангом (соответственно, параметрическим рангом или, короче, P -рангом) функции f над системой A и обозначается $m_A(f)$ (соответственно $M_A(f)$).

Ранговой функцией, отвечающей системе A , называется функция $m_A(n)$ натурального ар-

гумента n , определяемая соотношением

$$m_A(n) = \max m_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям f от n переменных, неявно выразимым через функции системы A , $f \in I(A)$.

Аналогично, P -ранговой функцией, отвечающей системе A , называется функция $M_A(n)$ натурального аргумента n , определяемая соотношением

$$M_A(n) = \max M_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям f от n переменных, параметрически через функции системы A , $f \in P(A)$.

Нетрудно понять, что для всякой системы функций A при всех натуральных n имеют место равенства $m_A(n) = m_{[A]}(n)$ и $M_A(n) = M_{[A]}(n)$, где $[A]$ обозначает замыкание системы A по суперпозиции. Поэтому задача нахождения ранговых функций $m_A(n)$ и $M_A(n)$ для всех систем булевых функций A сводится к нахождению ранговых функций лишь для систем, замкнутых относительно суперпозиции.

Основной результат работы [16] заключается в следующем. В зависимости от того, каким классом Поста является замыкание по суперпозиции множества A , множество всех систем A разбивается на шесть типов, при этом ранговые функции имеют следующий вид:

1) если замыкание системы A совпадает с одним из замкнутых классов $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3, P_1, P_3, P_5, P_6, S_1, S_3, S_5, S_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9$, то

$$m_A(n) = 1, \quad M_A(n) = 1;$$

2) если замыкание системы A совпадает с классом A_1 , то

$$m_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1, \quad M_A(n) = 2;$$

3) если замыкание системы A совпадает с одним из классов A_2 или A_3 , то

$$m_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad M_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ 2, & \text{при } n \geq 2; \end{cases}$$

4) если замыкание системы A совпадает с классом A_4 , то

$$m_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad M_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, 2, \\ 2, & \text{при } n \geq 3; \end{cases}$$

5) если замыкание системы A совпадает с одним из классов F_i^μ , где $i = 1, 4, 5, 8$, $\mu = 2, 3, \dots, \infty$, то

$$m_A(n) = M_A(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor;$$

6) если замыкание системы A совпадает с одним из классов D_2 или F_i^μ , где $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 2, 3, \dots, \infty$, то

$$m_A(n) = \Theta(n \log n), \quad M_A(n) = \Theta(n).$$

Тем самым, в работе [16] установлены порядки роста ранговых и P -ранговых функций для всех систем булевых функций, при этом для большинства замкнутых классов эти функции найдены в точном виде. Полученные результаты показывают, что поведение функций $m_A(n)$

и $M_A(n)$ над одной и той же системой булевых функций A может как совпадать, так и различаться довольно существенно. Это факт интересен в свете того, что в случае двузначной логики с точки зрения выразимости, параметрические представления не имеют каких-либо преимуществ перед неявными [12]. Различие в поведении функций $m_A(n)$ и $M_A(n)$ наблюдается лишь в тех случаях, когда система A состоит целиком из монотонных функций. Стоит также отметить своеобразие поведения ранговых функций $m_A(n)$, отвечающих классу D_2 самодвойственных монотонных функций и классам F_i^μ монотонных функций, удовлетворяющих условиям $\langle A_\mu \rangle$ или $\langle a_\mu \rangle$. В этом случае рост ранговых функций оказывается нелинейным.

Вопросы о поведении ранговых функций в случае многозначных логик, безусловно, также не могли не интересовать Октая Мурадовича. Конечно, в этом случае задачи становятся существенно труднее. В этом направлении стоит отметить следующие результаты Е. В. Михайлец, ученицы О. М. Касим-Заде. В работе [32] она установила, что для достаточно широкого семейства неявно полных систем функций k -значной логики ранговые функции имеют линейный порядок роста $\Theta(n)$. В частности, для классов A функций, монотонных относительно произвольного частичного порядка, заданного на множестве $\{0, 1, \dots, k-1\}$, и содержащего хотя бы одну пару сравнимых элементов, выражение для ранговой функции $m_A^k(n)$ определяется равенством

$$m_A^k(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

Но, наверное, еще более интересным результатом работы [32] является доказательство экспоненциального порядка роста ранговой функции, соответствующей одному из неявно полных в P_3 классов, рассматривавшихся в работе [35]. Наличие такого факта в очередной раз показывает принципиальное отличие функций многозначной логики от двузначной.

Возвращаясь к булевым функциям и классической мере сложности, напомним, что под сложностью параметрического представления описанного в начале раздела вида в простейшем случае понимается число вхождений функциональных символов из системы A в уравнение этого представления. В общем случае каждой функции, входящей в систему A , приписывается некоторое положительное действительное число, называемое весом этой функции. Систему функций A с приписанными этим функциям весами называют базисом. Под сложностью параметрического представления над базисом A понимается сумма весов всех вхождений символов базисных функций в формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Psi_1, \dots, \Psi_p$.

Обычным образом вводится функция Шеннона $L_A(n)$, отвечающая базису A : для всякого натурального n значение $L_A(n)$ равно наименьшей величине сложности, достаточной для построения параметрического представления над базисом A для всякой булевой функции от n переменных, параметрически выразимой над этим базисом.

В асимптотической постановке проблема сложности параметрических представлений сводится к изучению асимптотического поведения функций Шеннона $L_A(n)$ при $n \rightarrow \infty$. В [20] получено асимптотически точное выражение функций Шеннона, отвечающих произвольным конечным параметрически полным базисам с положительными весами (базис A называется параметрически полным, если $P(A) = P_2$).

Пусть A — произвольный конечный базис булевых функций с положительными весами. Для всякой функции φ из базиса A обозначим через $\lambda(\varphi)$ вес этой функции, а через $m(\varphi)$ — число ее существенных переменных. Приведенным весом базиса A называется [25, 28] величина ρ_A , определяемая соотношением

$$\rho_A = \min_{\varphi} \frac{\lambda(\varphi)}{m(\varphi) - 1},$$

где минимум берется по всем функциям φ из базиса A , удовлетворяющим условию $m(\varphi) \geq 2$.

Назовем редуцированным весом базиса A величину γ_A , определяемую соотношением

$$\gamma_A = \min_{\varphi} \gamma(\varphi),$$

где минимум берется по всем функциям φ из базиса A , удовлетворяющим условию $m(\varphi) \geq 2$, и

$$\gamma(\varphi) = \begin{cases} \lambda(\varphi)/m(\varphi), & \text{если функция } \varphi \text{ является нелинейной;} \\ \lambda(\varphi)/(m(\varphi) - 1), & \text{если функция } \varphi \text{ является линейной.} \end{cases}$$

В работе [20] для произвольного параметрически полного конечного базиса A , состоящего из булевых функций с произвольными положительными весами, О. М. Касим-Заде установил при $n \rightarrow \infty$ асимптотику роста функции Шеннона:

$$L_A(n) = \gamma(A) \frac{2^n}{n} \left(1 + \Theta \left(\frac{\log_2 n}{n} \right) \right).$$

В работе [23] О. М. Касим-Заде установлено, что в случае произвольного конечного (не обязательно параметрически полного) базиса A для поведения соответствующей функции Шеннона при $n \rightarrow \infty$ имеется четыре возможности:

- 1) $L_A(n) = \gamma(A) \frac{2^n}{n} \left(1 + \Theta \left(\frac{\log_2 n}{n} \right) \right)$;
- 2) $L_A(n) = \gamma(A) \frac{2^{n-1}}{n} \left(1 + \Theta \left(\frac{\log_2 n}{n} \right) \right)$;
- 3) $L_A(n) = \rho_A n + O(1)$;
- 4) $L_A(n) = L_A(1)$

в зависимости от того, каким из вышеописанных 25 замкнутых классов является параметрическое замыкание $P(A)$ базиса A . Выбор реализуемой возможности определяется мощностью класса $P(A)$: для самых больших классов C_1, C_2, C_3 и C_4 выполняется первое асимптотическое равенство, для тоже достаточно мощных классов D_1 и D_3 справедливо второе соотношение, для классов одноместных функций O_1, O_4, O_5, O_6, O_8 и O_9 функция Шеннона постоянна, а для остальных классов растет линейно.

Стоит отметить, что результат из [20] об асимптотике роста функции Шеннона для произвольного параметрически полного конечного базиса A , состоящего из булевых функций с произвольными положительными весами, нашел несколько приложений.

Во-первых, вопросы синтеза и сложности введенного А. Бёрксом и Дж. Райтом [51] класса сетей из функциональных элементов оказались тесно связанными с соответствующими задачами класса параметрических представлений. О. М. Касим-Заде удалось (см. Добавление 2 к работе [20]) основные результаты о сложности параметрических представлений в параметрически полных базисах перенести на задачи о сложности сетей из функциональных элементов.

Во-вторых, сравнивая сложность реализации булевых функций параметрическими представлениями и схемами из функциональных элементов, которые также можно рассматривать как специальный вид параметрических представлений, удалось посмотреть под новым углом на некоторые задачи о сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов (см., например, Добавление 1 к работе [20]).

Кроме того, применение основных идей асимптотически оптимального метода синтеза параметрических представлений позволило понизить верхнюю оценку и получить [7] асимптотику сложности для описанной А. А. Сапоженко и С. А. Ложкиным [41] математической модели электронных схем на дополняющих МОП-транзисторах (КМОП-схем).

3. Сложность и глубина в бесконечных базисах

Большой цикл работ О. М. Касим-Заде посвящен исследованию схемной сложности и глубины булевых функций над бесконечными базисами. Определение схемы из функциональных элементов и других связанных с ним понятий можно найти, например, в [25]. Под сложностью схемы в этом цикле как правило понимается число входящих в нее функциональных

элементов. Глубиной схемы называется наибольшее число функциональных элементов, составляющих ориентированную цепь, ведущую от входов схемы к её выходу. Глубина схемы тесно связана с временем срабатывания схемы.

Наименьшее число элементов, достаточное для реализации схемой над базисом B функции f , называется сложностью функции f и обозначается через $L_B(f)$. Соответствующая базису B функция Шеннона $L_B(n)$ определяется для всех натуральных n соотношением $L_B(n) = \max_f L_B(f)$, где максимум берется по всевозможным функциям f от n переменных, реализуемых над базисом B .

Наименьшая глубина схем над базисом B , реализующих функцию f , называется глубиной функции f над базисом B и обозначается через $D_B(f)$. Каждому базису B соответствует функция Шеннона глубины $D_B(n)$, определяемая при всех n соотношением $D_B(n) = \max_f D_B(f)$, где максимум берется по всевозможным функциям f от n переменных, реализуемых над базисом B .

Базис называется бесконечным, если содержит функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных (т. е. для всякого m в базисе имеется по крайней мере одна функция, существенно зависящая не менее чем от m переменных). В противном случае базис называется конечным.

Стоит отметить, что при всей общности постановок задач о сложности и глубине булевых функций (а также функций многозначной логики) над бесконечными базисами, постепенное продвижение в исследовании этих задач проходило, в общем, независимо.

3.1. Сложность в бесконечных базисах

Известно [54], что для всякого конечного (полного) базиса B булевых порядок роста функции Шеннона $L_B(n)$ при $n \rightarrow \infty$ равен $2^n/n$. Исчерпывающее описание асимптотического поведения функций Шеннона для всех конечных булевых базисов с положительными весами элементов дано О. Б. Лупановым [25]. Поведение функций Шеннона для бесконечных базисов гораздо разнообразнее. В частности, известны [3, 27, 30, 31, 33, 34] примеры базисов, для которых порядки роста функций Шеннона равны: 1 , $\log_2 n$, $(2n/n)^{1/2}$, $2n/2$.

В работе [14] Н. А. Карповой рассматривались бесконечные базисы, в которых каждому базисному элементу приписан произвольный неотрицательный вес, а сложность схемы определяется как сумма весов входящих в нее элементов, и исследовался следующий вопрос: какие числовые функции могут быть функциями Шеннона в таких базисах? Нахождение точного и полного ответа на этот вопрос представляется практически невозможным, поэтому задача рассматривалась с точки зрения асимптотической характеристики функций Шеннона. Н. А. Карпова установила необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять числовая функция, асимптотически равная функциям Шеннона в некотором бесконечном базисе из элементов с произвольными неотрицательными весами. Таким образом, была дана полная характеристика функций, асимптотически равных функциям Шеннона в таких бесконечных базисах [14]. Отметим, что задача нахождения по заданному бесконечному базису функции Шеннона сложности в этом базисе Н. А. Карповой в указанной работе не рассматривалась.

О. М. Касим-Заде [25] предложил новый метод получения двусторонних оценок функций Шеннона в произвольных бесконечных базисах, который позволил при достаточно слабых ограничениях оценить рост функций Шеннона с точностью до полиномиальной эквивалентности. Метод получения нижних оценок в [25] основан на «мощностных» соображениях и восходит к [27, 34]. Что касается верхних оценок, то предложенный в [25] метод позволил получить верхние оценки функции Шеннона, сопоставимые с ее мощностной нижней оценкой. Эти результаты получили развитие в [27], где были получены более точные оценки.

В общих чертах качественная картина поведения порядков роста функций Шеннона в бесконечных базисах была описана О. М. Касим-Заде в [33].

Для изложения этих результатов введем еще два определения.

Если выполнено соотношение $a(n) = O(b(n))$, то, следуя [33], интервалом между функциями $a(n)$ и $b(n)$ будем называть множество всех действительных функций $c(n)$ натурального аргумента, принимающих положительные значения при всех достаточно больших n и удовлетворяющих условиям $c(n) = \Omega(a(n))$ и $c(n) = O(b(n))$. Если функция $c(n)$ лежит в интервале между функциями $a(n)$ и $b(n)$ и по порядку роста не совпадает ни с одной из них, то будем говорить, что функция $c(n)$ лежит строго в интервале между функциями $a(n)$ и $b(n)$.

Далее, классом L содержательно (подробнее см. [33]) назовем множество функций от одной действительной переменной, состоящее из тождественной функции x , всех действительных констант, и такое, которое вместе с любыми двумя функциями $f(x), g(x)$ содержит все функции, финально эквивалентные функциям $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, $e^{f(x)}$, $\log_2 |f(x)|$ (финальная эквивалентность означает равенство функций для всех значений аргумента, начиная с некоторого числа).

В [18] О. М. Касим-Заде доказал, что для всякого бесконечного базиса B выполняется соотношение $L_B(n) = O(2^{n/2})$. С точностью до константы эта оценка является, вообще говоря, не улучшаемой: из работы Э. И. Нечипорука [33], в частности, известен пример бесконечного базиса, в котором порядок роста функции Шеннона равен $2^{n/2}$. Результаты работ Э. Н. Гилберта [3] и А. А. Маркова [30, 31] дают пример бесконечного базиса с порядком роста функции Шеннона равным $\log_2 n$. Результаты Э. И. Нечипорука [34] и О. Б. Лупанова [27] о схемах в базисе пороговых функций дают пример бесконечного базиса с порядком роста функции Шеннона равным $\sqrt{\frac{2^n}{n}}$. Отметим еще базис B , состоящий из всех булевых функций, для которого $L_B(n) = 1$ при всех натуральных n .

Согласно классификации, описанной в [33], для любого бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона либо равен 1, либо лежит в одном из двух интервалов: или между функциями $\log_2 n$ и n , или между функциями n и $2^{n/2}$.

Таким образом, для всякого бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона либо равен 1, либо не меньше $\log_2 n$. Иначе говоря, не существует базиса, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями 1 и $\log_2 n$ [33].

В [33] установлено, что существуют базисы с порядком роста функции Шеннона, равным n . Из этого факта и приведенных выше результатов следует, что границы 1, $\log_2 n$, n и $2^{n/2}$ каждого из интервалов, указанных в классификации порядков роста функций Шеннона [33], достижимы.

Отметим, что порядок роста функции Шеннона $\sqrt{\frac{2^n}{n}}$, относящийся к базису пороговых функций, лежит строго в интервале между функциями n и $2^{n/2}$. Можно показать, что число базисов с различными порядками роста функций Шеннона в этом интервале бесконечно; обширное семейство таких базисов построено в работе [33].

В [33] показано, что для любой функции λ , принадлежащей классу L и удовлетворяющей условиям: $\lambda(n) = \Omega(n)$, $\log_2 \lambda(n) = O(n^{1/2})$, существует бесконечный базис, в котором функция Шеннона по порядку роста равна функции $\lambda(n)$. В частности, из этого результата вытекает, что порядками роста функции Шеннона являются, например, функции $n \log_2 n$, $n \log_2 \log_2 n$, n^2 , $n^{3/2}$, $n^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt[5]{n}}$ и другие (подробнее см. [33]).

Что касается интервала между функциями $\log_2 n$ и n , то ответ на вопрос «существуют ли базисы, в которых порядки роста функций Шеннона лежат строго в этом интервале?» оставался неизвестным и очень интересовал О. М. Касим-Заде.

Упомянутый выше метод получения оценок, предложенный в [25], дает, в частности, следующий результат: если полученная посредством него мощностная нижняя оценка функции Шеннона в данном бесконечном базисе по порядку не ниже линейной (и тем самым функ-

ция Шеннона попадает в интервал от n до $2^{n/2}$), то функция Шеннона по порядку заключена между этой нижней оценкой и ее квадратом. В интервале от $\log_2 n$ до n это свойство, вообще говоря, не выполняется. Для таких бесконечных базисов получение достаточно точных нижних оценок их функций Шеннона, по-видимому, требует привлечения иных соображений. Такие новые методы получения нижних оценок удалось разработать при исследовании базиса антицепных функций, на необходимость изучения теоретико-сложностных свойств которого обращал внимание О. Б. Лупанов и на котором стоит остановиться подробнее.

Рассмотрим булев куб $\{0, 1\}^n$ как частично упорядоченное множество наборов с естественным порядком декартова произведения. Антицепью булева куба будем называть всякое подмножество булева куба, состоящее из попарно несравнимых наборов. Булева функция, принимающая значение 1 лишь на некоторой антицепи, называется антицепной.

Множество всех антицепных функций образует бесконечный базис, который обозначается через AC (см., например, [10]). В базис AC также включаются константы 0 и 1, по соглашению не имеющие переменных. С содержательной точки зрения им соответствуют функциональные элементы без входов, реализующие на выходе константы 0 и 1 соответственно. Множество AC замкнуто относительно операций подстановки констант и отождествления переменных, и всякая булева функция выражается через функции из множества AC с помощью операции суперпозиции (система AC полна, поскольку, например, функции $\bar{x}$ и $x \& y$ являются антицепными, а их совокупность образует базис).

Изучение базиса антицепных функций началось с работ О. М. Касим-Заде [10, 11]. В [10] была доказана нижняя оценка $\Omega(n^{1/3})$ сложности линейной функции от n переменных, а следовательно и такая же нижняя оценка функции Шеннона в этом базисе. Также в [10] была установлена простейшая верхняя оценка $n + 1$ для сложности произвольной булевой функции от n переменных (эта оценка позже была улучшена на 1 ученицей О. М. Касим-Заде О. В. Подольской [37]). В [11] О. М. Касим-Заде доказал нижнюю оценку $\Omega(\sqrt{n}/\ln n)$ сложности линейной функции от n переменных, тем самым улучшив предыдущую нижнюю оценку функции Шеннона. В работе [38] О. В. Подольской доказано, что порядок роста функции Шеннона в базисе антицепных функций равен n .

О. В. Подольской также установлено [39], что в базисе, состоящем из всех антицепных функций и линейных функций от любого числа переменных, порядок роста функции Шеннона равен $\sqrt{n \log n}$. Тем самым, по-видимому, впервые показано, что существует базис, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями $\log_2 n$ и n .

Стоит отметить, что для функций многозначной логики систематических исследований задачи о схемной сложности над бесконечными базисами не проводилось. В этом направлении можно указать только отдельные результаты, в частности, работы [18, 19], в которых для базисов B_P и B_L , состоящих из всех функций, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \dots < k - 1$, а также из отрицания Поста, т. е. функции $x + 1 \pmod k$, в случае базиса B_P , и отрицания Лукасевича, т. е. функции $N_L(x) = k - 1 - x$, в случае базиса B_L , установлены точные значения функций Шеннона, имеющих, соответственно, вид $3 \log_3 n + \alpha_n$ и $2 \log_2 n + \beta_n$, где α_n и β_n — ограниченные последовательности.

3.2. Глубина в бесконечных базисах

Известно [24], что для любого конечного (полного) булева базиса B асимптотика роста функции Шеннона глубины при $n \rightarrow \infty$ имеет вид $D_B(n) = \alpha n + o(n)$, где $\alpha = (\log_2 m)^{-1}$ и m — наибольшее число существенных переменных у функций базиса B .

В первых работах, посвященных изучению глубины в случае бесконечных булевых базисов, были установлены асимптотики и порядки роста функции Шеннона глубины, в основном, для конкретных базисов, причем во всех примерах эти порядки роста оказывались равными либо

1 (например, для базиса всех булевых функций или для базиса пороговых функций [27]), либо $\log_2 n$ (см., например, [24]).

О. М. Касим-Заде [29, 31] установил, что функция Шеннона глубины для любого бесконечного базиса булевых функций по порядку роста равна либо 1, либо $\log_2 n$; эти результаты были усилены затем в [32].

В работе [31] установлено, что для каждого бесконечного базиса B булевых функций либо существует единственное простое p , для которого степени полиномов с идемпотентными переменными над полем вычетов по модулю p для функций из B имеют максимальное значение, называемое характеристикой базиса и обозначаемое $\deg_p B$, либо такого простого p не существует — в этом случае базису приписывается бесконечная характеристика. В первом случае функция Шеннона глубины растёт по порядку как $\log_2 n$, а во втором — ограничена сверху константой.

Также в работе [31] проводится сравнение бесконечных базисов по глубине. Базисы B_1 и B_2 называются эквивалентными по глубине, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что для всех булевых функций f выполняются неравенства $c_1 D_{B_1}(f) \leq D_{B_2}(f) \leq c_2 D_{B_1}(f)$. Базис B_1 считается слабее по глубине базиса B_2 , если существует такая константа c_3 , что для любой булевой функции f выполняется неравенство $D_{B_2}(f) \leq c_3 D_{B_1}(f)$ и базисы B_1 и B_2 не эквивалентны по глубине. Отношение эквивалентности базисов по глубине определяет разбиение всей совокупности базисов на следующие классы эквивалентности: класс E_0 всех конечных базисов, класс E^∞ всех бесконечных базисов бесконечной характеристики, и для каждого простого числа p , $p \geq 2$, класс E_p всех бесконечных базисов характеристики p . Число этих классов счётно. Множество всех классов эквивалентности базисов частично упорядочено по отношению «слабее по глубине»; более того, это множество является полной решёткой (структурой) с наименьшим элементом E_0 , наибольшим элементом E^∞ и счётным множеством заключённых строго между ними попарно не сравнимых элементов E_p при всевозможных простых $p \geq 2$.

Кроме того, О. М. Касим-Заде установил [32], что для произвольной отличной от констант и переменных булевой функции f её глубина $D_B(f)$ над базисом B в случае бесконечного базиса бесконечной характеристики ограничена числами 1 и 6, а в случае бесконечного базиса конечной характеристики $\deg_p B$ удовлетворяет неравенствам $\lceil \log_\gamma \deg_p f \rceil \leq D_B(f) \leq \lceil \log_\gamma \deg_p f \rceil + 5$, где $\gamma = \deg_p B$, а $\deg_p f$ — степень полинома с идемпотентными переменными над полем вычетов по модулю p , представляющего функцию f . Как следствие, для функции Шеннона глубины $D_B(n)$ в первом случае найдётся константа β , $1 \leq \beta \leq 6$, такая, что при всех достаточно больших n выполняется равенство $D_B(n) = \beta$, а во втором случае при всех n справедливы неравенства $\lceil \log_\gamma n \rceil \leq D_B(n) \leq \lceil \log_\gamma n \rceil + 5$.

В 2007 г. О. М. Касим-Заде поставил задачу об исследовании глубины функций многозначной логики в конечных и бесконечных базисах своему ученику А. В. Кочергину, которому в конце концов удалось полностью описать качественную картину асимптотического поведения функции Шеннона глубины для случая конечных и бесконечных базисов, состоящих из функций k -значной логики, где $k \geq 3$ [15, 16, 17]. А. В. Кочергиным в [16] было установлено, что для произвольного конечного базиса B функций k -значной логики справедливо асимптотическое равенство $D_B(n) \sim cn$, где константа c выражается через логарифм некоторого алгебраического числа и зависит только от базиса, а также предложен алгоритм нахождения по базису указанной константы. Что касается бесконечных базисов, то в [15] было доказано, что порядок роста функции Шеннона глубины либо равен 1, либо равен $\log_2 n$. Тем самым было показано что эффекты, описанные для случая булевых функций, распространяются и на случай функций k -значной логики, где $k \geq 3$.

4. Работы, не относящиеся к выделенным циклам

Круг научных интересов О. М. Касим-Заде был необычайно широк и, конечно, не ограничивался рамками указанных выше направлений исследований. Несомненно, Октая Мурадovichа, как ученика О. Б. Лупанова, интересовали, в первую очередь, задачи теории сложности во многих ее проявлениях, но эти задачи зачастую приводили его к задачам из совершенно других областей дискретной математики и математической кибернетики, а иногда и выводили за ее пределы. И многие из таких задач О. М. Касим-Заде решил.

4.1. Прочие работы по теории сложности

В работе [5] О. М. Касим-Заде для известной задачи о монотонной сложности многочленов (минимальном числе операций умножения на положительные числа, сложения и умножения, достаточном для вычисления заданного многочлена от этих переменных с неотрицательными коэффициентами) в случае реализации многочленов с коэффициентами из множества $\{0, 1\}$, имеющими по каждой переменной степень 1, установлен следующий результат. Сложность многочлена от n переменных, содержащего $2^{n/2} - 1$ слагаемое и задаваемого проверочной матрицей исправляющего две ошибки двоичного кода Боуза—Чоудхури—Хоквингема, имеющей размер $n \times (2^{n/2} - 1)$, имеет порядок роста $2^{n/2}$, при этом минимально возможное число операций сложения, достаточное для его вычисления, в точности равно $2^{n/2} - 2$.

Основываясь на идеях получения уже упоминавшейся асимптотически точной верхней оценки сложности КМОП-схем [7], О. М. Касим-Заде установил [22] асимптотику функции Шеннона сложности реализации функций k -значной логики в классе алгоритмов, которые можно рассматривать как обобщение на k -значный случай модели бинарных программ, изучавшейся В. А. Кузьминым [20] и являющейся, в свою очередь, близкой к бинарным программам К. Ли [53], машинам Шепердсона—Стерджиса [56] и схемам программ А. А. Ляпунова [29].

Ряд интересных результатов О. М. Касим-Заде получил (см., например, [17, 34]) также в известной по крайней мере с середины 1930-х годов [13, задача 60] задаче о построении идеализированных электрических схем из единичных сопротивлений наименьшей сложности, которая ставится следующим образом. Имеется неограниченный запас электрических сопротивлений одинаковой величины, скажем, 1 Ом (единица измерения сопротивления не важна); строятся двухполюсные схемы: выводы сопротивлений произвольным образом присоединяются друг к другу и к двум внешними зажимами — полюсам схемы; требуется создать между полюсами заданное сопротивление R . Сопротивление схемы отыскивают по известным формальным правилам электротехнических расчетов (законы Кирхгофа и Ома). Под *сложностью схемы* понимается число содержащихся в ней единичных сопротивлений. Задача состоит в том, чтобы для всякого рационального числа $R > 0$ найти величину $L(R)$ — минимальное число сопротивлений в схемах с сопротивлением R . Эта задача при всей простоте и естественности формулировки весьма трудна. До работ О. М. Касим-Заде точные значения сложности были известны для небольшого количества конкретных рациональных чисел (найжены перебором), и лишь для двух тривиальных бесконечных последовательностей: всех натуральных чисел и всех чисел, обратных к натуральным.

В работе [34] предложен метод, позволяющий при некоторых условиях получать точные значения сложности для различных бесконечных последовательностей чисел. В частности, с его помощью в работе найдены точные значения сложности всех рациональных чисел, выражающихся дробями с числителями или знаменателями, не превосходящими 6. Предлагаемый в [34] метод получения нижних оценок основан на некоторых соображениях, представляющих и самостоятельный интерес.

О. М. Касим-Заде также предъявил (см., например, [17]) несколько бесконечных серий ра-

циональных чисел с одновременно растущими числителями и знаменателями, для которых в классе параллельно-последовательных схем (π -схем) установил точные значения сложности. В частности, им доказаны равенства

$$L_{\pi}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = n, \quad L_{\pi}\left(\frac{f_{n+1}}{f_{n-1}}\right) = n, \quad L_{\pi}\left(1 + \frac{1}{s_n}\right) = n,$$

где f_n — число Фибоначчи с номером n , $s_n = f_m f_{m+1}$ при $n = 2m - 1$ и $s_n = f_m f_{m+2}$ при $n = 2m$.

Стоит дополнительно отметить, что методы, разработанные О. М. Касим-Заде при решении задач о построении минимальных по числу единичных сопротивлений электрических схем, позволили также существенно продвинуться [24] в занятой задаче о минимальных разбиениях прямоугольников с соизмеримыми сторонами на квадраты (про эту задачу см., например, [46]).

4.2. Исследования обобщенных инвариантных классов

Понятие инвариантного (относительно подстановки констант) класса было введено С. В. Яблонским, детально исследовавшим свойства таких классов с дескриптивной и метрической точек зрения [44]. Эти исследования были продолжены Ю. В. Кузнецовым, рассматривавшим классы функций, инвариантные относительно отождествления переменных, а также другие, более общие виды инвариантных классов [22, 23].

Класс Q булевых функций называется *F -инвариантным классом*, если вместе с каждой принадлежащей ему функцией g содержит все функции, получающиеся из этой функции с помощью следующих операций:

- 1) подстановка одноместных функций типа F ;
- 2) переименование переменных без отождествления;
- 3) добавление или изъятие несущественных переменных.

Пусть H — класс всех одноместных булевых функций: $H = \{0, 1, x, \bar{x}\}$, G — класс всех монотонных одноместных булевых функций: $G = \{0, 1, x\}$, C — класс констант: $C = \{0, 1\}$. В этих обозначениях C -инвариантные классы — это в точности инвариантные классы С. В. Яблонского. Исследованию H -инвариантных и G -инвариантных классов, т. е. классов, инвариантных относительно подстановок произвольных одноместных функций, и классов, инвариантных относительно подстановок монотонных одноместных функций, посвящены работы [13, 28].

С дескриптивной точки зрения имеется полная аналогия между F -инвариантными классами и инвариантными классами Яблонского: для F -инвариантных классов аналогичным образом вводятся понятия порождающего элемента, пучка, и дается описание класса как дополнения к объединению пучков неприводимой системы порождающих элементов. Поэтому О. М. Касим-Заде основное внимание уделил изучению метрических свойств F -инвариантных классов и прежде всего выяснению возможных значений параметра σ_Q , определяемого для F -инвариантного класса Q так же как и параметр инвариантного класса Яблонского:

$$\sigma_Q = \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Q_n|},$$

где Q_n — множество всех функций из класса Q от n фиксированных переменных.

С. В. Яблонским было показано [44], что равенство $\sigma_Q = 1$ имеет место в том и только том случае, когда C -инвариантный класс Q совпадает с классом P_2 всех булевых функций, и что для всякого действительного числа σ , $0 \leq \sigma < 1$, существует континуальное по мощности семейство попарно различных C -инвариантных классов Q , удовлетворяющих соотношению $\sigma_Q = \sigma$.

Наверное, наиболее важными результатами работ [13, 28] являются следующие два утверждения, устанавливающие верхние границы для числа функций в F -инвариантных классах в случае, когда эти классы не совпадают с P_2 :

1. Если H -инвариантный класс Q булевых функций не совпадает с P_2 , то существует действительное число δ , $\delta > 0$, такое, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|Q_n| < 2^{2^{(1-\delta)n}}.$$

2. Если G -инвариантный класс Q булевых функций не совпадает с P_2 , то существует действительное число δ , $\delta > 0$, такое, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|Q_n| < 2^{2^n/n^\delta}.$$

Из последнего утверждения непосредственно вытекает следствие: всякий G -инвариантный класс (а, следовательно, и всякий H -инвариантный класс) либо совпадает с P_2 , либо является нулевым (т. е. имеющим параметр 0).

Это следствие имеет прямое отношение к одной давней проблеме, касающейся инвариантных классов. В первой половине 1960-х годов О. Б. Лупановым была высказана гипотеза, в соответствии с которой всякий класс булевых функций, инвариантный относительно подстановки констант и отождествления переменных, либо совпадает с классом P_2 всех булевых функций, либо является нулевым. Следствие доказывает эту гипотезу. Этот результат был опубликован в [13]. Независимо от О. М. Касим-Заде справедливость этой гипотезы была установлена Г. Г. Аманжаевым [1].

5. Работы комбинаторно-графовой направленности

На самом деле многие уже упоминавшиеся работы О. М. Касим-Заде в той или иной степени используют комбинаторные рассуждения и/или графовый аппарат и с достаточными основаниями могли быть включены в этот раздел. В частности, доказательства всех мощностных оценок, коих в работах О. М. Касим-Заде немало, конструкции из верхних оценок сложности в бесконечных базисах, большинство результатов из последних двух разделов носят комбинаторный характер. И все-таки несколько результатов просто нельзя было не включить в данный раздел. Но даже для этих результатов исходные постановки возникли при решении различных задач синтеза и сложности управляющих систем.

Так, например, рассматриваемая в [19] комбинаторная задача покрытия n -мерного булева куба центрированными антицепями, т. е. такими антицепями, что в наборах каждой антицепи (кроме состоящей только из нулевого набора) есть общая единичная компонента, возникла при изучении ранга неявных представлений булевых функций над замкнутыми классами монотонных функций, не меньших какой-либо своей переменной. Однако, эта задача имеет и самостоятельное значение. О. М. Касим-Заде установил [19], что для всякого n , $n \geq 1$, наименьшее число центрированных антицепей, объединение которых покрывает n -мерный булев куб, равно $n \lfloor \log_2 n \rfloor + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 2$, а также для каждого n в явном виде построил минимальное покрытие. Стоит отметить, что полученное выражение для мощности минимального покрытия возникает и в других разделах дискретной математики и математической кибернетики, в частности, при подсчете минимального числа замыкающих контактов для некоторых симметрических булевых функций или при нахождении средней длины оптимального двоичного кода в случае, когда вероятности кодируемых символов близки друг к другу.

Отдельно стоит сказать про написанное О. М. Касим-Заде учебное пособие «Одна экстремальная задача комбинаторного анализа» [26], в котором рассматривается ряд вопросов, начиная с простейших фактов и заканчивая нерешенными проблемами, касающихся одной из важнейших экстремальных задач комбинаторного анализа и теории графов, известной как проблема Заранкевича. В общем случае проблема Заранкевича заключается в нахождении наибольшего натурального числа $N = N_{a,b}(m, n)$, такого, что существует булева матрица размера $m \times n$ с N единицами, не содержащая единичных подматриц размера $a \times b$, а также

в построении таких булевых матриц. В случае квадратных симметрических матриц с нулями на главной диагонали общая задача Заранкевича превращается в проблему Заранкевича для графов, заключающуюся в нахождении наибольшего возможного числа ребер в графах на n вершинах, не содержащих подграфов, изоморфных полному двудольному графу $K_{a,b}$, и в построении таких графов. Проблема Заранкевича сыграла немалую роль при возникновении и развитии одного из важнейших разделов дискретной математики — теории дискретных экстремальных задач, особенно, экстремальной теории графов.

Изложенный в пособии материал, в основном, соответствует содержанию специальных курсов лекций, читавшихся О.М. Касим-Заде по этой теме на протяжении нескольких лет на механико-математическом факультете МГУ. В этом пособии ярко проявилось умение Октая Мурадовича постепенно, начиная с простых и понятных примеров, подводить читателя к все более и более серьезным утверждениям, выделять узловые моменты и подробно их объяснять, устанавливать общую сущность казалось бы совсем разных объектов, да и просто доступно, красиво и при этом предельно точно изъясняться.

6. Научные достижения учеников

Октай Мурадович получил целый ряд фундаментальных и ярких результатов. При этом, к сожалению, многие результаты своих исследований не успел опубликовать, многое не успел завершить или сделать... Но остались его принципиальные продвижения в важнейших направлениях, разработанные им методы, интересные перспективные идеи и, конечно, ученики.

О работах некоторых учеников О.М. Касим-Заде уже говорилось — упоминавшиеся результаты Е.А. Ореховой и М.В. Старостина в области исследования неявной полноты систем и построения различных критериальных семейств функций многозначной логики, работы Е.В. Михайлец по изучению роста ранговых функций для различных систем функций многозначной логики, достижения О.В. Подольской в изучении возможных порядков роста функции Шеннона схемной сложности булевых функций над бесконечными базисами, исследования А.В. Кочергина по глубине функций многозначной логики над конечными и бесконечными базисами являются продолжением и развитием результатов научного руководителя.

Направления научных исследований других учеников О.М. Касим-Заде не имеют такой явной видимой связи с областями, к которым относятся основные результаты научного руководителя, но, безусловно, отражают его научные интересы. Вне всякого сомнения, и в этих областях О.М. Касим-Заде был высококлассным специалистом. И результаты учеников, о которых речь пойдет ниже, еще раз подтверждают как широту научного кругозора О.М. Касим-Заде, так и глубину его познаний в различных разделах дискретной математики и математической кибернетики и близких областях математики. Даже по опубликованным работам (а доведено до диссертационных работ или опубликовано так же как и у самого научного руководителя, к сожалению, не все) видно, что результаты учеников относятся к самым разным разделам дискретной математики, начиная с вероятностного направления в дискретной математике (А.Д. Яшунский) и применения теории формальных языков и грамматик в различных задачах дискретной математики (А.Д. Яшунский и А.В. Кочергин) и заканчивая изучением свойств ветвящихся цепных дробей (Н.Р. Закиров), тестовыми задачами на графах (Е.В. Дебрев) и и вопросами сложности как для классической задачи вычисления систем функций k -значной логики (Д.И. Ермакова), так и для оригинальной задачи реализации функций действительного переменного сетями из интеграторов и сумматоров (А.И. Проскураков).

Е.В. Дебревым в работах [7, 8, 9] исследована задача о построении минимальных безусловных реберных тестов, которая заключается в следующем. Пусть $\mathcal{G}(n)$ — произвольное семейство простых графов на n вершинах, а G — заранее неизвестный фиксированный граф

из $\mathcal{G}(n)$. Требуется распознать этот граф с помощью ответов на вопросы: смежны или не смежны в графе G две предъявленные вершины. После получения ответа на все заданные вопросы остальные ребра в графе G должны распознаваться однозначно.

Д. И. Ермакова изучала сложность реализации системы всех констант схемами из функциональных элементов в произвольном полном базисе функций k -значной логики. В ее работе [10] установлено, что в случае, когда значность логики равна 3, а в базис могут входить только функции не более чем от двух переменных, максимально возможная сложность равна 9.

В [7] установлено, что для семейства всех гамильтоновых циклов объем минимального безусловного теста равен $n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1$, и дана явная характеристика минимальных тестов. В [8] найдено точное значение величины объема минимального безусловного теста для всех семейств графов, являющихся объединением клик порядков p и $n-p$, а также охарактеризованы все минимальные тесты. В [9] для задачи об объеме минимальных безусловных реберных тестов для регулярных, т. е. замкнутых относительно изоморфизма, семейств графов предложена классификация регулярных семейств графов по порядку роста величины объема минимального безусловного реберного теста.

В работе [40] А. И. Проскуряков исследовал вопрос о сложности реализации функций действительного переменного посредством сетей из интеграторов и сумматоров, рассмотренных в работе К. Шеннона [55]. Ему удалось получить точные нижние оценки сложности реализации индивидуальных функций и указать функции, имеющие сколь угодно высокую заданную сложность реализации.

Н. Р. Закиров изучал вопросы представления чисел ветвящимися цепными дробями. В [11, 12] он установил, что всякое положительное алгебраическое число можно представить ветвящейся цепной дробью с целыми положительными элементами. Им предложен алгоритм построения такой ветвящейся цепной дроби, позволяющий выписывать ее в явном виде по многочлену с целыми коэффициентами, корнем которого является заданное алгебраическое число. Полученный результат естественным образом распространяется на все действительные алгебраические числа, так как любое из них можно получить прибавлением некоторого целого к подходящему положительному алгебраическому числу.

Работа [47] — одна из первых работ А. Д. Яшунского — достаточно точно характеризует сферу его научных интересов. В этой работе исследовались случайные булевы выражения, получаемые случайной независимой подстановкой констант 1 и 0 с вероятностями соответственно p и $1-p$ в случайные неповторные формулы над заданным базисом. Показано, что для любого конечного базиса при любом p , $0 < p < 1$, вероятность, с которой построенные выражения принимают значение 1, стремится с ростом длины выражений к некоторому конечному пределу $P_1(p)$. Получено явное представление функции вероятности $P_1(p)$ для всех конечных базисов, изучены аналитические свойства этой функции, исследовано её поведение в зависимости от свойств базиса. В дальнейшем фокус исследований сместился на вероятностные свойства неповторных формул в различных системах функций k -значной логики, для которых упомянутая выше функция вероятности $P_1(p)$ по сути является некоторой осредненной характеристикой. В этой области А. Д. Яшунским получен ряд интересных и важных результатов о приближении по распределению случайных величин в системах, получаемых путем применения операций из заданного множества к начальному набору независимых случайных величин. В частности, задача описания аппроксимируемых случайных величин полностью решена для систем операций, представляющих собой замкнутый класс булевых функций [57]. В случае произвольного k подробно исследованы аппроксимирующие возможности операций сложения и умножения по модулю k при преобразованиях k -значных случайных величин, и, в частности, установлено, что совокупность полиномиальных преобразований невырожденных случайных величин по модулю k содержит аппроксимации произвольных k -значных случайных величин тогда и только тогда, когда k — степень простого числа [48]. Наконец, выделены

классы систем операций, в которых множество аппроксимируемых распределений имеет единственную предельную точку, т. е. в которых в определенном смысле выполняется предельный вероятностный закон [49].

Перечисление всех результатов А. Д. Яшунского заняло бы очень много места. Поэтому, наверное, уместно просто дать ссылку на докторскую диссертацию [50], которая совсем недавно была защищена в МГУ и в которой содержатся постановки основных решаемых им задач, а также обзор полученных результатов.

Отрадно, что многие идеи Октая Мурадовича Касим-Заде и разработанные им методы продолжают работать в исследованиях других авторов, в том числе его учеников.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ О. М. КАСИМ-ЗАДЕ

1. Об одновременной минимизации сложности и мощности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 33. М.: Наука, 1978. С. 215–220.
2. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 4. С. 797–800.
3. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 117–179.
4. О мощности схем в базисах некоторых типов // Дискретная математика и математическая кибернетика. Серия «Вопросы кибернетики». Т. 86. М.: ВЦ АН СССР, 1982. С. 77–93..
5. О сложности монотонных многочленов // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 136–138.
6. О влиянии базиса на активность схем из функциональных элементов // Труды Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 143–145.
7. О сложности реализации булевых функций в одной модели электронных схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 145–160.
8. Об одной мере активности схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 218–228.
9. Kassim-Zade O. M. On some complexity measures for Boolean functions // Complexity and Realization of Boolean Functions. Dagstuhl-Seminar-Repot № 45, 24.8–28.8.92. 1992.
10. О сложности схем в одном бесконечном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1994. № 6. С. 40–44.
11. О сложности реализации булевых функций схемами в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 7–20.
12. О неявной выразимости булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.
13. О классах булевых функций, инвариантных относительно подстановки функций от одной переменной // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 79–82.
14. О синтезе сетей из функциональных элементов // Доклады Академии наук. 1996. Т. 348, № 2. С. 159–161.

15. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады Академии наук. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301.
16. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 133–188.
17. О сложности схем из единичных сопротивлений и о некоторых свойствах чисел Фибоначчи // Аналитическая теория чисел и приложения. Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 218. С. 233–247.
18. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1997. № 4. С. 59–61.
19. О минимальных покрытиях булева куба центрированными антицепями // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 1997. Т. 4, № 3. С. 9–17.
20. О сложности параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. М.: Наука, 1998. С. 85–160.
21. О мощности индивидуальных функций // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1998. С. 63–65.
22. О сложности реализации функций в одном классе алгоритмов // Материалы IX Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1999. С. 25–30.
23. О поведении функций Шеннона сложности параметрических представлений булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 3. С. 66–68.
24. О минимальных разбиениях плоских прямоугольников на квадраты // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 263–265.
25. Об одном методе получения оценок сложности схем над бесконечными базисами // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 2002. С. 247–254.
26. Одна экстремальная задача комбинаторного анализа. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004. ISBN 978-5-458-26668-0. 88 с.
27. Об одном методе получения оценок сложности схем над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2004. Т. 11, № 2. С. 41–65.
28. О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. М.: Наука, 2006. С. 9–34.
29. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 1. С. 18–21.
30. О неявной полноте в k -значной логике // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 10–14.
31. О глубине булевых функций над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2007. Т. 14, № 1. С. 45–69.

32. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным бесконечным базисом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 6. С. 55–57.
33. О порядках роста функций Шеннона сложности схем над бесконечными базисами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2013. № 3. С. 55–57.
34. О точных значениях сложности чисел при реализации схемами из единичных сопротивлений // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова. М., 2016. С. 134–137.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аманжаев Г. Г. О замыкании ненулевого инвариантного класса Яблонского по операции отождествления переменных // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1995. №3. С. 76–79.
2. Вайнцвайг М. Н. О мощности схем из функциональных элементов // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, № 2. С. 320–323.
3. Гилберт Э. Н. Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций // Кибернетический сборник. Вып. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. С. 175–188.
4. Горяшко А. П. Энергетические оценки сложности функционирования логических сетей // Известия АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1969. № 2. С. 86–95.
5. Горяшко А. П. Логические схемы и реальные ограничения. М.: Энергоиздат, 1982.
6. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.
7. Дебрев Е. В. Об одной задаче комбинаторного поиска // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 3. С. 8–17.
8. Дебрев Е. В. О различении графов из некоторых множеств посредством безусловных реберных тестов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 2002. С. 177–192.
9. Дебрев Е. В. О безусловных реберных тестах для некоторых семейств графов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 8–17.
10. Ермакова Д. И. О сложности реализации системы констант P_3 в некоторых базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. С. 137–158.
11. Закиров Н. Р. О представлении произвольного алгебраического числа периодической ветвящейся цепной дробью // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 65–78.
12. Закиров Н. Р. О представлении алгебраических чисел периодическими ветвящимися цепными дробями // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 4. С. 24–29.
13. Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly». М.: Мир, 1977.

14. Карпова Н. А. О некоторых свойствах функций Шеннона // Матем. заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 663–674.
15. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики в бесконечных базисах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 1. С. 22–26.
16. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики в конечных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 1. С. 56–59.
17. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики над произвольными базисами // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20, № 6. С. 155–158.
18. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, № 1. С. 42–74.
19. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О схемной сложности функций k -значной логики в одном бесконечном базисе // Прикладная математика и информатика. 2018. № 58. С. 21–34.
20. Кузьмин В. А. Оценка сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Вып. 29. Новосибирск, 1976. С. 11–39.
21. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
22. Кузнецов Ю. В. О классах булевых функций, инвариантных относительно отождествления переменных // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 780–785.
23. Кузнецов Ю. В. Исследование инвариантных классов, связанных с функциональными системами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: МГУ, 1987.
24. Ложкин С. А. Асимптотическое поведение функций Шеннона для задержек схем из функциональных элементов // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 6. С. 939–951.
25. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Сер. радиофизика. 1958. № 1. 120–140.
26. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики, вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63–97.
27. Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики, вып. 26. М.: Наука, 1973. С. 109–140.
28. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
29. Ляпунов А. А. О логических схемах программ // Проблемы кибернетики, вып. 1. М.: Физматгиз, 1958. С. 46–74.
30. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем функций // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 6. С. 917–919.

31. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем булевых функций // Докл. АН СССР. 1963. Т 150. № 3. С. 477–479.
32. Михайлец Е. В. О ранге неявных представлений над одним классом функций трехзначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 5. С. 65–67.
33. Нечипорук Э. И. О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами // Проблемы кибернетики, вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 123–160.
34. Нечипорук Э. И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики, вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 49–62.
35. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 27–74.
36. Орехова Е. А. О критерии неявной шэфферовости в трёхзначной логике // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2003. Т. 10, № 3. С. 82–105.
37. Подольская О. В. О нижних оценках сложности схем в базисе антицепных функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 2. С. 17–23.
38. Подольская О. В. Сложность реализации симметрических булевых функций схемами в базисе антицепных функций // Дискретная математика. 2015. Т. 27, № 3. С. 95–107.
39. Подольская О. В. Об оценках функций Шеннона сложности схем в некоторых бесконечных базисах // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова. М., 2016. С. 150–152.
40. Проскуряков А. И. О сложности реализации некоторых функций сетями из элементов, осуществляющих аналитические операции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. С. 262–269.
41. Сапоженко А. А., Ложкин С. А. Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12, вып. 1. С. 42–47.
42. Старостин М. В. Неявно предполные классы и критерий неявной полноты в трехзначной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 2. С. 56–59.
43. Старостин М. В. Критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах предполных классов [Электронный ресурс] // arXiv.org. URL: <https://arxiv.org/abs/2103.16631> (дата обращения: 30.03.2021)
44. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1959. С. 75–121.
45. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
46. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? М.: Наука, 1968.
47. Яшунский А. Д. Об асимптотике вероятности значений случайных булевых выражений // Дискретный анализ и исследование операций. 2006, Т. 13, № 2. 59–99.

48. Яшунский А. Д. Полиномиальные преобразования случайных величин на конечных множествах // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 6. С. 951–954.
49. Яшунский А. Д. О необходимых условиях предельных вероятностных теорем в конечных алгебрах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493, № 1. С. 47–50.
50. Яшунский А. Д. Исследования по теории итеративных систем, порождаемых конечными случайными величинами. Арифметический и комбинаторно-логический подход. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М., 2021. (URL: <https://istina.msu.ru/dissertations/364891994/>)
51. Burks A. W., Wright J. B. Theory of logical nets // Proc. IRE. 1953. V. 41, № 10. P. 1357–1365.
52. Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. V. 101, № 3. P. 427–430.
53. Lee C. Y. Representation of switching circuits by binary-decision programs // Bell System Technical Journal. 1959. V. 38, № 4. P. 985–1000.
54. Muller D. E. Complexity in electronic switching circuits // IRE Trans. on Electronic Computers. 1958. V. EC-5, N 1. P. 15–19.
55. Shannon C. E. Mathematical theory of the differential analyzer // J. Math, and Phys. 1941. V. 20, № 4. P. 337–354.
56. Shepherdson J., Sturgis H. Computability of recursive functions // Journal of the Association for Computer Machinery. 1963. V. 10, № 2. P. 217–255.
57. Yashunsky A. D. Clone-induced approximation algebras of Bernoulli distributions. Algebra Univers. 2019. V. 80, № 5.

LIST OF THE MAIN WORKS OF O. M. KASIM-ZADEH

1. Kasim-Zade, O. M. 1978, “Simltaneous minimization of the complexity and power of circuits of functional elements”, *Probl. Kibern.*, vol. 33, pp. 215–220.
2. Kasim-Zade, O. M. 1980, “On a measure of the complexity of schemes of functional elements”, *Sov. Math. Dokl.*, vol. 20, pp. 203–206.
3. Kasim-Zade, O. M. 1981, “On a measure of complexity of circuits of functional elements”, *Probl. Kibern.*, vol. 38, pp. 117–179.
4. Kasim-Zade, O. M. 1982, “On the power of circuits in bases of certain types”, *Vopr. Kibern.*, vol. 86, pp. 77–93.
5. Kasim-Zade, O. M. 1986, “On the complexity of monotone polynomials”, *Proc. of All-Union Seminar on Discrete Math. and its Appl.*, pp. 136–138.
6. Kasim-Zade, O. M. 1989, “Effect of a basis on the activity of circuits consisting of functional elements”, *Proc. of All-Union Seminar on Discrete Math. and its Appl.*, pp. 143–145.
7. Kasim-Zade, O. M. 1989, “On complexity of realization of Boolean functions in a model of electronic circuits”, *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 2, pp. 145–160.

8. Kasim-Zade, O.M. 1992, "On a measure of activity of schemes of functional elements", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 4, pp. 218–228.
9. Kassim-Zade, O.M. 1992, "On some complexity measures for Boolean functions", *Complexity and realization of Boolean functions*, Dagstuhl-Seminar-Repot № 45, 24.8–28.8.92.
10. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On the complexity of circuits in an infinite basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 49, no. 6, pp. 37–40.
11. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On the complexity of the realization of Boolean functions by circuits in an infinite basis", *Diskret. Anal. Issled. Oper.*, vol. 2, no. 1, pp. 7–20.
12. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On implicit expressibility of Boolean functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 50, no. 2, pp. 42–45.
13. Kasim-Zade, O.M. 1995, "On classes of Boolean functions that are invariant with respect to the substitution of functions of one variable", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 50, no. 3, pp. 46–48.
14. Kasim-Zade, O.M. 1996, "On the synthesis of networks of functional elements", *Dokl. Math.*, vol. 53, no. 3, pp. 352–354.
15. Kasim-Zade, O.M. 1996, "Implicit expressibility in two-valued logic and cryptoisomorphisms of two-element algebras", *Dokl. Math.*, vol. 53, no. 3, pp. 366–368.
16. Kasim-Zade, O.M. 1996, "On a metric characteristic of implicit and parametric representations of Boolean functions", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 6, pp. 133–188.
17. Kasim-Zade, O.M. 1997, "On the complexity of schemes of unit resistances, and some properties of Fibonacci numbers", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 228–242.
18. Kasim-Zade, O.M. 1997, "A general upper bound for the complexity of schemes in an arbitrary infinite complete basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 52, no. 4, pp. 47–49.
19. Kasim-Zade, O.M. 1997, "On minimal covering of the Boolean cube by centered antichains", *Diskret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, vol. 4, no. 3, pp. 9–17.
20. Kasim-Zade, O.M. 1998, "On complexity of parametric representations of Boolean functions", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 7, pp. 85–160.
21. Kasim-Zade, O.M. 1998, "On the power of individual functions", *Proc. of Seminar on Discrete Math. and its Appl.*, pp. 63–65.
22. Kasim-Zade, O.M. 1999, "On complexity of functions realization in one class of algorithms", *Proc. Interstate School-seminar "Synthesis and complexity of control systems"*, pp. 25–30.
23. Kasim-Zade, O.M. 2001, "On the behavior of Shannon functions for the complexity of parametric representations of Boolean functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 56, no. 3, pp. 43–45.
24. Kasim-Zade, O.M. 2001, "On minimal partitions of flat rectangles into squares", *Proc. VII International Seminar "Discrete Mathematics and its Applications"*, pp. 263–265.
25. Kasim-Zade, O.M. 2002, "On a method for obtaining bounds for the complexity of schemes over infinite-dimensional bases", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 11, pp. 247–254.
26. Kasim-Zade, O.M. 2004, *Odna ekstremal'naya zadacha kombinatornogo analiza* [One extreme combinatorial analysis problem], Mech-mat MGU, Moscow.

27. Kasim-Zade, O.M. 2004, "On a method for obtaining bounds on the circuit complexity in an arbitrary infinite basis", *Diskret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, vol. 11, no. 2, pp. 41–65.
28. Kasim-Zade, O.M. 2006, "On metric properties of generalized invariant classes", *Mat. Vopr. Kibernet.*, vol. 15, pp. 9–34.
29. Kasim-Zade, O.M. 2007, "On the depth of Boolean functions realized by circuits over an arbitrary basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 62, no. 1, pp. 18–21.
30. Kasim-Zade, O.M. 2007, "Implicit completeness in k -valued logic", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 62, no. 3, pp. 90–94.
31. Kasim-Zade, O.M. 2008, "On the depth of Boolean functions over an arbitrary infinite basis", *J. Appl. Industr. Math.*, vol. 2, no. 2, pp. 196–210.
32. Kasim-Zade, O.M. 2012, "Depth of Boolean functions realized by circuits over an arbitrary infinite basis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 1, pp. 69–70.
33. Kasim-Zade, O.M. 2013, "Orders of growth of Shannon functions for circuit complexity over infinite bases", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 3, pp. 170–172.
34. Kasim-Zade, O.M. 2016, "On the exact values of complexity of numbers when implemented by circuits of unit resistances", *Proc. Academician O. B. Lupanov XII International Seminar "Discrete Mathematics and its Applications"*, pp. 134–137.

REFERENCES

1. Amanzhaev, G. G. 1995, "On the closure of the nonzero invariant Yablonskiĭ class by the variable identification operation", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 50, no. 3, pp. 43–45.
2. Vaĭncvaĭg, M. N. 1961, "On the power of networks of functional elements", *Soviet Physics Dokl.*, vol. 6, pp. 545–547.
3. Gilbert, E. N. 1954, "Lattice Theoretic Properties of Frontal Switching Functions", *J. Math. Phys.*, vol. 33, no. 1, pp. 57–67.
4. Goryashko, A. P. 1969, "Energy bounds of complexity of functioning of logical networks", *Izvestiya AN SSSR. Ser. Tekhn. Kibernetika*, no. 2, pp. 86–95.
5. Goryashko, A. P. 1982, *Logicheskie skhemy i real'nye ogranicheniya* [Logic Circuits and Real Restrictions], Moscow, Energoizdat.
6. Danil'chenko, A. F. 1977, "On parametric expressibility of functions of three-valued logic", *Algebra i logika*, vol. 16, no. 4, pp. 397–416.
7. Debrev, E. B. 2002, "On a combinatorial search problem", *Discrete Math. Appl.*, vol. 12, no. 4, pp. 325–335.
8. Debrev, E. B. 2002, "On distinguishing graphs from certain families by unconditional edge tests", *Mat. Vopr. Kibernet.*, vol. 11, pp. 177–192.
9. Debrev, E. B. 2003, "On unconditional edge tests for some families of graphs", *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, vol. 10, no. 4, pp. 8–30.
10. Ermakova, D. I. 2008, "On the complexity of realization a system of constants of P_3 in some bases", *Mat. Vopr. Kibernet.*, vol. 17, pp. 137–158.

11. Zakirov, N. R. 2006, "On representing an arbitrary algebraic number as a periodic branching continuous fraction", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 15, pp. 65–78.
12. Zakirov, N. R. 2007, "On the representation of algebraic numbers by periodic branching continued fractions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 62, no. 4, pp. 148–152.
13. Alekseyev, V. M. (ed.) 1977, *Izbrannye zadachi iz zhurnala «American Mathematical Monthly»* [Favorites problems from the journal «American Mathematical Monthly»], Mir, Moscow.
14. Karpova, N. A. 1970, "Some properties of Shannon functions", *Math. Notes*, vol. 8, no. 5, pp. 843–849.
15. Kochergin, A. V. 2011, "On the depth of functions of k -valued logic in infinite bases", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 66, no. 1, pp. 20–24.
16. Kochergin, A. V. 2013, "Depth of functions of k -valued logic in finite bases", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 1, pp. 77–79.
17. Kochergin, A. V. 2018, "On the depth of k -valued logic functions over arbitrary bases", *J. Math. Sci.*, vol. 233, no. 1, pp. 100–102.
18. Kochergin, V. V. & Mikhailovich, A. V. 2018, "On the complexity of multivalued logic functions over some infinite basis", *J. Appl. Ind. Math.*, vol. 12, pp. 40–58.
19. Kochergin, V. V. & Mikhailovich, A. V. 2019, "Circuit complexity of k -valued logic functions in one infinite basis", *Comput. Math. and Mod.*, vol. 30, no. 1, pp. 13–25.
20. Kuz'min, V. A. 1976, "Bound of realization complexity of logic algebra functions by the simplest types of binary programs", *Metody diskretnogo analiza v teorii kodov i skhem*, vol. 29, pp. 11–39.
21. Kuznetsov, A. V. 1979, "On the means for detecting non-derivability or inexpressibility", *Logicheskij Vывod*, Nauka, Moscow, pp. 5–33.
22. Kuznetsov, Yu. V. 1986, "On classes of Boolean functions which are invariant with respect to identification of variables", *Sov. Math., Dokl.*, vol. 34, pp. 339–344.
23. Kuznetsov, Yu. V. 1987, *Issledovanie invariantnykh klassov, svyazannykh s funkcional'nymi sistemami* [Study of invariant classes related to functional systems], Dissertation for the Degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, MGU, Moscow.
24. Lozhkin, S. A. 1976, "Asymptotic behavior of Shannon functions for the delays of schemes of functional elements", *Math. Notes*, vol. 19, no. 6, pp. 548–555.
25. Lupanov, O. B. 1958, "A method of circuit synthesis", *Izvestiya VUZ, Radiofiz.*, vol. 1, pp. 120–140.
26. Lupanov, O. B. 1963, "On the synthesis of some classes of control systems", *Probl. Kibern.*, vol. 10, pp. 63–97.
27. Lupanov, O. B. 1973, "The synthesis of circuits from threshold elements", *Probl. Kibern.*, vol. 26, pp. 109–140.
28. Lupanov, O. B. 1984, *Asimptoticheskie Ocenki Slozhnosti Upravlyayushchih Sistem* [Asymptotic Estimates of Complexity of Control Systems], MSU, Moscow.
29. Lyapunov, A. A. 1958, "On logic circuits of programs", *Probl. Kibern.*, vol. 1, pp. 46–74.

30. Markov, A. A. 1958, "On the inversion complexity of a system of functions", *J. ACM*, vol. 5, no. 4, pp. 331–334.
31. Markov, A. A. 1963, "On the inversion complexity of systems of Boolean functions", *Sov. Math. Dokl.*, vol. 4, pp. 694–696.
32. Mikhailets, E. V. 2008, "A rank of implicit representations over a class of three-valued logic functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 63, no. 5, pp. 221–223.
33. Nechiporuk, E. I. 1962, "On the complexity of circuits in some bases containing nontrivial elements with zero weights", *Probl. Kibern.*, vol. 8, pp. 123–160.
34. Nechiporuk, E. I. 1964, "On a synthesis of schemes of threshold elements", *Probl. Kibern.*, vol. 11, pp. 49–62.
35. Orekhova, E. A. 2003, "On a criterion for implicit completeness in three-valued logic", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 12, pp. 27–74.
36. Orekhova, E. A. 2003, "A criterion for the implicit Sheffer property in three-valued logic", *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, vol. 10, no. 3, pp. 82–105.
37. Podolskaya, O. V. 2013, "Lower estimates of circuit complexity in the basis of antichain functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 68, no. 2, pp. 98–103.
38. Podolskaya, O. V. 2016, "Circuit complexity of symmetric Boolean functions in antichain basis", *Discrete Math. Appl.*, vol. 26, no. 1, pp. 31–39.
39. Podolskaya, O. V. 2016, "On bounds of Shannon functions of circuit complexity in some infinite bases", *Proc. Academician O. B. Lupanov XII International Seminar "Discrete Mathematics and its Applications"*, pp. 150–152.
40. Proskuryakov, A. I. 2002, "On the complexity of the realization of some functions by networks of elements that perform analytic operations", *Mat. Vopr. Kibern.*, vol. 11, pp. 262–269.
41. Sapozhenko, A. A. & Lozhkin, S. A. 1983, "Methods of logical design and evaluation of the complexity of circuits on complementary MOSFETs", *Mikroelektronika*, vol. 12, no. 1, pp. 42–47.
42. Starostin, M. V., 2018, "Implicit precomplete classes and a criterion of implicit completeness in the three-valued logic", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 73, no. 2, pp. 82–84.
43. Starostin, M. V. 2021, "Implicit completeness criterion in three-valued logic in terms of maximal classes". Available at: <https://arxiv.org/abs/2103.16631>
44. Yablonskiy, S. V. 1959, "On algorithmic difficulties in the synthesis of minimal contact circuits", *Probl. Kibern.*, vol. 2, pp. 75–121.
45. Yablonskiy, S. V., Gavrillov G. P. & Kudryavcev V. B. 1966, *Funkcii Algebry Logiki i Klassy Posta* [Logic Algebra Functions and Post Classes], Nauka, Moscow.
46. Yaglom, I. M. 1968, *Kak razrezat' kvadrat?* [How to cut a square?], Nauka, Moscow.
47. Yashunsky, A. D. 2007, "Asymptotics of the probability of values of random Boolean expressions", *J. Appl. Industr. Math.*, vol. 1, no. 4, pp. 509–531.
48. Yashunsky, A. D. 2019, "Polynomial transformations of random variables on finite sets", *Math. Notes*, vol. 106, no. 6, pp. 1025–1027.

49. Yashunsky, A. D. 2020, “On necessary conditions of probability limit theorems in finite algebras”, *Doklady Mathematics*, vol. 102, no. 1, pp. 301–303.
50. Yashunsky, A. D. 2021, *Issledovaniya po teorii iterativnyh sistem, porozhdaemyh konechnymi sluchajnymi velichinami. Arifmeticheskij i kombinatorno-logicheskij podhod* [Research on the theory of iterative systems generated by finite random variables. Arithmetic and combinatorial-logical approach], Dissertation for the degree of doctor of physical and mathematical sciences. Available at: <https://istina.msu.ru/dissertations/364891994/>
51. Burks, A. W. & Wright, J. B. 1953, “Theory of logical nets”, *Proc. IRE.*, vol. 41, no. 10, pp. 1357–1365.
52. Burris, S. & Willard, R. 1987, “Finitely many primitive positive clones”, *Proc. of the American Mathematical Society*, vol. 101, no. 3, pp. 427–430.
53. Lee, C. Y. 1959, “Representation of switching circuits by binary-decision programs”, *Bell System Technical Journal*, vol. 38, no. 4, pp. 985–1000.
54. Muller, D. E. 1958, “Complexity in electronic switching circuits”, *RE Trans. on Electronic Computers*, vol. EC-5, no. 1, pp. 15–19.
55. Shannon, C. E. 1941, “Mathematical theory of the differential analyzer”, *J. Math, and Phys.*, vol. 20, no. 4, pp. 337–354.
56. Shepherdson, J. & Sturgis, H. 1963, “Computability of recursive functions”, *Journal of the Association for Computer Machinery*, vol. 10, no. 2, pp. 217–255.
57. Yashunskiy, A. D. 2019, “Clone-induced approximation algebras of Bernoulli distributions”, *Algebra Univers.*, vol. 80, no. 5.

Получено 08.12.21

Принято в печать 22.06.2022