

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.3+511.43

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-56-73

Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова¹

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе рассматриваются четыре новых понятия: модифицированная основная мера качества набора коэффициентов, абсолютно оптимальные коэффициенты индекса s , математическое ожидание локального отклонения параллелепипедальной сетки и дисперсия локального отклонения параллелепипедальной сетки.

Показано, что не менее чем $\frac{(p-1)^s}{2}$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ целых чисел, взаимно простых с модулем p , будут абсолютно оптимальными наборами индекса s с константой $B = 2s$.

Установлено, что любой абсолютно оптимальный набор оптимальных коэффициентов индекса s является оптимальным набором оптимальных коэффициентов индекса s , при этом любой его поднабор из s_1 коэффициентов является оптимальным набором оптимальных коэффициентов индекса s_1 .

Для конечного отклонения, введенного Н. М. Коробовым в 1967 году, для параллелепипедальных сеток получены новые формулы и оценки.

В работе впервые рассмотрено понятие математического ожидания локального отклонения и найдена удобная формула для его вычисления.

Также впервые рассмотрено понятие дисперсии локального отклонения.

В работе намечены направления дальнейших исследований по данной тематике.

Ключевые слова: конечное отклонение, основная мера качества, сетки Коробова, конечные ряды Фурье.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 511.3+511.43

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-56-73

The final deviation and the main quality measure for Korobov grids²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper considers four new concepts: a modified basic measure of the quality of a set of coefficients, absolutely optimal coefficients of the index s , the mathematical expectation of the local deviation of the parallelepipedal grid and the variance of the local deviation of the parallelepipedal grid.

It is shown that at least $\frac{(p-1)^s}{2}$ of different sets $(a_1, \dots, a_s)$ integers mutually prime with the module p will be absolutely optimal sets of the index s with the constant $B = 2s$.

It is established that any absolutely optimal set of optimal coefficients of the s index is an optimal set of optimal coefficients of the s index, while any subset of its s_1 coefficients is an optimal set of optimal coefficients of the s_1 index.

For the finite deviation introduced by N. M. Korobov in 1967, new formulas and estimates are obtained for parallelepipedal grids.

In this paper, for the first time, the concept of the mathematical expectation of a local deviation is considered and a convenient formula for its calculation is found.

The concept of local deviation variance is also considered for the first time.

The paper outlines the directions of further research on this topic.

Keywords: finite deviation, the main measure of quality, Korobov grids, finite Fourier series.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The final deviation and the main quality measure for Korobov grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 56–73.

²This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 _r_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

1. Введение

Как указывалось в работе [7]: "Метод оптимальных коэффициентов построения для многомерного куба многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками фактически основан на самых простых фактах теории сравнений. Этот метод был заложен Н. М. Коробовым в работах [10], [11], [12], и его развитие продолжается и по настоящее время.

Важной особенностью метода оптимальных коэффициентов является тот факт, что алгоритм численного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками является ненасыщаемым. Свойство алгоритма быть ненасыщаемым относится к числу его важных качеств (более подробно см. [2] и [16]) и заключается в том, что точность алгоритма связана с гладкостью функции и не имеет ограничений на параметр гладкости.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки, но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1 \ (j = 1, 2, \dots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \dots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$. $S_p(z_1, \dots, z_s)$ выражается через сумму³

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \dots + z_s m_s)}{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s}, \quad (2)$$

где $z_1, \dots, z_s$ – произвольные целые, $\bar{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m , $p_1 = \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если } b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно определению, *если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполняется неравенство*

$$S_p(a_1, \dots, a_s) \leq B \frac{\ln^\beta p}{p}, \quad (4)$$

то целые $a_1, \dots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю p .

Известно (см. [15] стр. 81), что для любых целых $a_1, \dots, a_s$ выполняется оценка

$$S_p(a_1, \dots, a_s) \geq B_0 \frac{\ln^s p}{p}, \quad (5)$$

с некоторой константой B_0 .

Важную роль в современной теории метода оптимальных коэффициентов играют работы [3]–[6], [9].

Цель данной работы — рассмотреть четыре новых понятия: модифицированная основная мера качества набора коэффициентов, абсолютно оптимальные коэффициенты индекса s , математическое ожидание локального отклонения параллелепипедальной сетки и дисперсия локального отклонения параллелепипедальной сетки. Изучить их свойства и взаимосвязь.

³Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

2. Абсолютно оптимальные коэффициенты

Мы дадим определение нового понятия — *абсолютно оптимальные коэффициенты индекса s* следующим образом. Через $S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s)$ обозначим ν -ую компоненту основной меры качества

$$S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum_{m_{j_1} = -p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{j_\nu} = -p_1}^{p_2'} \frac{\delta_p(z_{j_1} m_{j_1} + \dots + z_{j_\nu} m_{j_\nu})}{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s} \quad (2 \leq \nu \leq s).$$

Ясно, что

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Модифицированной основной мерой качества назовём величину $S_p^*(z_1, \dots, z_s)$, заданную равенством

$$S_p^*(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s \frac{S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s)}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu},$$

где γ — константа Эйлера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$ будем называть абсолютно оптимальным индекса s с константой B по модулю p , если выполняется оценка для модифицированной меры качества вида

$$S_p^*(a_1, \dots, a_s) \leq \frac{B}{p}.$$

Нетрудно видеть, что каждый абсолютно оптимальным набор коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$ индекса s с константой B по модулю p будет оптимальным набором коэффициентов индекса s с константой $2^s B$.

Действительно, если $(a_1, \dots, a_s)$ — абсолютно оптимальный набор коэффициентов индекса s с константой B по модулю p , то из определения следует, что

$$S_p^{(\nu)}(a_1, \dots, a_s) \leq C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} \quad (2 \leq \nu \leq s).$$

Отсюда вытекает, что

$$S_p(a_1, \dots, a_s) = \sum_{\nu=2}^s S_p^{(\nu)}(a_1, \dots, a_s) \leq \sum_{\nu=2}^s C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} < \frac{B(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^s}{p},$$

и утверждение доказано.

Более того, легко показать, что каждый поднабор $(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu})$ с $1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s$ также будет оптимальным набором коэффициентов индекса ν с константой $C_s^\nu 2^\nu B$.

Действительно,

$$\begin{aligned} S_p(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu}) &\leq \sum_{\mu=2}^{\nu} S_p^{(\mu)}(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu}) \leq \sum_{\mu=2}^{\nu} S_p^{(\mu)}(a_1, \dots, a_s) \leq \\ &\leq \sum_{\mu=2}^{\nu} C_s^\mu C_\nu^\mu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\mu \cdot \frac{B}{p} < C_s^\nu \frac{B(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^\nu}{p}. \end{aligned}$$

Следующая лемма, доказательство которой фактически повторяет доказательство известной леммы Коровова (см. [13], лемма 20), доказывает существование абсолютно оптимального набора коэффициентов индекса s с константой $B = s$ по простому модулю p .

ЛЕММА 1. Пусть p — произвольное нечетное простое число, $p \geq s$, тогда существуют взаимно простые с p целые числа $a_\nu = a_\nu(p)$ ($\nu = 1, \dots, s$) такие, что

$$S_p^*(a_1, \dots, a_s) \leq \frac{s}{p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть при $z_1 = a_1, \dots, z_s = a_s$ достигается минимум модифицированной меры качества $S_p^*(z_1, \dots, z_s)$ по всем наборам $z_1, \dots, z_s$ взаимно простых с p , тогда

$$\begin{aligned} S_p^*(a_1, \dots, a_s) &\leq \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{z_1, \dots, z_s=1}^{p-1} S_p^*(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \times \\ &\times \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{z_1, \dots, z_s=1}^{p-1} S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s) = \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \times \\ &\times \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum_{m_{j_1}=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{j_\nu}=-p_1}^{p_2'} \frac{1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} \frac{1}{(p-1)^s} \sum_{z_1, \dots, z_s=1}^{p-1} \delta_p(z_{j_1} m_{j_1} + \dots + z_{j_\nu} m_{j_\nu}) \leq \\ &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum_{m_{j_1}=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{j_\nu}=-p_1}^{p_2'} \frac{1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} \leq \\ &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{\nu=2}^s \frac{1}{C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu = \frac{s-1}{p-1} \leq \frac{s}{p}. \end{aligned}$$

□

Из доказательства видно, что не менее чем $\frac{(p-1)^s}{2}$ различных наборов $(a_1, \dots, a_s)$ целых чисел, взаимно простых с модулем p , будут абсолютно оптимальными наборами индекса s с константой $B = 2s$.

Отметим, что доказательство аналогичного утверждения для произвольного составного модуля требует преодоления значительных технических трудностей, как и в случае леммы Коробова.

3. Конечное отклонение

В работе [14] Н. М. Коробов следующим образом определил конечное отклонение или меру равномерности распределения сетки. Мы приведём это определение для параллелепипедальной сетки

$$M_k = \left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{p} \right\} \right) \quad (k = 0, \dots, p-1),$$

где $(a_\nu, p) = 1$ ($1 \leq \nu \leq s-1$). Для удобства далее везде полагаем $a_0 = 1$.

Пусть $N_p \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right)$ — число точек сетки, лежащих в области

$$\Omega_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) = \left\{ (x_1, \dots, x_s) \mid 0 \leq x_\nu < \frac{n_\nu}{p} \ (0 \leq \nu \leq s) \right\}.$$

Локальное отклонение задается равенством

$$D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) = \frac{N_p \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right)}{p} - \frac{n_1}{p} \cdot \dots \cdot \frac{n_s}{p}.$$

Очевидно, что при $s = 1$ локальное отклонение тождественно равно 0.

По определению конечное отклонение определяется равенством

$$D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right|.$$

Для локального отклонения в [14] доказано, что⁴

$$\begin{aligned} D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{p} \sum_{k_\nu=0}^{n_\nu-1} e^{-2\pi i \frac{k_\nu m_\nu}{p}} \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) = \\ &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \left(\prod_{\nu=1}^s c_{n_\nu}(m_\nu) \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}), \end{aligned}$$

где $p_1 = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$,

$$c_n(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i \frac{km}{p}} = \begin{cases} \frac{n}{p} & \text{при } m = 0, \\ \frac{e^{-\pi i \frac{(n-1)m}{p}} \sin\left(\pi \frac{nm}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right)} & \text{при } 1 \leq |m| \leq p_2. \end{cases}$$

Так как для коэффициентов $c_n(m)$ справедлива оценка $|c_n(m)| \leq \frac{1}{m}$, то справедлива оценка

$$\left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| \leq S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}).$$

Отсюда следует, что для любого абсолютно оптимального набора $(1, a_1, \dots, a_{s-1})$ индекса s с константой B справедлива оценка для конечного отклонения

$$D_p \leq \frac{B(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^s}{p}.$$

Выражение для локального отклонения представим в виде двух сумм

$$\begin{aligned} D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) + D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), \\ D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1 = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_s = -p_1}^{p_2} e^{-\pi i \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p}} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin\left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \times \\ &\quad \times \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}), \\ D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1, m_1 \dots m_s = 0}^{p_2} \left(\prod_{\nu=1}^s c_{n_\nu}(m_\nu) \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём k -ой компонентой локального отклонения величину

$$\begin{aligned} D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s} \sum'_{m_{\nu_1} = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_{\nu_k} = -p_1}^{p_2} e^{-\pi i \frac{(n_{\nu_1}-1)m_{\nu_1} + \dots + (n_{\nu_k}-1)m_{\nu_k}}{p}} \times \\ &\quad \times \left(\prod_{\nu \neq \nu_1, \dots, \nu_k} \frac{n_\nu}{p} \right) \left(\prod_{j=1}^k \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_j} m_{\nu_j}}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_j}}{p}\right)} \right) \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}). \end{aligned}$$

⁴ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключён набор $(m_1, \dots, m_s) = (0, \dots, 0)$.

Нетрудно видеть, что модуль k -ой компоненты локального отклонения оценивается через k -ую компоненту основной меры качества

$$\left| D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| \leq S_p^{(\nu)}(1, a_2, \dots, a_{s-1}).$$

Кроме этого, справедливы следующие два очевидных равенства

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= D_s^{(s)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), \\ D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum_{k=2}^{s-1} D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Для любого абсолютно оптимального набора $(1, a_1, \dots, a_{s-1})$ индекса s с константой B справедлива оценка

$$\begin{aligned} D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| &< \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| + \\ &+ \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из оценки для коэффициентов $c_n(m)$ следует, что

$$\begin{aligned} \left| D_s^{(0)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| &\leq \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1, m_1 \dots m_s = 0}^{p_2} \frac{\delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} = \\ &= \sum_{\nu=2}^{s-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq s} \sum'_{m_{j_1} = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_{j_\nu} = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_{j_1} m_{j_1} + \dots + z_{j_\nu} m_{j_\nu})}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} = \\ &= \sum_{\nu=2}^{s-1} S_p^{(\nu)}(z_1, \dots, z_s) \leq \sum_{\nu=2}^{s-1} C_s^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} < \\ &< \sum_{\nu=2}^{s-1} s C_{s-1}^\nu (2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2)^\nu \cdot \frac{B}{p} < \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p}. \end{aligned}$$

□

Для простоты изложения далее будем считать, что p — простое, нечетное число. Следовательно, $p_1 = p_2 = \frac{p-1}{2}$. Заметим, что если $\delta_p(m+a) = 1$ и $|m| \leq \frac{p-1}{2}$, то

$$m = \begin{cases} p \left\{ -\frac{a}{p} \right\} & \text{при } \left\{ -\frac{a}{p} \right\} < \frac{1}{2}, \\ p \left\{ -\frac{a}{p} \right\} - p & \text{при } \left\{ -\frac{a}{p} \right\} > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} p - p \left\{ \frac{a}{p} \right\} & \text{при } \frac{1}{2} < \left\{ \frac{a}{p} \right\}, \\ -p \left\{ \frac{a}{p} \right\} & \text{при } \left\{ \frac{a}{p} \right\} < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Это можно записать одной формулой

$$m = p \left[\frac{1}{2} + \left\{ \frac{a}{p} \right\} \right] - p \left\{ \frac{a}{p} \right\} = \frac{p}{2} - p \left\{ \frac{1}{2} + \left\{ \frac{a}{p} \right\} \right\} = \frac{p}{2} - p \left\{ \frac{1}{2} + \frac{a}{p} \right\}.$$

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum'_{m_1 = -p_1}^{p_2} \dots \sum'_{m_s = -p_1}^{p_2} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \cdot \\ &\cdot \cos \pi \frac{(n_1 - 1)m_1 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p} \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при отображении

$$(m_1, \dots, m_s) \rightarrow (-m_1, \dots, -m_s)$$

область суммирования переходит в себя, то

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_s=-p_1}^{p_2'} e^{-\pi i \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p}} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \right. \\ &\quad \times \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + \sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_s=-p_1}^{p_2'} e^{\pi i \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p}} \times \\ &\quad \times \left. \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) \right) = \\ &= \sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_s=-p_1}^{p_2'} \left(\prod_{\nu=1}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \\ &\quad \times \cos \pi \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p} \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} D_s^* \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) &= \sum_{\substack{m_2, \dots, m_s = -p_1, \\ m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{p_2' \dots'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right)} \times \\ &\quad \times \cos \left(\pi \frac{-(n_1-1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2-1)m_2 + \dots + (n_s-1)m_s}{p} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{m_1=-p_1}^{p_2'} \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 m_1}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_1}{p} \right)} \cos \pi \frac{(n_1-1)m_1 + \dots + (n_s-1)m_s}{p} \delta_p(m_1 + m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}).$$

Ясно, что она равна 0 при $\delta_p(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) = 1$.

Если $m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$, то в этой сумме только одно слагаемое отлично от нуля. А именно, при $m_1 = \frac{p}{2} - p \left\{ \frac{1}{2} + \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right\}$. Если положить $k = \left[\frac{1}{2} + \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right]$, то $m_1 = -(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk$. Таким образом, для S справедливо равенство

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(-(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk)}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{-(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk}{p}\right)} \times \\
&\times \cos\left(\pi \frac{(n_1 - 1)(-(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + pk) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right) = \\
&= (-1)^{(n_1 - 1)k} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\
&\times (-1)^{(n_1 - 1)k} \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\
&\times \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
D_s^*\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) &= \sum_{m_2, \dots, m_s = -p_1, m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}^{p_2' \dots'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin\left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_\nu}{p}\right)} \right) \times \\
&\times \frac{\sin\left(\pi \frac{n_1(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p}\right)} \times \\
&\times \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p}\right).
\end{aligned}$$

□

Доказанные леммы нетрудно перенести на случай k -ой компоненты локального отклонения.

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
D_s^{(k)}\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) &= \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s} \sum_{m_{\nu_1} = -p_1}^{p_2'} \dots \sum_{m_{\nu_k} = -p_1}^{p_2'} \left(\prod_{\nu \neq \nu_1, \dots, \nu_k} \frac{n_\nu}{p} \right) \left(\prod_{j=1}^k \frac{\sin\left(\pi \frac{n_{\nu_j} m_{\nu_j}}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m_{\nu_j}}{p}\right)} \right) \times \\
&\times \cos \pi \frac{(n_{\nu_1} - 1)m_{\nu_1} + \dots + (n_{\nu_k} - 1)m_{\nu_k}}{p} \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1 - 1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k - 1}).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя дословно доказательство леммы 3, получим доказываемое утверждение. □

Прежде чем формулировать аналог леммы 4, введём новые обозначения. Пусть $a_{\nu, j} = a_\nu \cdot a_j^{-1}$ ($\nu, j = 0, \dots, s - 1$). Ясно, что $a_{\nu, \nu} = 1$ ($\nu = 0, \dots, s - 1$).

ЛЕММА 6. *Справедливо равенство*

$$D_s^{(k)} \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) = \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s} \sum_{\substack{m_{\nu_2}, \dots, m_{\nu_k} = -p_1, \\ m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{p_2'} \left(\prod_{j=2}^k \frac{\sin \left(\pi \frac{n_{\nu_j} m_{\nu_j}}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_{\nu_j}}{p} \right)} \right) \times \\ \times \frac{\sin \left(\pi \frac{n_{\nu_1} (m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1})}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}}{p} \right)} \times \\ \times \cos \left(\pi \frac{-(n_{\nu_1} - 1)(m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}) + (n_{\nu_2} - 1)m_{\nu_2} + \dots + (n_{\nu_k} - 1)m_{\nu_k}}{p} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{m_{\nu_1} = -p_1}^{p_2'} \frac{\sin \left(\pi \frac{n_{\nu_1} m_{\nu_1}}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_{\nu_1}}{p} \right)} \cos \pi \frac{(n_{\nu_1} - 1)m_{\nu_1} + \dots + (n_{\nu_k} - 1)m_{\nu_k}}{p} \times \\ \times \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1-1} + m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}).$$

Ясно, что она равна 0 при $\delta_p(m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}) = 1$.

В новых обозначениях имеем:

$$\delta_p(m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}) = \delta_p(m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}), \\ \delta_p(m_{\nu_1} a_{\nu_1-1} + m_{\nu_2} a_{\nu_k-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1}) = \delta_p(m_{\nu_1} + m_{\nu_2} a_{\nu_2-1, \nu_1-1} + \dots + m_{\nu_k} a_{\nu_k-1, \nu_1-1}).$$

Далее, продолжая дословно доказательство леммы 4 с очевидными изменениями, получим требуемое утверждение. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Для любого абсолютно оптимального набора $(1, a_1, \dots, a_{s-1})$ индекса s с константой B справедлива оценка*

$$D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} \left| \sum_{m_2, \dots, m_s = -p_1, m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}^{p_2'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \right. \\ \times \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 (m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right)} \times \\ \left. \times \cos \left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p} \right) \right| + \\ + \theta \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p},$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2 и 4 следует утверждение теоремы. $\square$

4. Математическое ожидание локального отклонения

Естественно рассмотреть математическое ожидание локального отклонения, заданное равенством

$$MD_s = \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right).$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$MD_s = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) - \left(\frac{p-1}{2p}\right)^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как показано в работе [14], для локального отклонения имеем равенство

$$D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} MD_s &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1, \dots, k_s=0}^{p-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) \sum_{n_1=k_1+1}^p \dots \sum_{n_s=k_s+1}^p \frac{1}{p^s} - \frac{(p-k_1) \dots (p-k_s)}{p^{2s}} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) - \left(\frac{p+1}{2p}\right)^s. \end{aligned}$$

□

Для оценки математического ожидания локального отклонения параллелепипедальной сетки применим конечные ряды Фурье.

ЛЕММА 7. *Для функции $f\left(\frac{k}{p}\right) = 1 - \frac{k}{p}$ справедливо разложение в конечный ряд Фурье*

$$f\left(\frac{k}{p}\right) = \sum_{m=-p_1}^{p_2} c(m) e^{2\pi i \frac{km}{p}}, \quad c(m) = \begin{cases} \frac{p+1}{2p} & \text{при } m = 0, \\ \frac{1}{p(1-e^{-2\pi i \frac{m}{p}})} & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (k = 0, \dots, p-1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$c(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{p}} = \begin{cases} \frac{p+1}{2p} & \text{при } m = 0, \\ \frac{1}{p(1-e^{-2\pi i \frac{m}{p}})} & \text{при } m \neq 0, \end{cases}$$

так как при $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{p}} &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^k e^{-2\pi i \frac{nm}{p}} = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{(k+1)m}{p}}}{1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}}} = \\ &= \frac{1 - \delta_p(m)}{p(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})} = \frac{1}{p(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})}. \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 8. *Для математического ожидания локального отклонения параллелепипедальной сетки справедливы равенство и оценка:*

$$\begin{aligned} MD_s &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s c(m_\nu) \delta_p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s), \\ |MD_s| &< S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя конечный ряд Фурье для функции $f\left(\frac{k}{p}\right) = 1 - \frac{k}{p}$ получим:

$$\begin{aligned} MD_s &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s c(m_\nu) e^{2\pi i \frac{km_1 + ka_1 m_2 + \dots + ka_{s-1} m_s}{p}} - \left(\frac{p+1}{2p}\right)^s = \\ &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s c(m_\nu) \delta_p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s). \end{aligned}$$

Для коэффициента Фурье $c(m)$ имеем оценки:

при $m = 0$ $c(0) = \frac{p+1}{2p} < 1 = \frac{1}{m}$;

при $1 \leq |m| \leq \frac{p-1}{2}$

$$|c(m)| = \frac{1}{\left| p \left(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}} \right) \right|} = \frac{2}{\left| p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right) \right|} \leq \frac{1}{p \left\| \frac{m}{p} \right\|} = \frac{1}{m},$$

поэтому

$$|MD_s| \leq \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \prod_{\nu=1}^s \frac{1}{m_\nu} \delta_p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s) = S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}).$$

□

5. Дисперсия локального отклонения

Дисперсия локального отклонения задаётся формулой

$$\begin{aligned} DD_s &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) - MD_s \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 - (MD_s)^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Для математического ожидания квадрата локального отклонения справедливо равенство

$$\begin{aligned} &M \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) - \\ &- \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k)(p+1+k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right)}{2} + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} M \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 &= \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 = \frac{1}{p^s} \sum_{n_1, \dots, n_s=1}^p 1 \times \\ &\times \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \left(\delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) - \frac{1}{p^s} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=1}^p \sum_{k_1, k'_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s, k'_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(k' - k'_1) \prod_{\nu=2}^s \delta_p(a_{\nu-1} k - k_\nu) \delta_p(a_{\nu-1} k' - k'_\nu) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) \prod_{\nu=1}^s \frac{n_\nu}{p} + \prod_{\nu=1}^s \frac{n_\nu^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Суммируя по $n_1, \dots, n_s$, получим:

$$\begin{aligned} M \left(D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right)^2 &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \sum_{k_1, k'_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s, k'_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(k' - k'_1) \times \\ & \times \prod_{\nu=2}^s \delta_p(a_{\nu-1} k - k_\nu) \delta_p(a_{\nu-1} k' - k'_\nu) \prod_{\nu=1}^s \left(1 - \max \left(\frac{k_\nu}{p}, \frac{k'_\nu}{p} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} \delta_p(k - k_1) \delta_p(a_1 k - k_2) \dots \delta_p(a_{s-1} k - k_s) \prod_{\nu=1}^s \frac{(p - k_\nu)(p + 1 + k_\nu)}{2p^2} + \\ & + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s = \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p - k)(p + 1 + k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right)}{2} + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s. \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 3. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} DD_s &= \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(\left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) - \right. \\ & - \left. \left(1 - \frac{k}{p} \right) \left(1 - \frac{k'}{p} \right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{ \frac{a_j k}{p} \right\} \right) \left(1 - \left\{ \frac{a_j k'}{p} \right\} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(p - k)(p + 1 + k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{ \frac{ka_\nu}{p} \right\} \right)}{2} - \right. \\ & - \left. \left(1 - \frac{k}{p} \right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{ \frac{a_j k}{p} \right\} \right) \left(\frac{p-1}{2p} \right)^s \right) + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2} \right)^s - \left(\frac{p-1}{2p} \right)^{2s}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$DD_s = \frac{1}{p^2} \sum_{k, k'=0}^{p-1} \left(1 - \max \left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p} \right) \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max \left(\left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_\nu k'}{p} \right\} \right) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k)(p+1+k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right)}{2} + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2}\right)^s - \\
& - \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) - \left(\frac{p-1}{2p}\right)^s\right)^2 = \\
& = \frac{1}{p^2} \sum_{k,k'=0}^{p-1} \left(\left(1 - \max\left(\frac{k}{p}, \frac{k'}{p}\right)\right) \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(1 - \max\left(\left\{\frac{a_\nu k}{p}\right\}, \left\{\frac{a_\nu k'}{p}\right\}\right)\right) - \right. \\
& - \left. \left(1 - \frac{k}{p}\right) \left(1 - \frac{k'}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) \left(1 - \left\{\frac{a_j k'}{p}\right\}\right) \right) - \\
& - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(p-k)(p+1+k)}{2p^2} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{\left(1 - \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right) \left(1 + \frac{1}{p} + \left\{\frac{ka_\nu}{p}\right\}\right)}{2} - \right. \\
& - \left. \left(1 - \frac{k}{p}\right) \prod_{j=1}^{s-1} \left(1 - \left\{\frac{a_j k}{p}\right\}\right) \left(\frac{p-1}{2p}\right)^s \right) + \left(\frac{(2p+1)(p+1)}{6p^2}\right)^s - \left(\frac{p-1}{2p}\right)^{2s}.
\end{aligned}$$

□

6. Двумерный случай

При $s = 2$ теорема 1 существенно уточняется

ЛЕММА 10. Для любого набора $(1, a)$ справедливо равенство

$$D_p = 2 \max_{1 \leq n_1, n_2 \leq p} \left| \sum_{m=1}^{p_2} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{(-(n_1 - 1)a + n_2 - 1)m}{p}\right) \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$D_2^{(0)}\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) = \sum_{m_1, m_2 = -p_1, m_1 m_2 = 0}^{p_2'} \left(\prod_{\nu=1}^2 c_{n_\nu}(m_\nu) \right) \delta_p(m_1 + m_2 a_1) = 0,$$

то

$$D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) = D_2^*\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right)$$

и

$$D_p = \max_{1 \leq n_1, n_2 \leq p} \left| D_2^*\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) \right|.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 4 и равенства

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\left(\pi \frac{n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{(-(n_1 - 1)a + n_2 - 1)m}{p}\right) = \\
& = \frac{\sin\left(\pi \frac{-n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{-n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{-m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{-m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{-(-(n_1 - 1)a + n_2 - 1)m}{p}\right).
\end{aligned}$$

□

Из доказательства леммы 10 следует, что для локального отклонения $D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right)$ справедливо равенство

$$D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right) = 2 \sum_{m=1}^{p_2} \frac{\sin\left(\pi \frac{n_2 m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)}{p \sin\left(\pi \frac{m}{p}\right) p \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right)} \cdot \cos\left(\pi \frac{-(n_1 - 1)a + n_2 - 1}{p} m\right).$$

Естественно рассмотреть математическое ожидание локального отклонения, заданное равенством

$$MD_2 = \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right),$$

и дисперсию локального отклонения:

$$DD_2 = \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p \left(D_2\left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p}\right)\right)^2 - (MD_2)^2.$$

ЛЕММА 11. Для любого набора $(1, a)$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{(n_1 - 1)a m}{p}\right) &= \frac{p}{4} \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right), \\ \sum_{n_2=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \cdot \sin\left(\pi \frac{(n_1 - 1)a m}{p}\right) &= \frac{p}{4} \cos\left(\pi \frac{m a}{p}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из известного равенства для символа Коробова

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 1 & \text{при } b \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{при } b \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p e^{2\pi i \frac{bk}{p}}$$

сразу следует, что

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \cos 2\pi \frac{bk}{p} = \begin{cases} 1 & \text{при } b \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{при } b \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}, \quad \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sin 2\pi \frac{bk}{p} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{(n_1 - 1)a m}{p}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \left(\cos\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right)\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \sum_{n_1=1}^p \sin\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \times \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^p \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)\right) = \frac{p}{4} \sin\left(\pi \frac{m a}{p}\right); \\ \sum_{n_2=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \times \sin\left(\pi \frac{(n_1 - 1)a m}{p}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^p \sin\left(\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) \left(\sin\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\pi \frac{n_1 a m}{p}\right) \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right)\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \sum_{n_1=1}^p \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right)\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\pi \frac{a m}{p}\right) \times \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^p \sin\left(2\pi \frac{n_1 m a}{p}\right) = \frac{p}{4} \cos\left(\pi \frac{m a}{p}\right). \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 4. Для математического ожидания локального отклонения справедливо равенство

$$MD_2 = \frac{p-1}{16p^2} + \frac{1}{16p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{ma}{p} \right) \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{m}{p} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения математического ожидания локального отклонения имеем:

$$\begin{aligned} MD_2 &= \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p D_2 \left(\frac{n_1}{p}, \frac{n_2}{p} \right) = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{n_1, n_2=1}^p 2 \sum_{m=1}^{p^2} \frac{\sin \left(\pi \frac{n_2 m}{p} \right) \sin \left(\pi \frac{n_1 m a}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right) p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \cdot \cos \left(\pi \frac{-(n_1-1)a + n_2-1}{p} m \right) = \\ &= \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \left(\sum_{n_1=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 m a}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \cos \left(\pi \frac{(n_1-1)a m}{p} \right) \right) \left(\sum_{n_2=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_2 m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} \cos \left(\pi \frac{(n_2-1)m}{p} \right) \right) + \\ &+ \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \left(\sum_{n_1=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 m a}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right)} \sin \left(\pi \frac{(n_1-1)a m}{p} \right) \right) \left(\sum_{n_2=1}^p \frac{\sin \left(\pi \frac{n_2 m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} \sin \left(\pi \frac{(n_2-1)m}{p} \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 6, получим:

$$\begin{aligned} MD_2 &= \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \frac{\frac{p}{4} \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right) \frac{p}{4} \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right) p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} + \frac{2}{p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \frac{\frac{p}{4} \cos \left(\pi \frac{ma}{p} \right) \frac{p}{4} \cos \left(\pi \frac{m}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{ma}{p} \right) p \sin \left(\pi \frac{m}{p} \right)} = \\ &= \frac{p-1}{16p^2} + \frac{1}{16p^2} \sum_{m=1}^{p^2} \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{ma}{p} \right) \operatorname{ctg} \left(\pi \frac{m}{p} \right). \end{aligned}$$

□

7. Заключение

Заметим, что математическое ожидание квадрата локального отклонения имеет много общего с хорошо известным квадратичным отклонением, которое ввёл К. Рот в работе [17] в 1954 году. Естественно, что возникает вопрос о получении нижней оценки для математического ожидания квадрата локального отклонения параллелепипедальных сеток. В последующих работах мы планируем получить такие оценки.

В заключении выражаем свою благодарность В. Н. Чубарикову за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеева М. О. Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5 вып. 4(12). С. 35 — 38.
2. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
3. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3 вып. 2(4). С. 27 — 33.

4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Докл. РАН. 2003. Т. 389. N.2. С. 154 — 155.
5. Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. VI Междунар. конф., посвященной 100-летию Н. Г. Чудакова (Саратов, 13 — 17 сентября 2004 г.). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 47.
6. Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 5 вып. 3(11). С. 15 — 17.
7. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.
8. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6090 — 84.
9. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
10. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.
11. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
12. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
13. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
14. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С.83–118.
15. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.(второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
16. О. В. Локуцкий, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995
17. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

REFERENCES

1. Авдеева М. О. Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5 вып. 4(12). С. 35 — 38.
2. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennoy analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.
3. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

4. V. A. Bykovskii, 2003, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", *Dokl. Math.*, 67:2, 175–176.
5. Gorkusha O. A. 2004, "Criterion of finiteness of the set of local lattice minima", *Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications: Thesis of the sixth International Conference dedicated to the 100th anniversary of N. G. Chudakov (Saratov, 13 – 17 September 2004)*. — Saratov: Sarat Publishing House. un-ta, p. 47.
6. Gorkusha O. A. 2002, "Criterion of finiteness of the set of local lattice minima", *Chebyshevskij sbornik*, Vol. 5, issue 3(11). p. 15–17.
7. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
8. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.
9. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.
10. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
11. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
12. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
13. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
14. Korobov, N.M. 1967, "About some questions of the theory of Diophantine approximations", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 22, no. 3(135), pp. 83–118.
15. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
16. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, *Nachala chislennogo analiza* [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.
17. Roth, K.F. 1954, "On irregularities of distribution", *Mathematika*, 1, pp. 73–79.

Получено 12.03.22

Принято в печать 22.06.2022