ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК512.579

СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ УНАРЫ СО СТАНДАРТНОЙ МАЛЬЦЕВСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

А. Н. Лата (г. Волгоград)

Аннотация

В работе дается полное описание слабо регулярных унаров со стандартной мальцевской операцией.

Ключевые слова: слабо регулярная алгебра, унар с мальцевской операцией, конгруэнц-регулярность, конгруэнц-однородность.

WEAKLY REGULAR UNARS WITH STANDARD MAL'TSEV OPERATION

A. N. Lata (c. Volgograd)

Abstract

In this work is given the complete description of weakly regular unars with standard Mal'tsev operation.

Keywords: weakly regular algebra, unar with Mal'tsev operation, regularity of congruences, uniformity of congruences.

Одной из важных задач универсальной алгебры является изучение свойств конгруэнций алгебр. Помимо свойств, относящихся к решеткам конгруэнций, к наиболее известным конгруэнц-свойствам алгебр можно отнести перестановочность, однородность, регулярность, слабую регулярность.

На необходимость изучения регулярных и слабо регулярных алгебр обращал внимание А. Тарский (см. [1]).

Обозначим класс конгруэнции θ, порожденный элементом a, через $[a]\theta$.

Универсальная алгебра A называется *конгруэнц-регулярной (регулярной)*, если любые конгруэнции θ и φ алгебры A, имеющие общий класс $[a]\theta = [a]\varphi$ для некоторого элемента $a \in A$, совпадают.

Свойство слабой регулярности имеет смысл для алгебр, сигнатура которых содержит нульарную операцию.

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию e, называется *слабо регулярной (0-регулярной)*, если любые конгруэнции θ и φ алгебры A, имеющие общий класс $[e]\theta = [e]\varphi$, порожденный элементом $e \in A$, совпадают.

Конгруэнц-регулярность тесно связана со свойством конгруэнц-однородности алгебр. Универсальная алгебра называется *конгруэнц-однородной (однородной, равномерной, uniform)*[2], если для любой ее конгруэнции θ все классы конгруэнции θ имеют одну и ту же мощность.

Известно [3], что каждая конечная однородная алгебра является регулярной, но для любого бесконечного кардинального числа существует однородная алгебра мощности, равной этому кардинальному числу, которая не является регулярной.

Перечисленным выше конгруэнц-свойствам посвящено значительное число работ (см., напр., [1–5]).

Важную роль в современной универсальной алгебре играют алгебры с мальцевской операцией. *Мальцевской* называется тернарная операция d, удовлетворяющая тождествам

$$d(x, y, y) = d(y, y, x) = x. \tag{1}$$

Интерес к мальцевской операции обусловлен, в первую очередь, ее ролью в изучении связей между решетками конгруэнций алгебр данного многообразия и термальными операциями на этих алгебрах.

Мальцевские алгебры также находят приложения в современной теоретической информатике, в частности, в рамках алгебраического подхода к исследованиям вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem)[6].

Унаром с мальцевской операцией [7] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества Мальцева (1) и тождество перестановочности $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

Заметим, что унар с мальцевской операцией является алгеброй с оператором (в смысле А.Г. Куроша).

В настоящей работе унары с мальцевской операцией изучаются в терминах их унарных редуктов. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется унар $\langle A, f\rangle$.

В [7] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Операция p, заданная этим способом, называется *стандартной*. Ее определение приведено ниже.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbf{N}_0 \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z) \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases}$$

Конгруэнции унаров со стандартной мальцевской операцией изучались в [8, 9]. Там были найдены необходимые и достаточные условия конгруэнц-простоты, псевдопростоты и подпрямой неразложимости для алгебр из этого класса, а также получено полное описание унаров со стандартной мальцевской операцией, решетка конгруэнций которых будет цепью.

В работе [10] автора были полностью описаны конгруэнц-однородные унары со стандартной мальцевской операцией.

Теорема 1. **[10].** *Пусть $\langle A, f, p\rangle$ — унар со стандартной мальцевской операцией. Алгебра $\langle A, f, p\rangle$ является конгруэнц-однородной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) операция f на A является инъективной;

2) унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

Также было получено полное описание конгруэнц-регулярных алгебр из рассматриваемого класса:

Теорема 2. **[11].** *Унар со стандартной мальцевской операцией является регулярным тогда и только тогда, когда он однороден.*

В теории унаров наиболее часто рассматривается нульарная операция e на унаре $\langle A, f\rangle$, заданная условием $f(e) = e$. В этом случае алгебру $\langle A, f, e\rangle$ называют *унаром с нулем.*

В настоящей работе дается описание слабо регулярных унаров $\langle A, p, e, f\rangle$ со стандартной мальцевской операцией p и нульарной операцией e, для которой $f(e) = e$.

Приведем некоторые определения и обозначения, которые потребуются для дальнейшего изложения.

Неодноэлементная алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции (наибольшую $\bigtriangledown$ и наименьшую $\triangle$). Через $ConA$ обозначается решетка конгруэнций алгебры A.

Через $C_h^t, h > 0,\ t \geqslant 0$ обозначается унар $\langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a)\rangle$. Унар C_n^0 называется *циклом длины n*.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Через $T(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента a* и обозначается через $t(a)$. *Глубиной $t(A)$ унара A* называются наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$, и нуль, если $T(A) = \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара считается бесконечной.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f \rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A.

Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем*.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [12]: условие $x\theta_B y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Пусть v – узловой элемент унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [9]: $x\theta_v y$ для любых $x, y \in A$ верно тогда и только тогда, если либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$. В [8] на унаре $\langle A, f \rangle$ определяется бинарное отношение σ_n, по следующему правилу: $x\sigma_n y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x) = f^n(y)$; при этом полагаем $\sigma_0 = \triangle$.

Далее везде через $\langle A, p, f \rangle$ обозначается унар со стандартной мальцевской операцией p, а через e обозначается нульарная операция на A.

Следующее замечание очевидно.

Замечание 1. *Каждая конгруэнция алгебры $\langle A, p, f \rangle$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, p, e, f \rangle$.*

Из замечания 1 и [9, лемма 1] вытекает

Лемма 1. *Пусть v – узловой элемент унара $\langle A, f \rangle$. Конгруэнция θ_v алгебры $\langle A, p, f \rangle$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, p, e, f \rangle$.*

Теорема 3. *Пусть $\langle A, p, e, f \rangle$ — унар со стандартной мальцевской операцией p и нульарной операцией e, для которой $f(e) = e$. Алгебра $\langle A, p, e, f \rangle$ является слабо регулярной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:*

1) C_1^0;

2) сумме компоненты вида C_1^0 и произвольного унара с инъективной операцией;

3) корню, либо не имеющему узловых элементов, либо такому, в котором единственным узловым элементом является неподвижный элемент;

4) сумме компоненты связности из пункта 3) и произвольного унара с инъективной операцией.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть унар $\langle A, f \rangle$ не удовлетворяет условиям 1) – 4) теоремы.

Допустим, что унар $\langle A, f\rangle$ связный. Тогда, по условию, унар $\langle A, f\rangle$ содержит узловой элемент $d \neq e$ глубины $t(d) \geqslant 1$. Следовательно, найдутся такие различные элементы $a, b \in A$, что $f(a) = d = f(b)$. По лемме 1, бинарное отношение θ_d на унаре $\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, p, e, f\rangle$. Поскольку $t(d) \geqslant 1$, то имеем $[e]\theta_d = \{e\}$. При этом, класс $[e]\triangle$ также равен $\{e\}$. Но конгруэнции $\triangle$ и θ_d не равны, поскольку класс $[a]\theta_d$ содержит, как минимум, элементы a и b. Отсюда, алгебра $\langle A, p, e, f\rangle$ не является слабо регулярной.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязный. Обозначим через B компоненту связности унара A, содержащую элемент e (таким образом, подунар B является корнем), а через C — подунар $A\backslash B$. При этом возможны два случая.

Случай 1: Операция f на C инъективна.

По условию, унар $\langle A, f\rangle$ не удовлетворяет условиям 2) и 4) теоремы. Тогда найдется узловой элемент $d \in B$ глубины $t(d) \geqslant 1$, а следовательно и такие различные элементы $a, b \in B$, что $f(a) = d = f(b)$. Как и выше, бинарное отношение θ_d, является конгруэнцией алгебры $\langle A, p, e, f\rangle$, для которой $[e]\theta_d = \{e\} = [e]\triangle$, но $\triangle \neq \theta_d$.

Случай 2: Операция f на C не инъективна.

Тогда найдутся такие различные элементы $c, d \in C$, что $f(c) = f(d)$.

Если $|\{f(c), c, d\}| = 3$, то $f(c)$ — узловой элемент подунара C. Так как $e \notin C$, то $[e]\theta_{f(c)} = \{e\}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше в случае 1.

Пусть теперь $f(c)$ совпадает с одним из элементов c, d. Без ограничения общности положим $f(c) = c$. Тогда c – неподвижный элемент унара C, а следовательно, компонента связности D, содержащая элемент c, является корнем. Если c — узловой элемент унара D, то используя конгруэнцию θ_c унара D, аналогично случаю 1, получаем, что $\langle A, p, e, f\rangle$ не является слабо регулярной.

Если же c не является узловым, то элемент d — единственный предшествующий для элемента c (то есть, такой, что $f(d) = c$ и $d \neq c$). Отсюда, $\{c, d\}$ — это подунар компоненты D, изоморфный C_1^1. Тогда, по следствию из [9, лемма 8], с учетом замечания 1, бинарное отношение $\theta_{\{c,d\}}$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, p, e, f\rangle$. Поскольку $e \notin C$, то $[e]\theta_{\{c,d\}} = \{e\} = [e]\triangle$. Но $\theta_{\{c,d\}} \neq \triangle$, так как $(c, d) \in \theta_{\{c,d\}}$. Отсюда, $\langle A, p, e, f\rangle$ не является слабо регулярной.

Достаточность. В случае, когда $\langle A, f\rangle \cong C_1^0$, утверждение очевидно.

Пусть унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условию 2) теоремы. Тогда по [8, теорема 2] и замечанию 1, алгебра $\langle A, p, e, f\rangle$ является простой, то есть, имеет только тривиальные конгруэнции. Поскольку $\triangle \neq \bigtriangledown$, и у нулевой и единичной конгруэнций нет совпадающих классов, то алгебра $\langle A, p, e, f\rangle$ слабо регулярна.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условию 3) теоремы. По [8, лемма 12] и замечанию 1, любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, p, e, f\rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geqslant 0$. Пусть $0 \leqslant n \leqslant t(A)$, $0 \leqslant m \leqslant t(A)$ и $n < m$. Тогда σ_n и σ_m — несовпадающие конгруэнции алгебры $\langle A, p, e, f\rangle$. Так как $0 \leqslant n \leqslant t(A)$, $0 \leqslant m \leqslant t(A)$, то найдутся такие элементы $a, b \in A$, для которых $t(a) = n$ и $t(b) = m$, причем, $a \neq b$, поскольку $n < m$. Предположим, что $[e]\sigma_n \supset [e]\sigma_m$.

Так как $t(b) = m$, то $f^m(b) = e$. Учитывая, что $f^m(e) = e$, имеем $f^m(b) = f^m(e)$, откуда $b \in [e]\sigma_m$. Тогда $b \in [e]\sigma_n$. Следовательно, $f^n(b) = e$, и значит, $t(b) \leqslant n$, что противоречит условию $n < m$. Окончательно, $[e]\sigma_n \neq [e]\sigma_m$ для любых $n < m$. Таким образом, алгебра $\langle A, p, e, f\rangle$ слабо регулярна.

Если унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет условию 4) теоремы, то по [9, лемма 15], решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ изоморфна решетке $Con\langle B, p, f\rangle$ с присоединенной внешней единицей, где B — компонента связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащая нульарную операцию. Тогда, учитывая замечание 1 и доказанное в предыдущем абзаце, получаем, что алгебра $\langle A, p, e, f\rangle$ слабо регулярна. $\Box$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grätzer G. Two Mal'cev-Type Theorems in Universal Algebra // J. of Combinatorial Theory. 1970. Vol. 8. P. 334-342.

2. Taylor W. Uniformity of conrguences // Algebra Universalis. 1974. Vol. 4. P. 342-360.

3. Chajda I., Länger H. A note on congruence uniformity for single algebras // Dem. Math. 2004. Vol. 37. P. 9-11.

4. Thurston H. A. Derived operations and congruences // Proc. London Math. Soc. (3). 1958. Vol. 8. P. 127-134.

5. Chajda I. Algebras with restricted cardinalities of congruence classes // Novi Sad J. Math. 2007. Vol. 37, No. 1. P. 49-51.

6. Булатов А.А. Полиномиальность мальцевских задач CSP // Алгебра и логика. 2006. Т.45. №6. С. 655-686.

7. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Унив. алгебра и ее приложения: тез. докл. междунар. семинара. Волгоград: Перемена, 1999. С.31-32.

8. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14, вып. 7. С. 189-207.

9. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Известия ВГПУ. Сер. Естеств. и физ.-мат. науки. 2005. № 4(13). С.17-24.

10. Лата А. Н. Конгруэнц-однородные унары со стандартной мальцевской операцией // Вестник СНО. 2012. Вып. 28. С. 227-231.

11. Лата А. Н. Конгруэнц-регулярные унары со стандартной мальцевской операцией // Студент и научно-технический прогресс. Математика.: материалы 51-й междунар. науч. студ. конф. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. С. 12.

12. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ // Arch. Math. (Basel) 21. 1970. P. 256-264.

REFERENCES

1. Grätzer G. Two Mal'cev-Type Theorems in Universal Algebra. // J. of Combinatorial Theory, 1970. Vol. 8, pp. 334-342.

2. Taylor W. Uniformity of conrguences. // Algebra Universalis, 1974. Vol. 4, pp. 342-360.

3. Chajda I., Länger H. A note on congruence uniformity for single algebras. // Dem. Mathem., 2004. Vol. 37, pp. 9-11.

4. Thurston H. A. Derived operations and congruences. // Proc. London Math. Soc. (3), 1958. Vol. 8. pp. 127-134.

5. Chajda I. Algebras with restricted cardinalities of congruence classes. // Novi Sad J. Math., 2007. Vol. 37, no. 1, pp. 49-51.

6. Bulatov A. A. The property of being polynomial for Mal'tsev constraint satisfaction problems. // Algebra and Logic [Algebra i Logica], 2006. Vol.45, no 6, pp. 371-388. DOI: 10.1007/S1046900600352.

7. Kartashov V. K. Ob unarakh s mal'tsevskoi operatsiei [About unars with Mal'tsev operation]. // Universal'naia algebra i ee prilozheniia: Tez. dokl. mezhdunar. sem. Volgograd, 1999. pp. 31-32 (in Russian).

8. Usol'tsev V.L. Simple and pseudosimple algebras with operators. // J. of Mathematical Sciences [Fund. i Prikl. Matem.], 2010. Vol. 164, no. 2, pp. 281-293. DOI: 10.1007/S1095800997306.

9. Usol'tsev V.L. O podpriamo nerazlozhimykh unarakh s mal'tsevskoi operatsiei [About subdirect irreducible unars with Mal'tsev operation]. // Izvestiia VGPU, ser. "Estestv. i fiz.-mat. nauki 2005. №. 4(13), pp. 17-24 (in Russian).

10. Lata A. N. Kongruents-odnorodnye unary so standartnoi mal'tsevskoi operatsiei [Uniform unars with standard Mal'tsev operation]. *Vestnik SNO*, 2012, iss. 28, pp. 227-231 (in Russian).

11. Lata A. N. Kongruents-reguliarnye unary so standartnoi mal'tsevskoi operatsiei [Regular unars with standard Mal'tsev operation]. // Mat. 51-i mezhdunar. nauch. stud. konf. "Student i nauchno-tekhnicheskii progress": Matematika. Novosibirsk, 2013. pp. 12 (in Russian).

12. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$. // Arch. Math. (Basel), 1970, №. 21, pp. 256-264.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Поступило 14.09.2013