ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 2.

УДК 512.643.8 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-42-55

Линейные многообразия проекторов

А. М. Ветошкин

Ветошкин Александр Михайлович — кандидат технических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (Мытищинский филиал) (г. Королёв).
e-mail: alexander.vetkin@gmail.ru

Аннотация

В работе показано, что линейное многообразие матриц вида: $Q{=}Q_0{+}\sum a_i P_i$, может состоять из одних проекторов. Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы $P_i{=}Q_i$-Q_0 и все матрицы Q_i были проекторами, причем: $(Q_i\text{-}Q_j)^2{=}0$ для любой пары i и j. Установлено, что все проекторы, составляющие это линейное многообразие, имеют один ранг и любая пара A,B этих проекторов удовлетворяет $(A\text{-}B)^2{=}0$.

Найдены несколько условий, эквивалентных тому, что два проектора A,B удовлетворяют $(A\text{-}B)^2{=}0$, одно из них в терминах подпространств, определяющих эти проекторы.

Пусть n порядок проекторов Q_i, r — их ранг, тогда показано, что максимальное число линейно независимых матриц $P_i{=}Q_i$-Q_0 таких, что выполняются условия $(Q_i\text{-}Q_j)^2{=}0$, равно $r(n\text{-}r)$. Поэтому, любой проектор ранга r можно представить в виде суммы ортопроектора Q_0 и линейной комбинации не более, чем $r(n\text{-}r)$ проекторов Q_i, так, что выполняется $(Q_i\text{-}Q_j)^2{=}0$, $i,j{=}0,1,..,r(n\text{-}r)$.

В работе вычислено минимальное расстояние между двумя проекторами рангов k и l — $|k-l|^{1/2}$. Максимальное расстояние между двумя ортопроекторами одного ранга k — $(2k)^{1/2}$.

Установлено, что многочлен $h(p,q){=}(p\text{-}q)^2$ играет особую роль для алгебры $\mathcal{A}(p,q)$, порождаемой проекторами p,q,I. Многочлен h порождает центр этой алгебры — множество элементов коммутирующих со всеми элементами $\mathcal{A}(p,q)$.

Ключевые слова: проектор; линейное многообразие; линейное подпространство матриц ограниченного ранга; блочно-треугольная форма пары проекторов; центр алгебры, порожденной двумя проекторами.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. М. Ветошкин. Линейные многообразия проекторов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 42–55.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 2.

UDC 512.643.8 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-42-55

Linear manifolds of projectors

A. M. Vetoshkin

Vetoshkin Alexander Mikhailovich — candidate of technical sciences, associate professor, Moscow State Technical University N. E. Bauman (Mytishchi branch) (Korolev).
e-mail: alexander.vetkin@gmail.ru

Abstract

The paper shows that a linear manifold of matrices of the form: Q=Q_0+$\sum a_i P_i$, can consist of projectors only. It turns out that for this it is necessary and sufficient that P_i =Q_i-Q_0 and all the matrices Q_i be projectors, moreover: *(*Q_i-Q_j*)*^{2}*=0* for any pair i and j. It is established that all projectors that make up this linear manifold have one rank and any pair A, B of these projectors satisfies *(A-B)*^{2}*=0*.

Several conditions were found equivalent to the fact that two projectors A,B satisfy *(A-B)*^{2}*=0*, one of them in terms of the subspaces defining these projectors.

Let n be the order of the projectors Q_i, r be their rank, then it is shown that the maximum number of linearly independent matrices P_i=Q_i-Q_0 such that the conditions *(*Q_i-Q_j*)*^{2}*=0* are satisfied is *r(n-r)*. Therefore, any projector of rank r can be represented as the sum of an orthoprojector Q_0 and a linear combination of at most *r(n-r)* projectors Q_i so that *(*Q_i-Q_j*)*^{2}*=0, i,j=0,1,..,r(n-r)*.

The paper calculates the minimum distance between two projectors of ranks k and l - $|k-l|^{1/2}$. The maximum distance between two orthoprojectors of the same rank k is $(2k)^{1/2}$.

It is established that the polynomial *h(p,q)=(p-q)*^{2} plays a special role for the algebra $\mathcal{A}(p,q)$ generated by the projectors *p,q,I*. The polynomial h generates the center of this algebra — the set of elements commuting with all elements of $\mathcal{A}(p,q)$.

Keywords: projector, linear manifold, linear subspace of matrices of bounded rank, block-triangular form pair of projectors, center of an algebra generated by two projectors.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. M. Vetoshkin, 2022, “Linear manifolds of projectorsl”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 42–55.

1. Введение

Обозначим $M_{m,n}(\mathbb{F})$ — множество прямоугольных матриц размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$=$\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Множество квадратных матриц порядка n — $M_m(\mathbb{F})$.

Пусть P - квадратная матрица с комплексными элементами. Она называется проектором, если $P = P^2$. Если P - эрмитова матрица, то P называют ортопроектором [1].

Если подпространства L и M пересекаются только по нулевому вектору, и $L + M = \mathbb{F}^n$, то говорят, что L и M дополнительные подпространства. В случае таких подпространств обозначим матрицу, проектирующую на подпространство L вдоль подпространства M, как $P(L,\ M)$. Ортопроектор на подпространство L будем обозначать: $P(L)$. Ранг матрицы A

обозначим $\mathrm{rk}(A)$; $\mathrm{diag}(A,B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица; I_n — единичная матрица порядка n. Если A прямоугольная матрица, то A^+ — псевдообратная матрица [1].

В работе [2] показано, что если для двух проекторов Q_1 и Q_2 выполняется равенство $(Q_1-Q_2)^2=0$, то выражение $\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2$ для любого α является проектором. Во втором разделе работы дано обобщение этого факта на случай большего числа проекторов: линейное многообразие $Q=\sum_i \alpha_i Q_i\,,\quad \sum_i \alpha_i = 1$ состоит только из проекторов тогда и только тогда, когда $(Q_i-Q_j)^2=0$.

В третьем разделе даются необходимые и достаточные условия для выполнения для проекторов равенства: $(Q_i-Q_j)^2=0$. В четвертом разделе определяется максимальное число линейно независимых проекторов, удовлетворяющих этим условиям, — $r(n-r)+1$, где n порядок матриц Q_i, r — их ранг. Таким образом, показано, что любой проектор ранга r можно представить в виде суммы ортопроектора Q_0 и линейной комбинации не более, чем $r(n-r)$ проекторов Q_i, так, что выполняется $(Q_i-Q_j)^2=0,\quad i,j=0,1,..r(n-r)$.

В пятом разделе вычисляется расстояния между множествами проекторов разных рангов; определяется диаметр множества ортопроекторов одного ранга.

В последнем разделе работы, показано, что центр алгебры, порождаемой проекторами p,q,I, порождается выражением $(p-q)^2$.

2. Линейное многообразие, состоящее из одних проекторов

В пространстве квадратных матриц $M_n(\mathrm{F})$ рассмотрим линейное многообразие, задаваемое выражениями вида

$$Q = Q_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i\,, \tag{1}$$

где Q_0 — проектор, P_i — некоторые квадратные матрицы, α_i- произвольные числа.

Потребуем, чтобы матрица Q для любых α_i была проектором. Условие $Q^2=Q$ даёт:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i Q_0 P_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i Q_0 + \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i\alpha_j P_i P_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i\,. \tag{2}$$

Пусть все коэффициенты α кроме одного с номером i равны нулю, тогда $\alpha_i Q_0 P_i + \alpha_i P_i Q_0 + {} + \alpha_i^2 P_i^2 = \alpha_i P_i$. Сокращая на α_i получим:

$$Q_0 P_i + P_i Q_0 - P_i = -\alpha_i P_i^2\,.$$

Последнее равенство будет выполняется при любом α_i только при

$$P_i^2 = 0\,. \tag{3}$$

Поэтому

$$Q_0 P_i + P_i Q_0 = P_i\,. \tag{4}$$

Представим матрицу P_i в виде

$$P_i = Q_i - Q_0\,. \tag{5}$$

для некоторой матрицы Q_i. Тогда (3) - (5) дают:

$$P_i^2 = (Q_i - Q_0)^2 = Q_i^2 - Q_iQ_0 - Q_0Q_i + Q_0 = 0\,,$$

$$Q_0P_i + P_iQ_0 = Q_0(Q_i - Q_0) + (Q_i - Q_0)Q_0 = Q_i - Q_0\,.$$

Из двух последних равенств следует, что все матрицы Q_i являются проекторами. Кроме того, выполняется:

$$Q_0 + Q_i = Q_iQ_0 + Q_0Q_i\,. \tag{6}$$

Определим многочлен от некоммутирующих переменных x, y:

$$h(x, y) = x + y - xy - yx\,. \tag{7}$$

Равенства (6), таким образом, запишем в виде

$$h(Q_0, Q_i) = 0; \quad i = 1, ..k\,. \tag{8}$$

Если в равенстве (2) взять не нулевыми только два коэффициента α с произвольными индексами i и j, то учитывая (4) получим

$$P_iP_j + P_jP_i = 0,. \tag{9}$$

Подставив (5) в (9), получим:

$$P_iP_j + P_jP_i = h(Q_0, Q_i) + h(Q_0, Q_j) - h(Q_i, Q_j) = 0\,.$$

Поэтому (8) выполняется для всех номеров i и j:

$$h(Q_i, Q_j) = 0; \quad i, j = 0, 1, ..k\,. \tag{10}$$

С помощью матриц Q_i, удовлетворяющих соотношениям (10), линейное многообразие (1) задаётся таким образом:

$$Q = \sum_i \alpha_i Q_i\,, \quad \sum_i \alpha_i = 1\,. \tag{11}$$

Сформулируем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть Q_1, Q_2, .., Q_k проекторы. Для того, чтобы каждый элемент Q линейного многообразия, задаваемого выражением*

$$Q = \sum_i \alpha_i Q_i\,; \quad \sum_i \alpha_i = 1\,,$$

был проектором, необходимо и достаточно, чтобы для проекторов Q_i выполнялись равенства:

$$h(Q_i, Q_j) = Q_i + Q_j - Q_iQ_j - Q_jQ_i = 0; \quad i, j = 1, ..k\,. \tag{12}$$

Необходимость обоснована выше. Достаточность проверяется непосредственно.

Оказывается, для любых двух элементов многообразия (11) выполняется соотношение (12):

Теорема 2. *Пусть Q_1, Q_2, .., Q_k проекторы, удовлетворяющие равенствам* (12)*; два набора чисел α_1, α_2, .., α_k и β_1, β_2, .., β_k такие, что*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^k \beta_i = 1.$$

Тогда выполняется:

$$h(\sum_i \alpha_i Q_i,\ \sum_i \beta_i Q_i) = 0\,. \tag{13}$$

Для того, чтобы доказать (13), достаточно воспользоваться следующим несложно доказываемым тождеством для функции $h(x, y)$. Пусть $a_1, a_2, .., a_k$; $b_1, b_2, .., b_k$ - произвольные квадратные матрицы, тогда выполняется тождество:

$$h(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i,\ \sum_{i=1}^k \beta_i b_i) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \beta_i h(a_i, b_j) + (1-\bar\beta)\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i + (1-\bar\alpha)\sum_{i=1}^k \beta_i b_i\,,$$

$$\bar\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad \bar\beta = \sum_{i=1}^k \beta_i\,.$$

Для произведения проекторов на одно подпространство и для произведения проекторов вдоль одного подпространства верно:

$$P(A,B)P(A,C) = P(A,C), \quad P(A,B)P(C,B) = P(A,B)\,. \tag{14}$$

Поэтому для таких проекторов выполняется $h(p, q) = 0$.

Пусть A и B — дополнительные подпространства. Рассмотрим проекторы:

$$\begin{array}{ll} p = P(A,B); & pp^+ = P(A) = P(A, A^\perp); \\ p^* = P(B^\perp, A^\perp); & p^+p = P(B^\perp) = P(B^\perp, B)\,. \end{array} \tag{15}$$

Для следующих пар этих проекторов в силу (14) выполняется:

$$\begin{array}{ll} h(p, pp^+) = 0; & h(p^*, pp^+) = 0; \\ h(p, p^+p) = 0; & h(p^*, p^+p) = 0. \end{array} \tag{16}$$

Поэтому каждая пара аргументов функции h в (16) определяет по теореме 1 линейное многообразие — прямую, состоящую из одних проекторов.

Эти прямые можно увидеть наглядно, для случая действительных проекторов порядка 2. Если мы зададим проектор порядка 2 следующим образом:

$$p = \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix}\,, \tag{17}$$

тогда множество проекторов ранга 1, описывается такой системой уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - x + uv = 0; \\ x + y = 1. \end{cases}$$

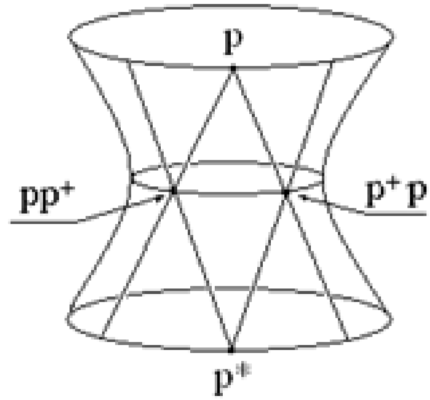
Первое уравнение этой системы задаёт однополостный гиперболоид.

На следующем рисунке изображен однополостный гиперболоид — множество проекторов (17) ранга 1; отмеченные точки на нём — проекторы (15); прямые — одномерные линейные многообразия проекторов, определяемые парами проекторов из (16). Горловая окружность этого гиперболоида состоит из ортопроекторов.

Пример 1:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad pp^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p^+p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Первые две пары проекторов в (16) задают прямые (образующие этого гиперболоида), проходящие через ортопроектор pp^+.



3. Проекторы, удовлетворяющие равенству $p + q = pq + qp$

В предыдущем разделе упоминалось, что равенство $p+q = pq+qp$ выполняется, если оба проектора p и q на одно подпространство или оба вдоль одного подпространства. Теоремы 3 и 4 дают ответ на вопрос, какими должны быть подпространства, определяющие проекторы, для того, чтобы выполнялось это равенство.

Теорема 3. *Если $p = P(A, B)$ и $q = P(C, D)$ проекторы и выполняется равенство*

$$h(p, q) = p + q - pq - qp = 0\,, \tag{18}$$

то pq и qp также являются проекторами и ранги p, q, pq, qp одинаковы. Кроме того

$$A \cap D = 0, \quad C \cap B = 0\,. \tag{19}$$

Умножим (18) слева на p, получим $p = pqp$. Откуда следует, что выражение pq проектор. Как и qp, по аналогичным соображениям. У проекторов ранг совпадает со следом, поэтому из (18) получаем: $\mathrm{rk}(p)+\mathrm{rk}(q) = \mathrm{rk}(pq)+\mathrm{rk}(qp)$. Последнее равенство невозможно, если ранги матриц p, q, pq, qp не совпадают.

Возьмем произвольный вектор $a \in A \cap D$. Тогда $h(p, q)(a) = a = 0$. Таким образом, в пересечении подпространств A и D только нулевой вектор. Аналогично получим: $C \cap B = 0$.

Следствие. *Все матрицы линейного многообразия* (11) *имеют один ранг.*

Для доказательства применим теорему 3 к проекторам Q_i, задающим линейное многообразие (11), получим, что все они имеют один ранг. Так как по теореме 2 выполняется равенство $h(Q_i,\ \sum \beta_j Q_j) = 0$, то все элементы этого линейного многообразия имеют по теореме 3 один ранг.

Теорема 4. *Пусть $p = P(A, B)$ и $q = P(C, D)$ проекторы, тогда следующие условия эквивалентны:*

$$h(p, q) = p + q - pq - qp = 0\,,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + (B \cap D) = C + (B \cap D) \\ B + (A \cap C) = D + (A \cap C) \end{array} \right. , \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A, B)P(C, D) = P(A, D) \\ P(B, A)P(D, C) = P(B, C) \end{array} \right. , \tag{21}$$

$$P(A, B) + P(C, D) = P(A, D) + P(C, B)\,. \tag{22}$$

(18) $\Rightarrow$ (20). Докажем, что $A+(B\cap D)\subset C+(B\cap D)$. Для произвольного $x\in A+(B\cap D)$ имеем $x = a+b, \quad a\in A, \ b\in B\cap D$. Кроме того, вектор a можно представить так: $a=c+d, \quad c\in C, \ d\in D$. Для слагаемых из (18) получим: $p(x)=a$, $q(x)=q(a)=q(c+d)=c$, $qp(x)=q(a)=c$, $pq(x)=p(c)=p(a-d)=a-p(d)$. Получаем, что $h(p,q)(x)=p(d)=0$. Поэтому $d\in B\cap D$. Таким образом: $x=a+b=c+d+b$, $x\in C+(B\cap D)$, $A+(B\cap D)\subset C+(B\cap D)$. Совершенно аналогично доказывается, что $C+(B\cap D)\subset A+(B\cap D)$. Первое равенство из (20) доказано.

При выполнении (18) для p и q, равенство (18) выполняется и для дополнительных проекторов:

$$h(I-p, I-q)=0, \quad I-p=P(B,A), \quad I-q=P(D,C)\,.$$

Первое равенство из (20) для дополнительных проекторов есть в точности второе равенство из (20). Таким образом, из (18) следует (20).

(20) $\Rightarrow$ (21). Пусть выполняется первое равенство из (20), докажем, что $pq=P(A,D)$. Для произвольного x имеем $x=c+d, \quad c\in C, d\in D$. Из первого равенства (20) следует, что вектор c можно представить так: $c=a+b, \quad a\in A, \ b\in B\cap D$. Вычислим последовательно:

$$pq(x)=pq(c+d)=p(c)=p(a+b)=a\,,$$

$$qpq(x)=q(a)=q(c-b)=c\,,$$

$$pqpq(x)=p(c)=p(a+b)=a\,.$$

Для произвольного x получили $pq(x)=(pq)^2(x)$. Поэтому pq -проектор: $pq=P(X,Y)$, для некоторых дополнительных подпространств X и Y. Так как суммы подпространств в первом равенстве (20) прямые, то $\dim A=\dim C$. Откуда $\mathrm{rk}(p)=\mathrm{rk}(q)$ и $\mathrm{rk}(pq)\leqslant\mathrm{rk}(p)$.

Для произвольного $a\in A$ имеем $a=c_1+b_1, \quad c_1\in C, \quad b_1\in B\cap D$. Следовательно: $pq(a)=pq(c_1+b_1)=p(c_1)=p(a-b_1)=a$. Таким образом, $A\subseteq X$. А так как $\dim X\leqslant\dim A$, получаем, что $A=X$. Очевидно имеем: $D\subseteq Y$. Затем, так как $\dim X=\dim A$, то $\dim Y=\dim D$. Таким образом, $pq=P(A,D)$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично из второго равенства (20) следует второе равенство (21).

(21) $\Rightarrow$ (22). Второе равенство в (21) запишем так:

$P(B,C)=(I-p)(I-q)=I-p-q+pq$. Или:

$$p+q=I-P(B,C)+pq=P(C,B)+P(A,D).$$

(22) $\Rightarrow$ (18). Умножим (22) на q слева, учитывая (14) получим $pq=P(A,D)q=P(A,D)$. Аналогично: $qp=P(C,B)$. Из двух последних равенств и (22) следует (18).

4. Наибольшая размерность линейного многообразия

Рассмотрим линейное многообразие, определяемое проекторами Q_i:

$$Q=Q_0+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i P_i\,, \quad P_i=Q_i-Q_0, \quad h(Q_i,Q_j)=0\ \forall i,j\,. \tag{23}$$

Найдется подобие такое, что $RQ_0R^{-1}=\mathrm{diag}(I_r,0_{n-r})$, где $r=\mathrm{rk}(Q_0)$. Применим это подобие и к остальным матрицам Q_i. Будем использовать для проекторов RQ_iR^{-1} те же обозначения — Q_i. Отметим, что матрица $Q_0=\mathrm{diag}(I_r,0_{n-r})$ теперь является ортопроектором.

Из того что $h(Q_0,Q_i)=0$ следует, что проектор Q_i имеет вид:

$$Q_i = \begin{bmatrix} I_r & a_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix}, \quad a_i b_i = 0, \quad b_i a_i = 0. \qquad P_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Из того, что $a_i b_i = 0$ следует, что $\mathrm{rk}(P_i) \leqslant r$.

Аналогично, любой элемент многообразия (23) $Q = Q_0 + \sum \alpha_i P_i$ по теореме 2 удовлетворяет $h(Q_0, Q) = 0$, поэтому $Q - Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix}$, $q_1 q_2 = 0$ и $\mathrm{rk}(\sum \alpha_i P_i) \leqslant r$.

Для матриц P_i должны выполняться условия (9), это приводит к таким условиям на матрицы a_i, b_i:

$$a_i b_j + a_j b_i = 0, \quad b_i a_j + b_j a_i = 0, \quad \forall\, i, j\,. \tag{24}$$

Все условия (24) будут удовлетворены если, выбрать, например, все $b_i = 0$. А у матриц $a_i \in M_{r,n-r}$ все элементы будут нулевые, кроме одного единичного. Таких различных матриц a_i будет $(n-r)r$ штук. При таком выборе a_i, b_i матрицы P_i будут линейно независимы. Обозначим этот набор матриц так: $P_{\max} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{(n-r)r}\}$. (Отметим, что если взять наоборот: $a_i = 0$, а b_i имеют среди ненулевых элементов одну единицу, то (24) также выполнены. Это набор $P'_{\max}$).

Таким образом, линейная комбинация $\sum \alpha_i P_i$ определяет линейное подпространство матриц, ранг которых ограничен r. Причем, мы можем выбрать P_i так, что размерность этого подпространства будет равна$(n-r)r$. (Наборы $P_{\max}, P'_{\max}$). Возникает вопрос, можно ли выбрать большее число линейно независимых матриц P_i так, что выполняются условия (24). Ниже обосновывается, что нельзя.

В работе [3] исследуются линейные подпространства матриц, ранг которых не превосходит некоторого числа r. (Изложение результатов [3] имеется в книге [4], раздел 8.3). В теореме 1 работы [3] приведено доказательство того, что подпространство $U \subset M_n$ матриц такого вида:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rk}(A) \leqslant r, \quad A_{11} \in M_r$$

имеет размерность не больше nr.

Это доказательство легко модифицировать для обоснования того, что подпространство $V \subset M_n$ матриц вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rk}(A) \leqslant r, \quad A_{12} \in M_{r,n-r}$$

имеет размерность не больше $(n-r)r$.

В изложении доказательства этой теоремы из [4, теорема 8.3.1] рассматриваются отображения: $f: U \to M_{r,n}$, задаваемое формулой $f(A) \to [A_{11}, A_{12}]$, и $g: \mathrm{ker} f \to M^*_{r,n}$, $g(B): [X_{11} X_{12}] \to \mathrm{tr}(B_{21} X_{12})$.

Достаточно заменить эти отображения на такие:

$$f': V \to M_{r,n-r}, \quad f'(A) \to [A_{12}]\,,$$

$$g': \mathrm{ker} f \to M^*_{r,n-r}, \quad g'(B): [X_{12}] \to \mathrm{tr}(B_{21} X_{12})\,,$$

кроме того, в нужных местах n заменить на $n-r$. Полученный текст будет обоснованием того, что подпространство V имеет размерность не более, чем $(n-r)r$.

Для примера 1 из раздела 2 $n = 2, \quad r = 1, \quad (n-r)r = 1$. Наборы $P_{\max}$ и $P'_{\max}$ содержат по одной матрице: $P_{\max} = \{p - pp^+\}, \quad P'_{\max} = \{p^* - pp^+\}$. Это две образующие гиперболоида из этого примера. Множество ортопроекторов единичного ранга — горловая окружность гиперболоида. Сам гиперболоид получается как вращение образующей вокруг этой окружности.

Аналогичная картина наблюдается в общем случае. Рассмотрим множество ортопроекторов ранга r. Это некоторое многообразие. Ортопроектор $Q_0 = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$ точка этого многообразия. (Отметим, что для любого ортопроектора ранга r можно найти унитарное подобие трансформирующее этот ортопроектор в Q_0). Линейное многообразие задаваемое $Q = Q_0 + \sum \alpha_i P_i, \quad P_i \in P_{\max}$, это «образующая» множества проекторов ранга r. Это многообразие «касается» многообразия ортопроектов ранга r в точке Q_0. Выполнив унитарное подобие («вращение» образующей) для каждой матрицы Q получим, разумеется, проекторы ранга r.

Покажем, что так мы получим **все** проекторы ранга r. Возьмем произвольный такой проектор P. С помощью унитарного подобия его можно представить в виде (см. [5], формула (8.1.4)):

$$P = U \begin{bmatrix} I_r & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad P, U \in M_n, \quad U^*U = I_n \,. \tag{25}$$

Вычислим матрицу P^+: $P^+ = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ G^*K & 0 \end{bmatrix} U^*$, $K = [I_r + GG^*]^{-1}$. Поэтому соответствующий ортопроектор $PP^+ = UQ_0U^*$. Кроме того $P = UQ_0U^* + U \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$ и $\begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum \alpha_i P_i, \quad P_i \in P_{\max}$. Где α_i берем равным соответствующему элементу матрицы G. Таким образом, при «вращении» «образующей» получаем все проекторы ранга r.

Отметим, что у всех проекторов набора $P_{\max}$ совпадают образы, а у всех проекторов набора $P'_{\max}$ одно и то же ядро. Следующий пример демонстрирует случай, когда у проекторов, образующих линейное многообразие (23), ни образ, ни ядро не совпадают.

Пример 2:

Возьмем $n = 4, \quad r = 2, \quad (n-r)r = 4$. Набор $P_{\max}$ содержит 4 матрицы. Покажем на примере ,что выбор матриц $P_i = \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix}$ когда, как среди a_i, так и среди b_i будут ненулевые матрицы, приводит к меньшей размерности подпространства, натянутого на матрицы P_i.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такой выбор матриц a_i, b_i обеспечивает выполнение равенств (24). В данном случае несложно показать, что попытка добавить матрицу $P_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$ так, чтобы выполнялись условия (24), не дает новую линейно независимую от P_1, P_2 матрицу.

5. Множества проекторов одного ранга

Будем рассматривать здесь проекторы одного порядка — n. Введем обозначения: X_k- множество ортопроекторов ранга k, Z_k- множество проекторов ранга k. Так как для различных k и j множества X_k и X_j не пересекаются, то имеет смысл определить расстояние между ними. Аналогично, можно определить расстояние между множествами проекторов разных рангов. Для множества X_k представляет интерес его диаметр. Поэтому определим величины:

$$\begin{aligned} &\omega_{k,l} = \inf_{x \in X_k, w \in X_l} \|x - w\|_E \,, \quad \lambda_{k,l} = \inf_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a - b\|_E \,, \\ &\Omega_k = \sup_{x, w \in X_k} \|x - w\|_E \,, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\|a\|_E = \sqrt{\operatorname{tr} a^* a}$ - евклидова матричная норма. (Отметим, что квадрат евклидовой нормы блочной матрицы равен сумме квадратов евклидовых норм блоков). Из представления проектора (25), учитывая унитарную инвариантность евклидовой нормы, получаем, что для проектора p выполняется: $\|p\|_E \geqslant \sqrt{\operatorname{rk} p}$, для ортопроектора w: $\|w\|_E = \sqrt{\operatorname{rk} w}$.

Для вычисления величин (26) используем максимально простой вид, к которому может быть приведена пара произвольных комплексных проекторов — блочно-треугольный вид каждого проектора. Эта форма пары проекторов получена в работе [6], с уточнениями в [7]. (Эта и другие близкие к ней формы проекторов и применение этих форм рассматриваются в работах [8]-[15]). Оказывается, для двух произвольных проекторов a, b существует унитарное подобие, приводящее обе матрицы к верхней блочно-треугольной форме $a' = u^* a u$, $b' = u^* b u$ с диагональными блоками порядков 1 и 2. Причем, порядки соответствующих диагональных блоков в a' и b' совпадают. Очевидно, что диагональными блоками матриц a', b' будут проекторы порядков 1 и 2. Можно считать, что ранг каждого такого диагонального проектора меньше 2.

Евклидова норма унитарно инвариантна, поэтому:

$$\lambda_{k,l} = \inf_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a - b\|_E = \inf_{a \in Z_k, b \in Z_l} \|a' - b'\|_E .$$

Так как ранги матриц a', b' равны k и l, то на блочной диагонали матрицы $a' - b'$ будет минимум $|k - l|$ ненулевых блоков. Причем, каждый такой блок, с точностью до знака, это проектор ранга 1 порядков 1 или 2. Учитывая, что для проекторов p ранга 1 выполняется $\|p\|_E \geqslant 1$, получаем оценку: $\lambda_{k,l} \geqslant \sqrt{|k - l|}$. Эта же оценка верна для $\omega_{k,l}$: $\omega_{k,l} \geqslant \sqrt{|k - l|}$.

Эти неравенства превращаются в равенства для некоторых пар проекторов: пусть $Q_k = \operatorname{diag}(I_k, 0_{n-k})$ ортопроектор порядка n, тогда $\|Q_k - Q_l\|_E = \sqrt{|k - l|}$. Определим T_{ij} как матрицу порядка n единственный ненулевой элемент которой единица в j-й позиции i-й строки. Тогда при $0 < k < l < n$, и при $i \leqslant k$, $j > l$, матрицы $S_k = Q_k + T_{ij}$ и $S_l = Q_l + T_{ij}$ являются проекторами и $\|S_k - S_l\|_E = \sqrt{|k - l|}$.

(Множеству Z_k принадлежит линейное многообразие $Q_k + \sum_{i \leqslant k, j > l} \alpha_{ij} T_{ij}$. Множеству Z_l принадлежит линейное многообразие $Q_l + \sum_{i \leqslant k, j > l} \alpha_{ij} T_{ij}$. Эти линейные многообразия параллельны друг другу и расстояние между ними — минимальное расстояние между множествами Z_k и Z_l: $\sqrt{|k - l|}$).

Перейдем к величине Ω_k. Можно считать, что $k \leqslant n/2$. Так как матрицы x, w эрмитовы, то после унитарного подобия, приводящего к верхней блочно-треугольной форме, они останутся эрмитовыми. Значит матрица $x' - w'$ будет диагональной, каждый диагональный блок — это плюс-минус ортопроектор ранга 1 порядков 1 или 2, или — это разница таких проекторов. На блочной диагонали матрицы $x' - w'$ будет максимум $2k$ ненулевых блоков. Получаем оценку $\Omega_k \leqslant \sqrt{2k}$. Равенство достигается для двух ортопроекторов: $\|Q_k - (I_n - Q_{n-k})\|_E = \sqrt{2k}$.

Остается рассмотреть, что происходит, когда два ненулевых блока занимают одну позицию на диагонали. Могут ли они дать вклад в норму матрицы $x' - w'$ больше чем 2? Для блоков порядка 1 получаем норму их разницы 0, вместо 2 при разнесении этих блоков. Остается рассмотреть случай, когда встречаются два ненулевых блока-ортопроектора порядка два: v, u. Выполним унитарное подобие, затрагивающее только две соответствующие координаты, такое, что ортопроектор u примет вид: $u' = \operatorname{diag}(1, 0)$. Тогда, так как

$$\|v'\|_E = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \right\|_E = a^2 + 2b\bar{b} + c^2 = 1,$$

то $\|v' - u'\|_E = (a - 1)^2 + 2b\bar{b} + c^2 = 2 - 2a \leqslant 2$. Последнее неравенство следует из того, что величина a действительная; и из определения проектора следует, что $a^2 + b\bar{b} = a$, поэтому $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Таким образом, доказана:

Теорема 5.

$$\begin{aligned}
\omega_{k,l} &= \min_{x\in X_k, w\in X_l} \|x-w\|_E = \sqrt{|k-l|},\\
\lambda_{k,l} &= \min_{a\in Z_k, b\in Z_l} \|a-b\|_E = \sqrt{|k-l|},\\
\Omega_k &= \max_{x,w\in X_k} \|x-w\|_E = \sqrt{2k}, \quad k\leqslant n/2.
\end{aligned}$$

6. Центр алгебры порождаемой проекторами p и q

Многочлен $h = h(p,q) = p+q-pq-qp$ играет особую роль для алгебры $\mathcal{A}(p,q)$ порождаемой проекторами p,q,I. Многочлен h порождает центр этой алгебры $\mathcal{C}(p,q) = \{c \mid fc = cf,\ \forall f\in\mathcal{A}(p,q)\}$ — множество элементов перестановочных со всеми элементами $\mathcal{A}(p,q)$.

Для пары проекторов p и q одного порядка введем обозначения:

$$p_j = \underbrace{pqpq\ldots}_{j} \qquad q_j = \underbrace{qpqp\ldots}_{j}.$$

— здесь матричные сомножители p и q чередуются; количество сомножителей $-j$. Например: $p_1 = p$, $p_2 = pq$, $q_3 = qpq$ и так далее..

Многочлен $f(p,q)$ степени k запишем так:

$$f(p,q) = a_0 I_n + \sum_{j=1}^{k}(a_j p_j + b_j q_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{F}. \tag{27}$$

Элементы алгебры $\mathcal{A}(p,q)$ задаются выражениями вида (27).

Для того, чтобы элемент $f = f(p,q)$ вида (27) был перестановочен со всеми элементами $\mathcal{A}(p,q)$, необходимо и достаточно, чтобы он был перестановочен с p и q:

$$pf = fp, \quad qf = fq. \tag{28}$$

Запишем f из (27) для подстановки в (28) таким образом:

$$f(p,q) = a_0 I_n + \sum_j (a_{2j-1}p_{2j-1} + b_{2j-1}q_{2j-1} + a_{2j}p_{2j} + b_{2j}q_{2j}).$$

Первое равенство из (28) после указанной подстановки и сокращения равных слагаемых будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_j (b_{2j-1}p_{2j} + a_{2j}p_{2j} + b_{2j}p_{2j+1}) =\\
&= \textstyle\sum_j (b_{2j-1}q_{2j} + a_{2j}p_{2j+1} + b_{2j}q_{2j}).
\end{aligned} \tag{29}$$

Используем следующий факт, полученный в работе [14]: если многочлен от двух проекторов вида (27) для любой пары проекторов равен нулю, то все коэффициенты этого многочлена нулевые. (К сожалению, в работе [14] не оговаривается, что это утверждение верно для порядка проекторов n больше одного).

Применение этого факта к (29) дает:

$$a_{2j} + b_{2j-1} = 0, \quad b_{2j-1} + b_{2j} = 0.$$

Из второго равенства (28) аналогично получаем:

$$a_{2j-1} + b_{2j} = 0, \quad a_{2j-1} + a_{2j} = 0.$$

Таким образом для коэффициентов многочлена из центра нашей алгебры $\mathcal{A}(p,q)$ выполняется:

$$a_{2j-1} = b_{2j-1} = -a_{2j} = -b_{2j}\,.$$

Определим многочлены:

$$h_k = h_k(p,q) = p_{2k-1} + q_{2k-1} - p_{2k} - q_{2k}, \quad h_1 = h, \quad k = 1, 2, \dots 5\,. \tag{30}$$

Искомый центр состоит из многочленов вида:

$$f(p,q) = \sum_{k=0}^{m} c_k h_k, \quad h_0 = I\,. \tag{31}$$

Учитывая (30), получим, что $h_k h = h_k - h_{k+1}$, затем $h_{k+1} = h_k(I-h)$, и $h_k = h(I-h)^{k-1}$. Подставив последнее выражение в (31) получим, что любой элемент центра представляется в виде:

$$f(p,q) = \sum_{k=0}^{m} d_k h^k, \quad h^0 = I\,. \tag{32}$$

(Очевидно и обратное: любой элемент вида (32) принадлежит центру, так как h принадлежит центру). Таким образом доказана:

Теорема 6. *Любой элемент центра $\mathcal{C}(p,q)$ алгебры $\mathcal{A}(p,q)$ порождаемой проекторами p, q, I имеет вид:*

$$f(p,q) = d_0 I + \sum_{k=1}^{m} d_k (p-q)^{2k}\,.$$

7. Заключение

Показано, что множество проекторов порядка n, ранга r представляет собой «центральное ядро» — множество ортопроекторов ранга r, которого в каждой точке «касается» линейное многообразие из косых проекторов ранга r. Это линейное многообразие описывается так:

$$Q = \sum_{i=0}^{r(n-r)} \alpha_i Q_i\,, \ \sum_{i=0}^{r(n-r)} \alpha_i = 1, \quad (Q_i - Q_j)^2 = 0, \ \ \forall i,j = 0,1,..,r(n-r)\,,$$

где Q_0 — ортопроектор, точка «касания»; система матриц $\{Q_i - Q_0\}$ линейно независима.

Два различных таких множества — множество проекторов ранга k и множество проекторов ранга l находятся друг от друга на расстоянии $\sqrt{|k-l|}$. Множество ортопроекторов одного ранга k имеет диаметр $\sqrt{2\min(k,n-k)}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 544 с.

2. Baksalary J.K., Baksalary O.M. Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices //Linear Algebra Appl. 321 (2000) 3-7.

3. Flanders H. On spaces of linear transformations with bounded rank // J. London Math. Soc. 1962. V. 37. P. 10-16.

4. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.– М.: МЦПМО, 2015.– 576 с.

5. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997. — 390с.

6. Икрамов Х.Д. Об одновременной приводимости к блочно-треугольному виду пар косых проекторов //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 2. С.181-182.

7. Икрамов Х.Д. Одновременное приведение к блочно-треугольному виду и теоремы о парах комплексных идемпотент //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С.979-982.

8. Джордж Ф., Икрамов Х.Д. Замечание о канонической форме пары ортопроекторов // Зап. науч. Семинаров ПОМИ, 2004.

9. Икрамов Х.Д. О канонической форме проекторов относительно унитарного подобия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. №3. С. 3-5.

10. Икрамов Х.Д. Каноническая форма как средство доказательства свойств проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №9. С. 1285-1290.

11. Икрамов Х.Д. Квазидиагонализируемость косых проекторов как частный случай некоммутативной спектральной теоремы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №8. С. 1123-1130.

12. Икрамов Х.Д. Канонические формы проекторов относительно унитарного подобия и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. с. 1534-1539.

13. Djokovic D. Z. 1991, “Unitary similarity of projectors”, Aequationes Mathematicae, 42, pp. 220-224.

14. Ветошкин А.М. Свойства многочленов от двух проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. с. 189-192.

15. Ветошкин А.М., Всегда невырожденные многочлены от двух проекторов, Чебышевский сб.,**18**:1 (2017), 44–64.

REFERENCES

1. Voevodin V. V. 2006, *Enciklopediya linejnoj algebry. Elektronnaya sistema LINEAL*, [Encyclopedia of linear algebra. Electronic system LINEAL] — SPb.: BHV-Peterburg, — 544 p.

2. Baksalary J. K., Baksalary O. M. 2000, “Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices”, *Linear Algebra Appl.*, 321, pp.3-7.

3. Flanders H. 1962, “On spaces of linear transformations with bounded rank”, *J. London Math. Soc.*, vol. 37, pp. 10-16.

4. Prasolov V. V. 1994, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, AMS.

5. Godunov S. K. 1997, *Sovremennye aspekty linejnoj algebry*, [Modern Aspects of Linear Algebra], — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, — 390p.

6. Ikramov Kh. D. 1998, "On simultaneous reduction of a pair of oblique projectors to block triangular form *Comput. Math. Math. Phys*, vol. 38, pp. 173-174.

7. Ikramov Kh. D. 2011, "Simultaneous reduction to block triangular form and theorems on pairs of complex idempotents *Comput. Math. Math. Phys*, vol. 51, pp. 915-918.

8. George A. & Ikramov Kh. D. 2006, "A note on the canonical form for a pair of orthoprojectors *J. Math. Sci.*, vol. 132, pp. 153-155.

9. Ikramov Kh. D. 1996, "A canonical form for projectors under unitary similarity", *Comput. Math. Math. Phys.* vol. 36, pp. 279–281.

10. Ikramov Kh. D. 2000, "The canonical form as a tool for proving the properties of projectors", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 40, pp. 1233–1238.

11. Ikramov Kh. D. 2000, "The quasidiagonalizability of oblique projectors as a particular case of the noncommutative spectral theorem", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 40, pp. 1077–1084.

12. Ikramov Kh. D. 2004, "Canonical forms of projectors with respect to unitary similarity and their applications", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 44, pp. 1456–1461.

13. Djokovic D. Z. 1991, "Unitary similarity of projectors", *Aequationes Mathematicae*, vol. 42, pp. 220-224.

14. Vetoshkin A. M., 2015, "Property of polynomials in two projectors *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 55, pp. 179-182.

15. Vetoshkin A. M., 2017, "Always nonsingular polynomials of two projectors", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 1, pp. 44-64.

Получено 20.10.19
Принято в печать 22.06.2022