ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 514.8+514.1 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-74-87

Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов

М. Ю. Житная

Житная Марина Юрьевна — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: g-ferra@mail.ru

Аннотация

Шарнирные механизмы можно представить как конструкции, состоящие из твёрдых тел, например, стержней, некоторые пары из которых шарнирно скреплены друг с другом, то есть имеют общую точку, вокруг которой могут свободно варащаться. Широкое распространение шарнирные механизмы получили вместе с развитием приборостроения. Одной из важных первых задач было конструирование механизма, в котором один из шарниров двигался бы по отрезку прямой. Эта задача получила несколько решений, некоторые из которых были предложены Поселье, Липкиным, Уаттом, Гартом. После того, как стало понятно, как с помощью шарнирных механизмов нарисовать отрезок, следующим большим вопросом стало описание всех возможных кривых, которые могут быть траекториями одного из шарниров механизма. Решением этой задачи стала теорема Кинга, которая говорит, что множество рисуемо тогда и только тогда, кода оно либо всё объемлющее пространство, либо полуалгебраический компакт [16], [17].

Вопросы, которые рассматриваются автором данной статьи, продолжают изучение работы шарнирных механизмов и исследуют возможности их применения для решения задач оптимизации, например, поиска кратчайшей сети, соединяющей набор точек в евклидовом пространстве. Основной результат данной работы описывает построение механизма, который строит минимальную параметрическую сеть в евклидовом пространстве размерности $d \geqslant 2$. В предыдущей работе автора [7] приведено доказательство существования шарнирного механизма, который строит минимальную сеть Штейнера, а также предложен вариант сборки такого механизма. Так как основной задачей было доказательство существования такого механизма, без его минимизации, описанный способ сборки заведомо можно оптимизировать, что позволяют сделать результаты, полученные в данной работе.

Ключевые слова: Проблема Штейнера, минимальные параметрические сети, шарнирный механизм, локально минимальное дерево.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

М. Ю. Житная. Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 74–87.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 2.

UDC 514.8+514.1 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-74-87

Modeling of minimal parametrical networks in euclidean spaces by means of linkages

M. Y. Zhitnaya

Zhitnaya Marina Yur'evna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State Univercity (Moscow).
e-mail: g-ferra@mail.ru

Abstract

Linkages can be represented as devices consisting of solid bodies, for example, rods, some pairs of which are connected to each other by hinges, in other words they have a common point around which they can freely rotate. Linkages became widespread along with the development of instrumentation. One of the important first problems was to design a mechanism in which one of the hinges would move along a straight line segment. This issue has received several solutions, some of which were proposed by Peaucellier, Lipkin, Watt, Garth. After it became clear how to draw a segment, the next big problem was to describe all possible curves that could be the trajectories of one of the hinges of a linkage. The solution to this problem was King's theorem, which says that a set can be drawn if and only if it is either an ambient space or a semi-algebraic compact [16], [17].

The issues investigated by the author of this paper continue the exploration of previous tasks related to linkages, since they consider the possibilities of solving optimization problems using linkages, for example, finding the shortest network connecting a set of points in Euclidean space. The main result of this work describes the construction of a mechanism that builds a minimal parametric network in a Euclidean space of dimension $d \geqslant 2$. In the author's previous work, a proof of the existence of a linkages that builds a minimal Steiner network is given, and a variant of constructing such a mechanism is also proposed. Since the main task was to prove the existence of such a mechanism, without minimizing it. The described assembly method can obviously be optimized and the results obtained in this work allows us to do that.

Keywords: Steiner problem, minimal parametrical network, linkage, locally minimal network.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
M. Y. Zhitnaya, 2022, "Modeling of minimal parametrical networks in euclidean spaces by means of linkages", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 74–87.

1. Введение

Шарнирные механизмы — конструкции, которые в жизни встречаются очень часто: дверные петли, настольные лампы, детали автомобилей, например, дворники. Шарнирный механизм можно представить себе как набор твёрдых тел (чаще всего это стержни), некоторые пары которых соединены между собой с помощью шарнирных креплений, то есть имеют общую точку, вокруг которой могут вращаться с разной степенью свободы [1], [2]. Во времена активного развития промышленности, когда распространение механизмов набирало обороты, перед инженерами возникла одна из первых серьёзных задач: как перевести круговое движение, которое очень легко реализуется, если закрепить один из шарниров стержня, в прямолинейное движение. Можно было бы использовать движение втулки, скользящей вдоль стержня, но такая конструкция не является шарнирным механизмом. Одним из первых механизмов, который почти решал эту задачу, был механизм Уатта, который моделировал движение приближенное к прямолинейному и был использован для создания паровой машины. Также механизм, реализующий движение почти по прямой был построен русским математиком и механиком Чебышёвым, который изобрёл стопоходящую машину [3]. Точным решением этой задачи стал инверсор Поселье–Липкина [6], затем появились инверсоры Гарта, Кемпе–Сильвестра. Трёхмерным решением этой задачи стал механизм Саррюса.

На практике имеется большое количество терминологии и способов определения шарнирных механизмов [4], [5]. В этой статье шарнирные механизмы будут рассмотрены больше с теоретико-графовой точки зрения.

После того, как научились рисовать прямую с помощью шарнирных механизмов, следующим важным результатом стала теорема Кемпе, которая показывает, что с помощью шарнирных механизмов можно построить любую алгебраическую кривую, лежащую в круге [11], [12], [15].

Один из естественных вопросов, который здесь возникает: какие траектории могут быть у шарниров, то есть что можно нарисовать с помощью шарнирных механизмов. Ответ даёт теорема Кинга, которая говорит, что множество рисуемо тогда и только тогда, когда оно или является всем объемлющим пространством или полуалгебраическим компактом [16], [17].

Другой вопрос, который возник недавно: можно ли с помощью шарнирных механизмов реализовывать оптимальные геометрические конфигурации, то есть решать оптимизационные задачи. Одной из классических таких задач является проблема Штейнера. Она состоит в поиске кратчайшей сети (минимального дерева Штейнера [14]), соединяющей множество точек N в метрическом пространстве. Хорошо известно, что кратчайшая сеть с невырожденными рёбрами является деревом, все вершины степени один граничные, а в случае, когда объемлющее пространство — евклидово, рёбра представляют собой отрезки, стыкующиеся в вершинах под углами не меньше 120°, в частности, степени вершин не превосходят трёх, углы между смежными рёбрами не меньше 120°, а также все вершины степени два — граничные, так как, если есть внутренняя вершина степени два, то её можно выкинуть, соединив смежные ей вершины отрезком, длина которого по неравенству треугольника будет не больше суммы длин рёбер, которые выходили из вершины, которую убрали.

Основной результат, полученный в этой статье, говорит о том, что для произвольного бинарного дерева G с границей ∂G существует d-мерный шарнирный механизм L, $d \geqslant 2$ который для произволного граничного отображения $\varphi\colon \partial G \mapsto \mathbb{R}^d$, при котором максимальное расстояние между образами ограничено некоторым числом (в силу конечности стержней шарнирного механизма), строит минимальную параметрическую сеть. Интересным фактом является то, что полученный результат позволяет одним механизмом механизм моделировать семейство оптимальных сетей разной топологической структуры (за счет возможности вырождения ребер), и реализует переход от “жёстких” углов в 120° к “не жёстким” углам величины не меньше 120°.

Основной результат предыдущей работы автора [7] описывает, как построить механизм, который находит минимальное дерево Штейнера на плоскости. Построенный в результате механизм содержит очень большое количество стержней, но в момент создания работы прежде всего было интересно найти принципиальное описание самого механизма, не было задачи о его оптимизации, хотя заведомо это возможно сделать. Например, в своей конструкции механизм содержит шарнирную реализацию алгоритма Мелзака [10], не оптимизированную с помощью работы Хванга [9]. Также механизм осуществлял большой перебор топологий Штейнера, в том числе и тех, которые получаются друг из друга вырождениями некоторых рёбер. Оптимизировать эту и описанную выше проблему можно за счёт результатов, которые будут приведены в этой статье, а именно, можно будет перебирать только полные топологии Штейнера, и для каждой из них строить единственную сеть, которая будет минимальной параметрической.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Алексею Августиновичу Тужилину за чуткое неустанное сопровождение в работе, помощь в преодолении трудностей и постановку нестандартных, увлекательных и вдохновляющих задач, а также профессору Александру Олеговичу Иванову за наставническую заботу, поддержку и помощь.

2. Основной текст статьи

2.1. Формализация сетей

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, в котором выделено некоторое подмножество вершин $\partial G \subset V$, называемых *граничными*. Остальные вершины будем называть *внутренними*. Пусть также задано отображение $\varphi\colon \partial G \to \mathbb{R}^d$, которое будем называть *граничным отображением*. Отображение $\Gamma\colon V \to \mathbb{R}^d$, такое, что $\Gamma|_{\partial G} = \varphi$ будем называть *сетью типа* (G, φ) в $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что $uv \in E$ — *вырожденное ребро сети* Γ, если $\bigl|\Gamma(u)\Gamma(v)\bigr| = 0$, иначе uv — *невырожденное ребро сети*.

2.2. Формализация шарнирных механизмов

Рассмотрим простой конечный граф $G = (V, E)$, положительную функцию $\ell\colon E \to \mathbb{R}$ и некоторое отображение $\psi\colon W \to \mathbb{R}^d$, где W — некоторое подмножество множества вершин V. Тройку $L = (G, \ell, \psi) = \bigl((V, E), \ell, \psi\bigr)$ будем называть *шарнирным механизмом в пространстве* $\mathbb{R}^d$. Вершины графа G будем называть *шарнирами*, элементы множества W — *граничными* или *неподвижными шарнирами*, а элементы $V \setminus W$ — *внутренними* или *подвижными шарнирами*. Также множество W неподвижных шарниров будем обозначать через ∂G и называть *границей шарнирного механизма* L, а отображение ψ — граничным отображением. Будем говорить, что *граничный шарнир* w *закреплён в точке* $\psi(w)$. Рёбра графа G будем называть *стержнями*, а значение $\ell(e)$, $e \in E$ — *длиной стержня* e.

Рассмотрим шарнирный механизм $L = \bigl((V, E), \ell, \psi\bigr)$ и отображение $C\colon V \to \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что C *согласовано с* ψ, если $C|_W = \psi$; отображение C *согласовано с* ℓ, если для любого ребра $uv \in E$ верно, что $\bigl|C(u)C(v)\bigr| = \ell(uv)$. Отображение C, согласованное с ℓ и ψ, будем называть *конфигурацией*, или *реализацией*, или *положением шарнирного механизма* L *в пространстве* $\mathbb{R}^d$, при этом, будем говорить, что $C(v)$ — *положение шарнира* v. Множество всех положений C шарнирного механизма L образует *конфигурационное пространство* $\mathcal{C}_L$ *механизма* L. Ограничение $\mathcal{C}_L|_v$, где $v \in V$ — шарнир механизма L, назовём *конфигурационным пространством шарнира* v.

Важное замечание: чтобы задать шарнирный механизм с непустым конфигурационным пространством достаточно указать какую-либо его конфигурацию или описать алгоритм построения (сборки) этого механизма.

Будем говорить, что шарнир s механизма L_1 *рисует множество* M, если его конфигурационное пространство совпадает с M. Множество M может зависеть от положений других шарниров (например, “M =окружность с центром в O, радиуса AB где O, A, B — подвижные шарниры”).

Будем говорить, что механизм $L = \bigl((V, E), \ell, \psi\bigr)$ *рисует множество сетей* $[G]$, *для которых выполнено свойство* S, где $G = (V_G, E_G)$, если во множестве шарниров V существует подмножество $U \subset V$, для которого существует биекция $\beta : U \to V_G$ такая, что для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ существует сеть $\Gamma \in [G]$, для которой выполнено свойство S, а также для любой сети $\Gamma \in [G]$, удовлетворяющей свойству S, существует конфигурация $C \in \mathcal{C}_L$ такая, что выполнено $\Gamma \circ \beta = C|_U$.

Чтобы не утяжелять описание в некоторых местах вместо “положения шарнира” будем просто говорить “шарнир” или “точка”. На рисунках шарниры будем изображать точками, а стержни — отрезками. Точки, соответствующие положениям шарниров, будем подписывать названиями самих шарниров, то есть, например, вместо $C(U)$ будем писать просто U.

Опишем операцию скрепления шарнирных механизмов. Пусть есть два механизма L_1 и L_2, и в их множествах шарниров выделены подмножества A_1 и A_2 соответственно. Эти подмножества могут содержать как закреплённые, так и не закреплённые шарниры. Пусть задана биекция $\nu\colon A_1 \to A_2$ такая, что существуют конфигурации $C_1 \in \mathcal{C}_{L_1}$ и $C_2 \in \mathcal{C}_{L_2}$, для которых $C_2 \circ \nu = C_1|_{A_1}$ (это нужно для того, чтобы конфигурационное пространство полученного механизма L было не пустым). Биекция ν позволяет отождествить множества A_1 и A_2 и обозначить полученное множество через A, а значит, можно считать, что вместо A_1 и A_2 множества вершин механизмов L_1 и L_2 содержат множество A. Множество закреплённых шарниров нового механизма обозначим W. Оно будет содержать все шарниры множеств $W_1 \setminus A_1$ и $W_2 \setminus A_2$, а также, если для некоторого i шарнир $a^i_j \in A_j \cap W_j$, то новый шарнир $a^i \in A$ тоже будет закреплённым в новом механизме, то есть принадлежать W, причём, если φ — это граничное отображение скрепления, то $\varphi(a^i) := \varphi_j(a^i_j)$. *Скреплением механизмов L_1 и L_2 по биекции ν* будем называть шарнирный механизм L, граф которого является объединением графов механизмов L_1 и L_2, длины рёбер нового механизма соответствуют длинам рёбер скрепляемых механизмов, а неподвижные шарниры остаются закреплёными в тех же точках. Далее для описания биекции ν будем просто говорить, какие вершины с какими будут соединены.

Аналогично можно описать операцию *закрепления шарнира C на стержне AB*. Для этого прикрепим к C два стержня CA' и CB', таких, что $|CA'| + |CB'| = |AB|$. А затем попарно скрепим A с A' и B с B'. Получим, что шарниры A, B, C попарно соединены стержнями так, что образуют вырожденный треугольник.

2.3. Предварительные результаты

Пользуясь теоремой о строгой минимальности [13], можно сформулировать критерий того, что сеть с вырожденными рёбрами является минимальной параметрической. Рассмотрим сеть Γ типа (G, φ). Каждой паре v, e, где e — ребро, смежное внутренней вершине v, поставим в соответствие вектор $\nu_{v,e}$, зависящий от Γ, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Выполнено неравенство $|\nu_{v,e}| \leqslant 1$.
2. Если $e = vv'$ и v' — внутренняя вершина, то выполняется равенство $\nu_{v,e} + \nu_{v',e} = 0$.
3. Если e — не вырожденное ребро сети гамма, то $\nu_{v,e}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{\Gamma(v')\Gamma(v)}$ и $|\nu_{v,e}| = 1$;
4. Для каждой внутренней вершины выполняется равенство $\sum\limits_{v' : vv' \in E} \nu_{v,vv'} = 0$.

Необходимое и достаточное условие того, что сеть Γ является минимальной — это существование такой расстановки векторов ν. Обозначим через $a_{vv'}$ единственную точку пространства $\mathbb{R}^n$ такую, что $\nu_{v,vv'} = \overrightarrow{\Gamma(v)a_{vv'}}$.

Построим механизм, реализующий минимальную параметрическую сеть, используя необходимое и достаточное условие, описанное выше.

2.4. Вспомогательные механизмы

Жёсткий прямоугольник. Рассмотрим механизм, состоящий из четырёх незакреплённых шарниров, попарно соединённых стержнями. На рис. 1 изображена конфигурация такого механизма на плоскости. Все шарниры лежат в вершинах четырёхугольника, а стержни образуют его стороны и диагонали. Представленный механизм является жёсткой конструкцией в том смысле, что если рассмотреть любую его реализацию в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, то шарниры тоже будут лежать в одной плоскости в вершинах прямоугольника с теми же длинами сторон. Будем называть описанный механизм *жёстким прямоугольником.*

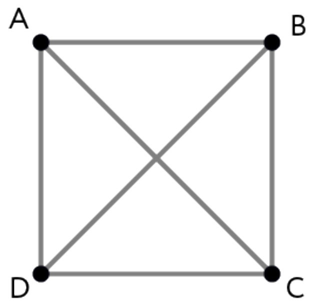

Рис. 1: Жёсткий прямоугольник (квадрат)

Шарнирная страница. Рассмотрим механизм, состоящий из двух одинаковых жёстких квадратов $ODCN$ и $DCBA$, имеющих общую сторону CD длины a (см. рис. 2). Назовём этот механизм *шарнирной страницей.*

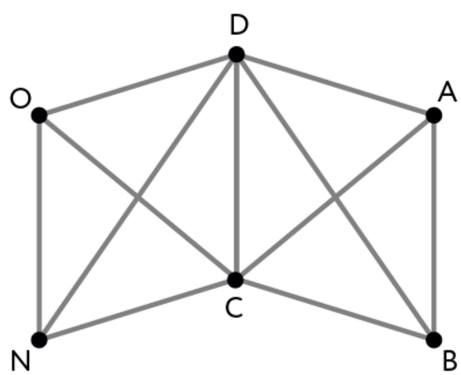

Рис. 2: Шарнирная страница

Для любой реализации этого механизма в $\mathbb{R}^d, d \geqslant 3$, справедливо, что точка A является образом при параллельном переносе точки O на вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}$, где $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{ON}$, значит, для любой реализации рассматриваемого механизма, если $A \neq O$, то $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{ON}$. Так как угол $\angle ODA$ может принимать любые значения, то расстояние OA может принимать любое значение между 0 и $2a$. Таким образом, верно, что в этом механизме шарнир A рисует шар с центром в O радиуса $2a$ размерности $d-1$, перпендикулярный ON. Если $d = 3$, то этот шар будет плоским диском перпендикулярным ON.

Шарнирная книга. Теперь соберём новый механизм, состоящий из n страниц L_i, с множествами шарниров $V_i = \{OD_iC_iND_iC_iB_iA_i\}$, причём все страницы L_i имеют общий стержень ON. Назовём такой механизм *книгой с n страницами и переплётом* ON. На рис. 3 пример реализации книги с 4 страницами в $\mathbb{R}^3$. Множество шарниров A_i обозначим через $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. В этом механизме шарниры множества A рисуют шар $S(L)$ с центром в O радиуса $2a$, перпендикулярный ON, и размерность которого равна $d-1$.

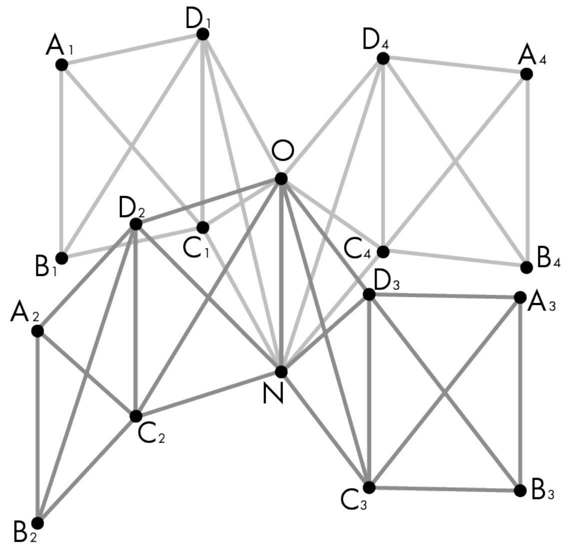

Рис. 3: Шарнирная книга

Скрепление двух книг. Описание следующего механизма начнем с примера. Рассмотрим две книги L^1 и L^2 с двумя страницами, одинаковыми длинами соответственных стержней, переплётами ON^1 и ON^2, и множествами шарниров V^1 и V^2, где $V^j = \{OD_i^jC_i^jN^jD_i^jC_i^jB_i^jA_i^j\}$, $1 \leqslant j \leqslant 2, 1 \leqslant i \leqslant 2$. Они имеют разные переплёты, но общую точку O. На рис. 4 изображены книги L_1 и L_2 по отдельности. Соединим шарниры N^1 и N^2 стержнем равным по длине ON^1, а также попарно скрепим шарниры A_i^1 с соответственными шарнирами A_i^2. В общем случае в книгах L^1 и L^2 может быть любое количество страниц. Если их больше двух, то будем попарно скреплять все шарниры множеств A_i^j с одинаковыми индексами i и разными j. Полученные в результате такого скрепления шарниры обозначим A_i, $A = \cup A_i$, а получившийся механизм обозначим L. На рис. 5 показано скрепление L механизмов L^1 и L^2. Посмотрим, каким будет конфигурационное пространство шарниров A_i.

После скрепления книг L^1 и L^2 шарниры множества A будут рисовать пересечение шаров $S(L^1)$ и $S(L^2)$, рисуемых шарнирами A_i^j до скрепления. Так как $S(L^1)$ и $S(L^2)$ имеют общий центр O и их нормали ON^1 и ON^2 не совпадают, то это пересечение будет шаром $S(L)$ с центром в O размерности $d-2$, перпендикулярным ON^1 и ON^2. Будем говорить, что приведённое построение описывает операцию *скрепления двух книг с одинаковым количеством страниц*.

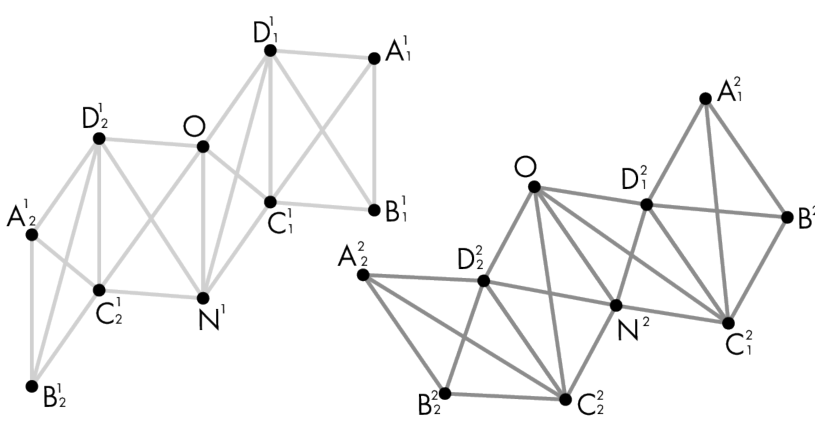

Рис. 4: Шарнирные книги L^1 и L^2 в пространстве $\mathbb{R}^3$

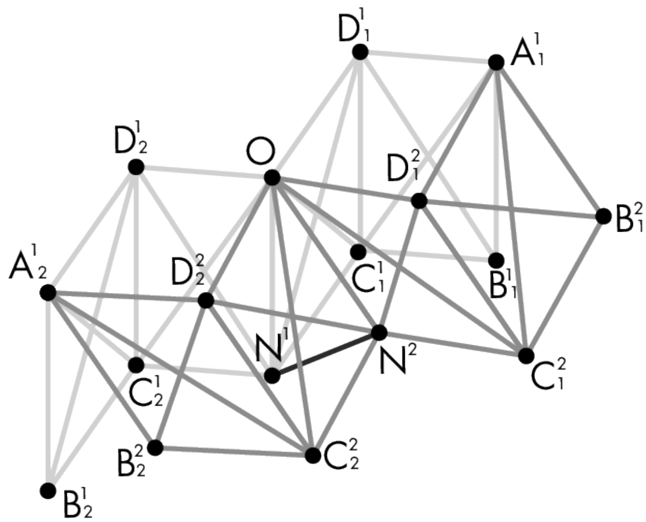

Рис. 5: Скрепили шарниры A_1^1 и A_1^2, A_2^1 и A_2^2, O и O, а также добавили стержень, соединяющий N^1 и N^2

Скрепление k книг. Аналогично опишем операцию скрепления k книг, $2 \leqslant k \leqslant d$, с одинаковым количеством страниц в пространстве $\mathbb{R}^d$. Такое скрепление позволит рисовать шар размерности на $d-k$. Рассмотрим набор k шарнирных книг L^j, $1 \leqslant j \leqslant k$, с n страницами, имеющих одинаковые длины соответственных стержней и общий шарнир O. Множества вершин каждой из книг $V^j = \{OD_i^j C_i^j N^j D_i^j C_i^j B_i^j A_i^j\}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Скрепим между собой шарниры A_i^j с одинаковыми индексами i и разными j. Новые шарниры обозначим A_i. Далее попарно соединим шарниры множества $N = \{N^1, \ldots, N^k\}$ с помощью стержней равных по длине ON^1, прикрепляя каждую пару шарниров к разным концами стержня. В получившемся механизме шарниры множества A будут рисовать пересечение шаров $S(L^j)$, размерность каждого из которых при реализации в $\mathbb{R}^d$ равна $d-1$, все они имеют общий центр O и никакие два шара не равны, так как их нормали ON^j не совпадают. Это пересечение будет шаром $S(L)$, размерность которого равна $d-k$, он перпендикулярен всем стержням ON^j, и его центр находится в точке O. Описанный механизм назовём *скреплением k книг с n страницами*.

Для некоторых шарнирных механизмов свойство, которое нам необходимо выполняется при условии того, что объемлющее пространство, в котором рассматривается механизм имеет определённую размерность, и если рассмотреть тот же механизм в пространстве большей размерности, то его работа уже не будет соответствовать желаемым условиям. Например, если рассмотреть классический инверсор Поселье в трёхмерном пространстве, то у шарниров появятся дополнительные степени свободы и уже нельзя будет говорить, что этот механизм осуществляет только инверсию.

Чтобы плоский механизм L оставался плоскими при рассмотрении его в пространстве $\mathbb{R}^d, d > 2$, поможет его укрепление с помощью описанных выше скреплений книг. Для этого ко всем шарнирам механизма L прикрепим вершины страниц скрепления $d-2$ книг. Так как все вершины страниц при любом положении механизма находятся в одной плоскости, то и весь механизм L будет оставаться плоским.

Все плоские механизмы описанные далее при использовании их в пространстве, размерность которого больше двух, по умолчанию будут укреплёнными скреплением шарнирных книг, количество которых на два меньше размерности пространства.

Движение точек по прямой с сохранением порядка. Построим механизм, который содержит шарниры x, y, z, в котором шарниры x и y могут свободно двигаться так, что расстояние между ними не превосходит l и для любого их положения шарнир z рисует отрезок $[x, y]$.

Рассмотрим механизм на рис. 6: $ouxvx'$ — инверсор Поселье с длинами стержней a и b; $\triangle ofz$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой $a+b$, шарнир m закреплён на стержне oz так, чтобы он совпадал с центром окружности, которая является образом прямой fz в результате отражения с помощью имеющегося инверсора; длина стержня mx' равна расстоянию om; величины pq, qx' равны $\frac{\sqrt{2}}{2}mx'$. Возьмём два экземпляра такого механизма и скрепим между собой одноимённые шарниры o и z, а к паре шарниров f прикрепим концы дополнительного стержня длины $2fz$. Один из шарниров x переобозначим как y и получим, что в таком механизме шарниры x и y смогут свободно двигаться по плоскости, находясь друг от друга на расстоянии не больше $2fz$, а z рисует отрезок $[x, y]$. Длины стержней механизма можно подобрать так, чтобы $2fz$ равнялось l.

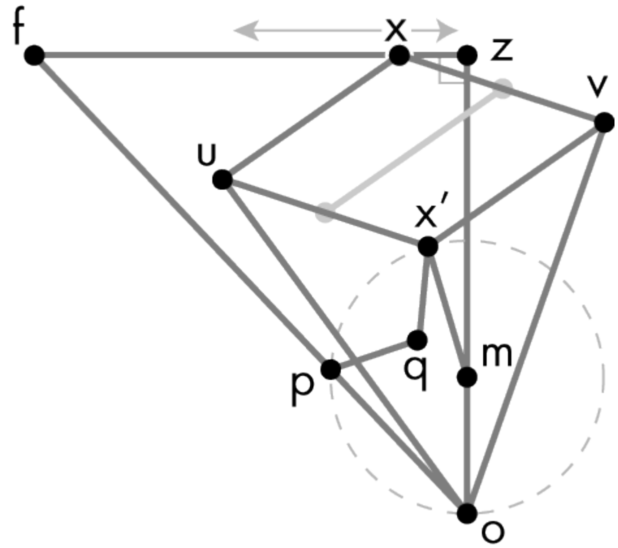

Рис. 6: Половина механизма, двигающего точки по прямой с сохранением порядка. Шарнир x рисует $[f, z]$.

Вспомогательный механизм 1.

Построим механизм, который содержит шарниры $a_{vv'}$, vv',$a_{v'v}$ (рис. 7), для которых верно следующее.

Пусть $v \neq v'$, тогда имеют место следующие свойства.

1. Выполнено равенство $\overrightarrow{va_{vv'}} = -\overrightarrow{v'a_{v'v}}$.

2. Вектор $\overrightarrow{v'a_{v'v}}$ сонаправлен $\overrightarrow{vv'}$.

3. Длины $|\overrightarrow{v'a_{v'v}}|$ и $|\overrightarrow{va_{vv'}}|$ равны 1.

Если $v = v'$, то выполняется следующее.

1. Верно равенство $\overrightarrow{va_{vv'}} = -\overrightarrow{v'a_{v'v}}$.

2. Длины векторов таковы, что $|\overrightarrow{v'a_{v'v}}| = |\overrightarrow{va_{vv'}}| \leqslant 1$.

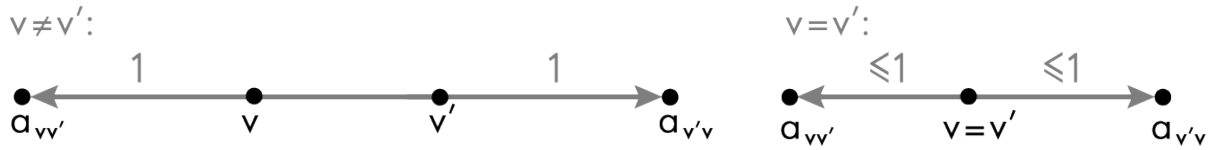

Рис. 7: Суть вспомогательного механизма 1

Шаг 1.

Для начала возьмём два шарнира v и v' и соединим их двузвенной ломаной с равными звеньями, а также прикрепим к v и v' укреплённые шарнирные ромбы $pvqa_{vv'}$ и $sv'ra_{v'v}$ с длиной стороны $\frac{1}{2}$ (укреплённые означает, что к серединам двух противоположных сторон шарнирно прикреплены концы ещё одного стержня, длина которого равна длине стороны ромба [6]) (рис. 8).

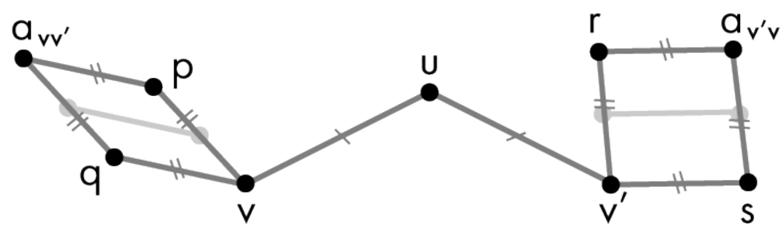

Рис. 8: Шаг 1.

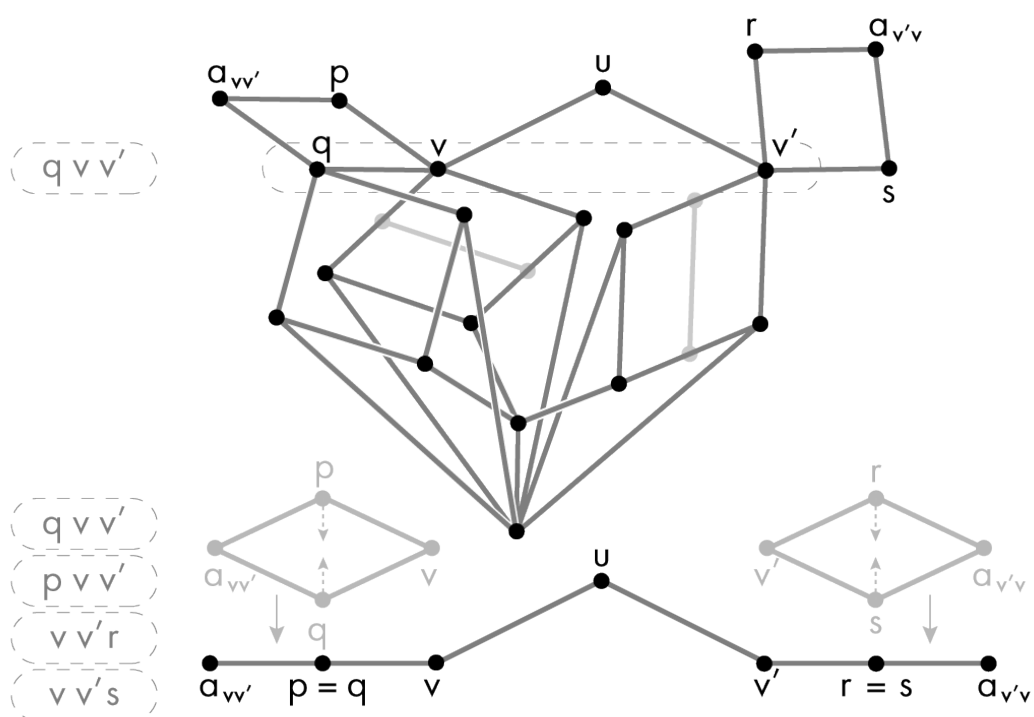

Рис. 9: Шаг 2.

Шаг 2.

Далее, с помощью механизма, описанного выше, который позволяет двигать точки по прямой с сохранением порядка, можно сделать так, чтобы вектор $\overrightarrow{v'a_{v'v}}$ был сонаправлен $\overrightarrow{vv'}$ (рис. 9 сверху), соединим шарниры q, v, v', чтобы они лежали на одной прямой . Аналогичным образом скрепим тройки точек $\{pvv'\}$, $\{vv'r\}$ и $\{vv's\}$ (рис. 9 снизу). При таком скреплении пока $v \neq v'$ ромбы $pvqa_{v,v'}$ и $sv'ra_{v,v'}$ будут вырожденными, лежащими на одной прямой, то есть будет выполнено условие, что $|\overrightarrow{v'a_{v'v}}| = |\overrightarrow{va_{v,v'}}| = 1$, пока $v \neq v'$.

Когда v совпадёт с v', ромбы смогут перестать быть вырожденными, а также смогут вращаться вокруг $v = v'$, но в конечном результате нужно, чтобы, ромбы вращались так, что $\overrightarrow{va_{vv'}} = -\overrightarrow{v'a_{v'v}}$.

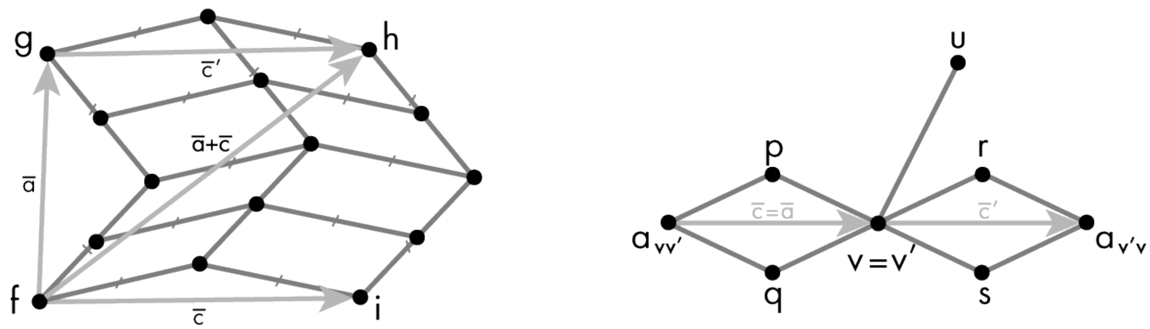

Рис. 10: Шаг 3

Шаг 3.

Рассмотрим механизм, изображённый слева на рис. 10. Он состоит из четырёх уреплённых ромбов, скреплённых между собой, как показано, и позволяет параллельно перенести переменный вектор $\bar{c}$ на переменный вектор $\bar{a}$. Полученный вектор обозначим $\bar{c}'$. Прикрепим этот механизм так, чтобы $\overrightarrow{v'a_{v'v}}$ был результатом параллельного переноса $\overrightarrow{a_{vv'}v}$ на $\overrightarrow{a_{vv'}v}$. На этом завершается построение вспомогательного механизма 1.

Этот механизм шарнирами v и v' будем прикреплять в концам рёбер, которые смежны только с внутренними вершинами.

Для рёбер смежных с внутренней и граничной вершиной соберём похожий механизм. Опишем его ниже.

Вспомогательный механизм 2.

Повторим построение шага 1 предыдущего механизма, но без ромба с вершиной v' (рис. 11).

Далее действуем, как на шаге 2, заставляя двигаться по одной прямой тройки $\{p, v, v'\}$ и $\{q, v, v'\}$.

На этом построение заканчивается. В полученном механизме будет верно, что точки $a_{vv'}, v, v'$ лежат на одной прямой и, если $v \neq v'$, то $|\overrightarrow{a_{vv'}v}| = 1$, иначе $|\overrightarrow{a_{vv'}v}| \leqslant 1$.

Сумматор векторов. Механизм на рис. 10 слева можно также рассматривать как сумматор двух произвольных векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$ с общим началом. Если нужно сложить больше двух векторов $a_1, \ldots, a_n$, то сначала прикрепим сумматор к любым двум векторам, затем к результату и ещё одному вектору снова прикрепим сумматор и так будем продолжать, пока не сложим все векторы. Обозначим через $\overrightarrow{su}$ вектор, который получается в результате суммирования. Если скрепить шарниры s и u, то получим что сумма векторов будет равна нулю, то есть складываемые векторы могут быть любыми с условием, что их сумма равна нулю.

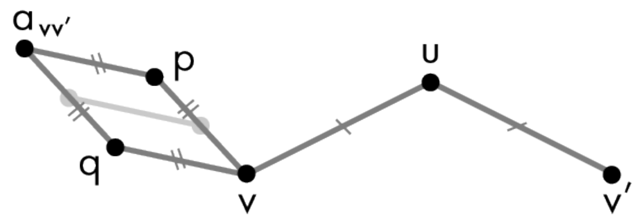

Рис. 11: Начало построения вспомогательного механизма 2

2.5. Основные результаты

Теорема 1. *Для любого бинарного дерева G с границей ∂G существует шарнирный механизм, который для любого граничного отображения φ, для которого образ граничных вершин содержится в некотором шаре заданного диаметра, рисует минимальную параметрическую сеть типа (G, φ).*

Доказательство. Рассмотрим набор шарниров, количество которых равно количеству вершин сети. Такой механизм рисует все сети типа G. Ко всем парам (v, vv'), $v \notin \partial G, vv' \in E$, прикрепим вспомогательный механизм 1, ко всем парам (v, vv'), $v \in \partial G, vv' \in E$ прикрепим вспомогательный механизм 2. Затем прикрепим сумматоры так, чтобы для каждой внутренней вершины v равнялись нулю суммы $\sum\limits_{v':vv' \in E} \overrightarrow{va_{vv'}}$. Получим, что, каким бы ни было граничное отображение φ, в построенном механизме будет выполняться необходимое и достаточное условие для того, чтобы рисуемая им сеть была минимальной параметрической. □

3. Заключение

Текущая работа стала продолжением исследований в области поиска оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов. Основной результат данной статьи показывает существование и предлагает способ сборки механизма, который для заданного бинарного дерева G с границей строит минимальную параметрическую сеть для любого граничного отображения, при котором диаметр образа ограничен некоторым числом.

Использование результатов, полученных в данной статье, может существенно упростить механизм, который строит кратчайшее дерево Штейнера, описанный в предыдущей работе автора [16], можно уйти от использования шарнирной реализации алгоритма Мелзака, а также не рассматривать топологии, которые эквивалентны с точностью до вырождения рёбер. Это существенно уменьшить общее количество стержней в механизме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сосинский А.Б. Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая [Электронный ресурс] / Сосинский А.Б. – Дубна: Летняя школа «Современная математика», 2007. – Режим доступа: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130

2. Сосинский А.Б. Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая [Электронный ресурс] / Сосинский А.Б. – Дубна: Летняя школа «Современная математика», 2007. – Режим доступа: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus

3. Механизмы П.Л. Чебышева [Электронный ресурс] / Российский институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук 2009-2021. – Режим доступа: URL: https://tcheb.ru/

4. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики / Ковалёв М.Д. — Москва: URSS Ленанд, 2019

5. Ковалёв М.Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? / Ковалёв М. Д. // Итоги науки и техники, серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры — 2020. — том 179. — с. 16-28.

6. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии. — Москва: УРСС, 2014. — 360 с.

7. Житная М.Ю. Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов / Житная М.Ю. // Фундамент. и прикл. матем., 2019, том 22, выпуск 6, с. 95-122.

8. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Многозначные отображения, минимальные поверхности и мыльные пленки / Тужилин А.А., Фоменко А.Т. // Вестн. Моск. ун-та. — 1986, номер 3, с. 3-12

9. Hwang F.K. Linear time algorithm for full steiner trees / Hwang F.K. // Operations Research Letters. — 1986. — Volume 4, Issue 5. — P. 235-237.

10. Melzak Z.A. On the problem of Steiner / Melzak Z.A. // Canadian Mathematical Bulletin. — 1961. — 4(2). — P. 143-148.

11. Kempe A.B. How to draw a straight line: a lecture on linkages. / Kempe A.B. — Macmillan & Co. — 1871. — 51 P.

12. Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages. / Kapovich M., Millson J.J. // Topology. — 2002, v. 41(2002), №6, P. 1051-1107.

13. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. / Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. — USA: CRC Press, 1994, — 432 P.

14. Gilbert E.N., Pollak H.O. / Steiner Minimal Trees. // Gilbert E.N., Pollak H.O. // SIAM J. Appl. Math. — 1968, v.16, №1, P. 1-29.

15. Abbott T.G. Generalizations of Kempe's Universality Theorem / Abbott T.G. — Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2008, 86 P.

16. King H. Semiconfiguration spaces of planar linkages / King H. // URL:https://arxiv.org/abs/math/9810130

17. H. King. Configuration spaces of linkages in $\mathbb{R}^n$ / H. King // arXiv.org:math/9811138.

REFERENCES

1. Sosinsky A.B., 2007, "Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture one", *Summer school "Modern mathematics"*, Dubna, Russia, Available at: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130.

2. Sosinsky A.B., 2007, "Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture two", *Summer school "Modern mathematics"*, Dubna, Russia, Available at: URL:http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus.

3. *Chebishev linkages*, 2009-2021, Available at: URL: https://tcheb.ru/.

4. Kovalev M.D., 2019, *Geometricheskie voprosi kinematiki i statiki* [*Geometrical issues of kinematics and statics*], URSS Leland, Russia.

5. Kovalev M.D., 2020, *Chto takoe sharnirniy mehanizm? I chto zhe dokazal Kempe?* [*What is a hinge mechanism? And what did Kempe prove?*], URSS Leland, Russia.

6. Oshemkov A.A., Popelenskiy F.Y., Tuzhilin A.A., Fomenko A.T., Shafarevich A.I. 2014 *Kurs naglyadnoy geometrii i tipologii* [*The course of visual geometry and topology*], URSS, Russia.

7. Zhitnaya M.Y. 2019, "Modeling of optimal networks by means of linkages" Fundam. Prikl. Mat., Vol. 22, Issue 6, 95–122.

8. Tuzhilin A.A., Fomenko A.T. 1986, *Mnogoznachnie otobrazheniya, minimal'nie poverhnosti i milnie plenki* [*Multivalued mappings, minimal surfaces, and soap films*], Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., №3, 3–12.

9. Hwang F.K. 1986, "Linear time algorithm for full steiner trees", Operations Research Letters, Vol. 4, Issue 5, 235-237.

10. Melzak Z.A., 1961, "On the problem of Steiner", Canadian Mathematical Bulletin, Vol 4(2), 143-148.

11. Kempe A.B., 1871, *How to draw a straight line: a lecture on linkages*, Macmillan & Co.

12. Kapovich M., Millson J.J. "Universality theorems for configurations of planar linkages", Topology, Vol. 41(2002), №6, 1051-1107.

13. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., 1994, *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations*, USA: CRC Press.

14. Gilbert E.N., Pollak H.O., 1968, "Steiner Minimal Trees", SIAM J. Appl. Math., Vol.16, №1, 1-29.

15. Abbott T.G., 2008, *Generalizations of Kempe's Universality Theorem*, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.

16. King H. *Semiconfiguration spaces of planar linkages*, Available at: URL: https://arxiv.org/abs/math/9810130.

17. H. King., *Configuration spaces of linkages in* $\mathbb{R}^n$, Available at: URL: arXiv.org:math/9811138.

Получено 14.11.21
Принято в печать 22.06.2022