ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 2.

УДК 511.2 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-21-41

Новая оценка для исключительного множества суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии

И. Аллаков, А. Ш. Сафаров

Аллаков Исмаил — профессор, доктор физико-математических наук, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).
e-mail: iallakov@mail.ru
Сафаров Абдувахид Шукурович — кандидат физико-математических наук, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Аннотация

В работе изучается вопрос о представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии, т.е. бинарная задача Гольдбаха, когда простые числа берутся из арифметической прогрессии. Доказаны новые оценки для количества четных натуральных чисел которые (возможно) не представимы в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии и для числа представления данного натурального числа , в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии.

Ключевые слова: Характер Дирихле, нули L-фунции, гипотеза Римана, исключительное множество, исключительный нуль, оценка снизу, оценка сверху.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
И. Аллаков, А. Ш. Сафаров. Новая оценка для исключительного множества суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 21–41.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 2.

UDC 511.2 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-21-41

New estimates for the exceptional set of the sum of two primes from an arithmetic progression.

I. Allakov, A. Sh. Safarov

Allakov Ismail — professor, doctor of physical and mathematical sciences, Termez State University (Uzbekistan, Termez).
e-mail: iallakov@mail.ru
Safarov Abduvahid Shukurovich — candidate of physical and mathematical sciences, Termez State University (Uzbekistan, Termez).
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Abstract

The paper studies the question of representing numbers as the sum of two primes from an arithmetic progression, that is, the binary Goldbach problem, when primes are taken from an arithmetic progression. New estimates are proved for the number of even natural numbers that are (possibly) not representable as a sum of two primes from an arithmetic progression and for a number representing a given natural number, as a sum of two primes from an arithmetic progression.

Keywords: The Dirichlet charakter, Dirichlet L-function, exceptional set, representation numbers,exceptional zero, exceptional nature, main member, remaining member.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
I. Allakov, A. Sh. Safarov, 2022, “New estimates for the exceptional set of the sum of two primes from an arithmetic progression” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 21–41.

1. Введение

Формулировка результатов

Пусть X — достаточно большое действительное число, n — натуральное, p, p_1, p_2 — простые числа, $E(X)$ — количество четных натуральных чисел которые (возможно) не представимы в виде суммы двух простых, т.е. в виде

$$n = p_1 + p_2. \tag{0.1}$$

Далее, пусть $M(D, X)$ — множество четных натуральных чисел $n \leq X$, которые (возможно) не представимы в виде

$$n = p_1 + p_2, p_i \equiv l_i (\mathrm{mod} D), (l_i, D) = 1, i = 1, 2; \tag{0.2}$$

здесь l_1 и l_2 произвольные фиксированные целые числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq l_1, l_2 < D, (l_1, D) = 1, (l_2, D) = 1$. Обозначим: $E(D, X) = cardM(D, X); R(n, D)$ — число представлений n в виде (0.2); $c_j (j = 1, 2, \ldots)$ — некоторые положительные постоянные, $\varphi(a)$ — функция Эйлера.. Числа, которые представимые в виде (0.1) будем называть гольдбаховым числами [1], а числа, которые представимы в виде (0.2), будем называть гольдбаховыми числами в арифметической прогрессии . После известных работ И.М.Виноградова [2,3],и Хуа Ло Кена [4,5], Ван дер Корпут [6], А.Г.Чудаков [7] и Т.Эстерман [8] применили круговой метод Харди-Литтлвуда [9,10] к решению бинарной проблемы Гольдбаха и доказали, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух нечетных простых чисел. Точнее говоря, они доказали, что если обозначить через $E(X)$ — число четных чисел $n, n \leq X$, которые возможно не представимы в виде суммы двух простых чисел, тогда $E(X) \ll \frac{X}{ln^A X}$. А.Ф.Лаврик [11] получил асимптотическую формулу для $R(n, D)$, которые справедливы для всех $n, n \leq X$, за исключением $E(D, X) \ll \frac{X}{ln^A X}$ значений из них (где A — некоторое число, $\ll$ — символ Виноградова, запись $f \ll g$ — означает, что $\mid f \mid \leq c_1 g$, (т.е. это символ $O-$ большое), где c_1 — постоянное число.

Затем Р.Вон [12], Г.Монтгомери и Р.Вон [13] улучшили эту оценку показав, что $E(X) < < Xexp(-c_2\sqrt{lnX})$ и $E(X) < X^{1-\delta}$, соответственно. Здесь X — достаточно большое, δ — малое действительные числа, c_2 — абсолютное постоянное. И.Аллаков [14], реализуя идею Б.М. Бредихина, получил оценку снизу для $R(n)$ справедливую для всех $n, n \leq X$, за исключением $E(X) < X^{1-\delta}$ значений из них. Здесь $R(n)$ — числа представления данного натурального числа n в виде (0,1). Аналогичные результаты были получены относительно задач: Харди-Литтлвуда [15,16], Хуа-Ло-Кена [17,18,19] и об одновременном представлении чисел суммой простых чисел [20,21,22]. Используя схемы работы А.Ф.Лаврика [11] и Р.Вона [12], И.Аллаков [23] доказал теорему:

Теорема А. При $D = p^{v}$ и $D \ll ln^A X$ справедливы оценки:

$$E(D, X) \leq c_3 \frac{X}{\varphi(D)} exp(-c_4\sqrt{lnX})$$

и для $n \notin M(D, X), n \leq X$

$$R(n, D) \geq c_5 \frac{n}{\varphi(D) ln^2 n}\left(1 - \frac{ln^A n}{exp(c_6\sqrt{lnn})}\right) exp\left(-\frac{c_7}{4}\sqrt{lnn}\right).$$

В настоящей работе докажем теорему:

Теорема 1. Если X достаточно большое и $\delta > 0$ достаточно малое действительное числа, то при $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ справедливы оценки:

$$E(D, X) \leq c_8 \frac{X^{1-\delta_1}}{\varphi(D)}$$

и для $n \notin M(D, X), n \leq X$

$$R(n, D) \geq c_9 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D) ln^2 n}\left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1\right). \tag{0.3}$$

Теорема 1 является усилением и обобщением в арифметическую прогрессии соответствующих результатов И.Аллакова [23] и Монтгомери - Вона [13].Отметить, что теорема 1 отличается от теоремы А в следующем: в теореме А разность арифметической прогрессии равна $D = p^{\vartheta}$ (т.е. равна степени простого числа) и $D \ll ln^A X$, а исключительное множество удовлетворяет оценку $E(D, X) \leq c_3 \frac{X}{\varphi(D)} exp(-c_4\sqrt{lnX})$, а в теореме 1 D — произвольное и $1 < D < X^{\delta_1}$ (δ_1 достаточно малое) и исключительное множество удовлетворяет оценку $E(D, X) \leq c_8 \frac{X^{1-\delta}}{\varphi(D)}$ (где δ достаточное малое и $(10\delta_1 < \delta)$).

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 мы исключаем из рассмотрения некоторые $n \leq X$, которые не можем получить, используя наши методы, подходящих оценок. Совокупность всех этих исключаемых n составляет так называемое исключительное множество рассматриваемой задачи.

Замечание 2. Словосочетание "возможно непредставимые в виде ... "здесь означает, что для таких n также могут существовать такие представления, но их количество $R(n, D)$ для данного n уже не будет, удовлетворят неравенство, указанное в теореме 1, а будет удовлетворять обратное неравенство, т.е.

$$R(n, D) < c_9 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D) ln^2 n}\left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1\right).$$

2. Обозначение и необходимые леммы

Пусть a и $q, (a, q) = 1$ — целые положительные числа, а $\alpha, (0 < \alpha < 1)$ произвольное действительное числа, χ_q — характер Дирихле по модулю q (см.[24]), $\bar{\chi}_q$ — характер Дирихле по модулю q сопряжены с χ_q.

Положим $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}, \alpha = \frac{a}{q} + \eta, d = (q, D), N = \frac{gq}{d}(\mathrm{mod} q)$, (т.е. через N обозначен наименьший положительный вычет числа $\frac{gq}{d}$ по модулю q), здесь g определяется из сравнения

$gqd^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}d); H(q) = 1$, если $(qd^{-1}; D) = 1$; противном случае $H(q) = 0$ (см. [11,23]). Для удобства записи также обозначим

$$S_i = S_i(X;\alpha) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_p(l_i) \sum_{P<p\le X} \chi_D(p_i)(lnp_i)e(p_i\alpha), \quad i = 1,2 \tag{1.1}$$

$$g_u^{(i)} = g_u^{(i)}(X;\alpha) = \sum_{\substack{P<n_i\le X\\ n_i\equiv l(modD)}} n_i^{u-1}e(n_i\alpha), \quad i = 1,2 \tag{1.2}$$

где P достаточно большое действительное число, зависящее от X . При этих обозначениях, используя свойство характеров Дирихле [24,25], имеем

$$S = S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{P<p_1,p_2\le X} lnp_1lnp_2((p_1+p_2)\alpha) \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_1)\chi_D(p_1) \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_2)\chi_D(p_2) =$$

$$= \sum_{\substack{P<p_1,p_2\le X\\ p_1\equiv l_l,p_2\equiv l_2(modD)}} lnp_1lnp_2((p_1+p_2)\alpha) = \sum_{P<n\le 2X} R(n,D)e(n\alpha), \tag{1.3}$$

где

$$R(n,D) = \sum_{\substack{n=p_1+p_2\\ P<p_1,p_2\le X\\ p_1\equiv l_1,p_2\equiv l_2(\mathrm{mod}D)}} \ln p_1 \ln p_2. \tag{1.4}$$

Если $\frac{1}{2} \le u \le 1$, то используя суммирование по частям (см. лемма 3.5 работы [23]), получим

$$g_u^{(i)}(X;\alpha) \ll min\left(\alpha^{-u}, \left(\frac{X}{D}\right)^u\right), \tag{1.5}$$

где $\|\alpha\|$ — означает расстояние от α до ближайшего целого числа, т.е.

$$\|\alpha\| = \begin{cases} \alpha, \text{ если} 0 \le \alpha \le \frac{1}{2}, \\ 1-\alpha, \text{если} \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Полагая

$$P = X^{6\delta} \text{и} Q = XP^{-1}, \tag{1.6}$$

делим интервал $[0,1]$ на основные и дополнительные подинтервалы. Для $1 \le a \le q \le P$, $(a,q) = 1$ через $M(q,a)$ обозначим основной интервал $[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}]$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются, так как

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \ge \frac{1}{qq'} > \frac{2P}{qq'Q} \ge \frac{q+q'}{qq'Q} = \frac{1}{qQ} + \frac{1}{q'Q}.$$

Объединение основных интервалов обозначим через N . Далее, пусть T — множество тех α, для которых $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1}, \alpha \notin N$ Таким образом, T — объединение дополнительных интервалов. Теперь $R(n,D)$ можно представить в виде

$$R(n,D) = R_1(n,D) + R_2(n,D), \tag{1.7}$$

где

$$R_1(n,D) = \int_N S(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha, R_2(n,D) = \int_T S(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha.$$

При изучении $R(n, D)$ будем использовать следующее леммы.

Лемма 1.1 Пусть χ — характер Дирихле модуля $q \leq P$ и $L(s, \chi)$ — соотвествующие L — функции Дирихле, тогда:

а) функции $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$ в области:

$$1 - \frac{0,0019128}{lnP} \leq \sigma \leq 1, midt \mid \leq P^{\frac{19}{4}}, \tag{1.8}$$

могут иметь единственный вещественный нуль $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$ для одного вещественного примитивного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $\tilde{q} \leq P$; (если существует такой вещественный исключительный нуль, то положим $E_{\tilde{\beta}} = 1$, иначе положим $E_{\tilde{\beta}} = 0$).

б) если $L(s, \chi)$ имеет такой (исключительный) нуль, то область (1.8) можно заменить на область

$$\sigma > 1 - \frac{1}{81lnP} ln\left(\frac{1}{200\tilde{\delta}lnP}\right), \ |t| \leq P^{\varepsilon}, \ \tilde{\delta}lnP \leq \frac{1}{200e}; \tag{1.9}$$

в) этот исключительный нуль удовлетворяет неравенствам

$$\frac{0,4961}{\tilde{q}^{1/2}ln^2\tilde{q}} < 1 - \tilde{\beta} < \frac{0,3}{ln\tilde{q}}.$$

Доказательство леммы 1.1 имеется в работах [14,25,26,27].

Лемма 1.2 Пусть

$$\aleph = \frac{(1+16\delta)}{115}, \quad 0 < \delta < 0,01 \quad \text{и} \quad \exp(ln^{1/2}\mathrm{X}) \leqslant P \leqslant X^{\aleph}, XP^{-1} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}X,$$

тогда

$$\sum_{q \leqslant P} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{x \leqslant \frac{3}{2}X} \max_{h \leqslant \frac{1}{2}X} \left(h + \frac{X}{P}\right)^{-1} \left|\sum_{x-h}^{x}{}^{\#}\chi(p)lnp\right| < \begin{cases} c_2 \exp\left(-c_3 \frac{\ln X}{\ln P}\right), & E_{\tilde{\beta}} = 0; \\ c_4 \exp\left(-c_5 \frac{\ln X}{\ln P}\right)(1-\tilde{\beta})lnP, & E_{\tilde{\beta}} = 1, \end{cases}$$

где

$$\sum{}^{\#}\chi(p)lnp = \begin{cases} \sum\limits_{x-h}^{x} \mathrm{lnp} - \sum\limits_{x-h<n\leqslant x} 1, & \text{при} \quad q = 1, \\ \sum\limits_{x-h}^{x} \tilde{\chi}(p)\,\mathrm{lnp} + \sum\limits_{\substack{x-h<n\leqslant x \\ n>0}} n^{\tilde{\beta}-1}, & \text{при} \quad E_{\tilde{\beta}} = 1, \\ \sum\limits_{x-h}^{x} \chi(p)\,\mathrm{lnp}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 1.2 имеется в работах [13,14,28].

Лемма 1.3 [13]. Пусть χ_0— главный характер по модулю q, χ_i— примитивные характеры по модулю r_i, $i = 1, 2; r_3 = [r_1, r_2]$— наименьший общий кратный r_1 и r_2. Тогда для $m \neq 0$

$$\sum_{q} \frac{1}{\varphi^2(\mathrm{q})} \left|c_{\chi_1\chi_2\chi_0}(m)\tau(\tilde{\chi}_1\chi_0)\tau(\tilde{\chi}_2\chi_0)\right| \ll \frac{|m|}{\varphi(|m|)},$$

где суммирование ведется по всем q кратным r_1 и r_2.

§2. Дополнительные интервалы

Рассмотрим $R_2(n, D)$. В силу равенству (1.7) и тождества Парсеваля [29], имеем

$$\sum_{n} R_2^2(n, D) = \int_T |S(\alpha)|^2 d\alpha \leq (\max_T |S_1(\alpha)|)^2 \int_T |S_2(\alpha)|^2 d\alpha, \tag{2.1}$$

здесь

$$\int_T |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \leq \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} |S_2(\alpha)|^2 d\alpha \leq \sum_{P<p_1 p_2 \leq X} lnp_1 lnp_2 \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} e((p_1-p_2)\alpha)d\alpha \leq \sum_{P<p\leq X} ln^2 p.$$

Согласно, теореме 5.2.1 К.Прахара [27] при $X \geq 2$ и $D \leq X^{1/2}$, имеем

$$\sum_{\substack{p\leq X\\ p\equiv l(modD)}} lnp \ll \frac{X}{\varphi(D)}.$$

Поэтому

$$\int_T |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll (lnX) \sum_{\substack{P<p\leq X\\ p\equiv l(modD)}} lnp \ll \frac{X}{\varphi(D)} lnX. \tag{2.2}$$

Для того, чтобы оценить $\max\limits_{\alpha\in T} |S_1(\alpha)|^2$ будем использовать оценки, полученный в работе [16], согласно которым: если $R \leqslant q \leqslant \frac{X}{R}$ и $1 \leqslant R \leqslant X^{\frac{1}{3}}$, $(a,q)=1$, $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{2R}{qN}$, тогда

$$S(\alpha) \ll XDR^{-\frac{1}{2}} (\ln X)^{\frac{11}{2}}. \tag{2.3}$$

Согласно теореме Дирихле об аппроксимации существуют такие $q \leqslant Q$ и a с условием $1 \leqslant a \leqslant q$, $(a,q)=1$, для которых $\left|\alpha - aq^{-1}\right| \leqslant (qQ)^{-1}$. Это означает, что $\alpha \in M(q,a)$, если $q \leqslant P$. Значит для $\alpha \in T$ имеем $q > P$ и, следовательно, в (2.3) можем полагать $R = P$. Теперь из (2.1),(2.2),(2.3) следует

$$\sum_{n\leqslant X} R_2^2(n,D) \ll \frac{X^3 D^2}{P\varphi(D)} \ln^{12} X. \tag{2.4}$$

3. Упрощение интеграла по основным интервалам.

Согласно обозначению (1.1) имеем

$$S_i = S_i(X;\alpha) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{P<p\leqslant X} \chi_D(p_i)(lnp_i)\, e(p_i\alpha),\ \ i=1,2.$$

Так как $\alpha = \frac{a}{q} + \eta$ и если $p > P$ и $q \leqslant P$, то $(p,q)=1$. Отсюда следует, что

$$e(p\alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \chi_q(pa)\, \tau(\bar{\chi}_q)\, e(p\eta) \tag{3.1}$$

Используя (3.1) в (1.1), S_i можем написать в виде:

$$S_i = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{P<p_i\leqslant X} \chi_D(p_i)(\ln p_i) \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \chi_q(p_i a)\, \tau(\bar{\chi}_q)\, e(p\eta) \right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)} \sum_{\chi_D,\ \chi_q} \bar{\chi}_D(l_i) \sum_{h=1}^{q} \bar{\chi}_q(h)\, e\left(\frac{ah}{q}\right) \sum_{P<p_i\leqslant X} (lnp_i)\, \chi_D(p_i)\, \chi_q(p_i)\, e(p_i\eta). \tag{3.2}$$

Для удобство обозначим:

$$A_i=\frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\ \chi_q}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}_q(h)\,e\left(\frac{ah}{q}\right),$$

$$G_i=\sum_{P<p_i\leqslant X}(lnp_i)\,\chi_D(p_i)\,\chi_q(p_i)\,e(p_i\eta)\qquad i=1,2.$$

Рассмотрим G_i. Так как произведение характеров есть характер, ведущий модуль которого равняется наибольшему общему кратному модулей [10,26], то можем полагать

$$\chi_D(p_i)\,\chi_q(p_i)=\chi_m(p_i)\,,\ m=\frac{qD}{(q,D)}=\frac{qD}{d}.$$

Следовательно, $G_i=\sum\limits_{P\leqslant p_i\leqslant X}lnp_i\chi_m(p_i)\,e(p_i\eta)=G_i(\chi_m,\eta)$. Из (2.2) получим

$$S_i=A_iG_i(\chi_m,\eta)\,. \tag{3.3}$$

Применяя леммы 2.4 и 2.5 работы [11],при $Q'=D,\ Q''=q,\ Q=m$ находим $\chi_m=\chi_m^0$, тогда и только, когда

$$A_i=\frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\chi_d}\sum_{h=1}^{q}{}'\ \bar{\chi}_d(l_i)\,\chi_d(h)\,e\left(\frac{ha}{q}\right)=$$

$$=\frac{\varphi(d)}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\substack{h=1\\ h\equiv l_i\,(\mathrm{mod}\ d)}}^{q}{}'\ e\left(\frac{ha}{q}\right)=H(q)\,\frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi(D)\,\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}e\left(\frac{a}{q}N_1\ l_i\right)=L_i\quad i=1,2, \tag{3.4}$$

где $H(q)$ равен 1, если $\left(\frac{q}{d},D\right)=1$, иначе $H(q)$ равен 0. У нас $p>P$ обеспечивает, что $G_i(\chi_m,\eta)=G_i(\chi_m^*,\eta)$, где χ_m^*- примитивный характер по модулю m. Далее, положим,

$$G_i(\chi_m^o,\eta)=g_1^{(i)}(X,\eta)+W_i\left(\chi_m^0,\eta\right),\ \ G_i(\tilde{\chi}_m\chi_m^o,\eta)=g_{\tilde{\beta}}^{(i)}(X,\eta)+W_i(\tilde{\chi}_m\chi_m^o,\eta) \tag{3.5}$$

и $G_i(\chi_m,\eta)=W_i(\chi_m,\eta)$, если $\chi_m\neq\chi_m^0\ \ \chi_m\neq\tilde{\chi}_m\chi_m^0$, где χ_m^0-главный характер по модулю m, а $\tilde{\chi}_m$ — исключительный характер по модулю m, Сначала пусть не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда, используя (3.3) и (3.5) из (3.2), находим

$$S_i=H(q)\,\frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi(D)\,\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}e\left(\frac{a}{q}N\ l_i\right)\ \left(\ g_1^{(i)}(X,\eta)+W_i(\chi_m,\eta)\right).$$

Отсюда

$$S_1\cdot S_2=\ A_1A_2g_1^{(1)}(X,\eta)\ \ g_1^{(2)}(X,\eta)\ +A_1A_2g_1^{(1)}(X,\eta)\,W_2(\chi_m,\eta)+$$
$$+A_1A_2g_1^{(2)}(X,\eta)\,W_1(\chi_m,\eta)+\ A_1A_2W_1(\chi_m,\eta)\ \ W_2(\chi_m,\eta)\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{q\leqslant P}\ \sum_{a=1}^{q}{}'\ \int\limits_{M(q,a)}S_1S_2e(-n\alpha)\,d\alpha=\sum_{q\leqslant P}H(q)\,\frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\,\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)}\ \sum_{a=1}^{q}{}'\ \ e\left(\frac{a}{q}N_1\ (l_1+l_2)\right)\times$$

$$\times\int\limits_{M(q,a)}g_1^{(1)}(X,\eta)\,g_1^{(2)}(X,\eta)\,e(-n\alpha)\,d\alpha+$$

$$+\sum_{q\leqslant P}\ \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(1)}(X,\eta)\, W_2(\chi_m,\eta)\, e(-n\alpha)\, d\alpha +$$

$$+\sum_{q\leqslant P}\ \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(2)}(X,\eta)\, W_1(\chi_m,\eta)\, e(-n\alpha)\, d\alpha +$$

$$+\sum_{q\leqslant P}\ \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} A_1A_2 W_1(\chi_m,\eta)\ W_2(\chi_m,\eta)\, e(-n\alpha)\, d\alpha =$$

$$= M_1+M_2+M_3+M_4. \tag{3.6}$$

На правой части (3.6) второе и третье (M_2 и M_3) слагаемые оценивается одинаково. Рассмотрим M_2. Имеем $\alpha=\frac{a}{q}+\eta$ и

$$M_2=\sum_{q\leqslant P}\ \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(1)}(X,\eta)\, W_2(\chi_m,\eta)\, e(-n\alpha)\, d\alpha =$$

$$=\sum_{q\leqslant P}\frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\,\varphi\left(\frac{q}{d}\right)\varphi(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{\chi_m}\chi_m(l_2)\, e\left(\frac{a}{q}N\ l_1-n\right)\tau(\bar\chi_m)\times$$

$$\times\int\limits_{M(q,a)} g_1^{(1)}(X,\eta)\, W_2(\chi_m,\eta)\ e(n\eta)\, d\eta \ll \sum_{m\leqslant PD}\frac{1}{\varphi^2(m)}\ C_\chi\ (Nl_1-n)\,\tau\ (\bar\chi_m)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\left|g_1^{(1)}(X,\eta)\right|^2 d\eta\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\left|W_2(\chi_m,\eta)\right|^2 d\eta\right)^{\frac12}.$$

Используя оценку (см. лемма 3.5, [23])

$$g_u^{(i)}\ (X,\alpha)\leqslant\min\left(\alpha^{-u},\left(\frac{X}{D}\right)^u\right) \tag{3.7}$$

и лемму 1.3, получим

$$M_2\ \ll\ \left(\frac{X}{D}\right)^{\frac12}\ \frac{|Nl_1-n|}{\varphi(|Nl_1-n|)}\ W_2. \tag{3.8}$$

Аналогично для M_3, имеем

$$M_3\ \ll\ \left(\frac{X}{D}\right)^{\frac12}\ \frac{|Nl_2-n|}{\varphi(|Nl_2-n|)}\ W_1. \tag{3.9}$$

Теперь рассмотрим M_4. В силу (3.6) имеем

$$M_4=\sum_{q\leqslant P}\ \sum_{a=1}^{q}{}'\ \int\limits_{M(q,a)}\frac{1}{\varphi^2(D)\,\varphi^2(q)}\left(\sum_{X_D,\ X_q}\bar\chi_D(l_1)\sum_{h_1=1}^{q}\bar\chi_q(h_1)\, e\left(\frac{ah_1}{q}\right)\right)\times$$

$$\times \sum_{\chi_D,\ \chi_q} \bar{\chi}_D\left(l_2\right) \sum_{h_2=1}^{q} \bar{\chi}_q\left(h_2\right) e\left(\frac{a h_2}{q}\right)\ W_1\left(\chi_m, \eta\right)\ W_2\left(\chi_m, \eta\right) e\left(-n\eta\right) d\eta \ll$$

$$\ll \sum_{m \leqslant PD} \frac{1}{\varphi^2\left(m\right)}\ \left|C_{\chi_m\, \chi'_m}\ \left(\left|-n+l_1+l_2\right|\right) \tau\left(\bar{\chi}_m\right) \tau\left(\bar{\chi}'_m\right)\right|\ \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} W_1\left(\chi_m, \eta\right) W_2\left(\chi_m, \eta\right) e\left(-n\eta\right) d\eta\ \ll \frac{\left|-n+l_1+l_2\right|}{\varphi\left(\ \left|-n+l_1+l_2\right|\right)}\ W_1 W_2,$$

где

$$W_i = \sum_{m \leqslant PD} \sum_{\chi_m} W_i\left(\chi_m\right), \qquad W_i\left(\chi_m\right) = \left(\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ} \left|W_i\left(\chi_m, \eta\right)\right|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}},\ \ i=1,2.$$

Таким образом, из (3.6), получим

$$R_1\left(n, D\right) =\ M_1 + O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left|n - N l_2\right|}{\varphi\left(\left|n - N l_2\right|\right)}\ W_1\right) +\ O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left|n - N l_1\right|}{\varphi\left(\left|n - N l_1\right|\right)}\ W_2\right) +$$

$$+ O\left(\frac{\left|n - l_1 - l_2\right|}{\varphi\left(\left|n - l_1 - l_2\right|\right)}\ W_1 W_2\right). \tag{3.10}$$

Теперь рассмотрим M_1. Согласно (3.6), имеем

$$M_1 = \sum_{q\ \leqslant\ P} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2\left(D\right) \varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} \quad {\sum_{a=1}^{q}}' \ e\left(\frac{a}{q} N\ \left(l_1 + l_2\right) - n\right) \int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ} g_1^{(1)}\left(X, \eta\right) g_1^{(2)}\left(X, \eta\right) e\left(-n\eta\right) d\eta.$$

В силу (2.7)

$$\int\limits_{1/qQ}^{1/2} \left|g_i^{(i)}\left(X, \eta\right)\right|^2\ d\eta\ \ll\ \int\limits_{\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{2}} \eta^{-2}\ d\eta\ \ll qQ.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{1} g_1^{(1)}\left(X, \eta\right) g_1^{(2)}\left(X, \eta\right) e\left(-n\eta\right) d\eta = n + O\ \left(qQ\right).$$

Поэтому

$$M_1 =\ \sum_{q \leqslant P} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2\left(D\right) \varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)}\ C_q\ \left(\ \left|N(l_1 + l_2) - n\right|\right) \left(n + O\left(qQ\right)\right). \tag{3.11}$$

Оценим остаточный член в (3.11), используя равенство

$$C_q\left(n\right) = \mu\ \left(q_1\right) \frac{\varphi\left(q\right)}{\varphi\ \left(q_1\right)},$$

где $q_1 = \frac{q}{(q, |n - N(l_1+l_2)|)}$, находим

$$\ll Q \sum_{q \leqslant P} q \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2\left(D\right) \varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)}\ C_q\left(\left|N\ \left(l_1 + l_2 - n\right|\right)\ \ll Q \sum_{q \leqslant P} q \frac{\varphi\ \left(q\right)}{\varphi^2\left(\frac{Dq}{d}\right) \varphi\left(q_1\right)} \ll X^{1+\delta} P^{-1}.$$

Главный член в (3.11) можно написать как сумму по всем $q \geq 1$ в виде (см.[13,14])

$$\left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\varphi^2(\frac{q}{d})} C_q(|N(l_1+l_2)-n| - \sum_{q>P}^{\infty} \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)\cdot}{\varphi^2(D)\varphi^2(\frac{q}{d})} C_q(|N(l_1+l_2)-n|)\right)$$

$$(n + O\left(qQ\right)) = n\ \frac{D}{\varphi\left(D\right)} \sum_{\substack{s=1\\(s,Dn)=1}}^{\infty} \frac{\mu\left(s\right)}{\varphi^2\left(s\right)} \sum_{\substack{t \setminus n\\(t,D)=1}} \frac{\mu^2\left(t\right)}{\varphi\left(t\right)} + O\left(X^{1+\delta}P^{-1}(lnlnP)^2 lnX\right) =$$

$$= n\ \sigma\left(n\right) + O\left(\frac{X^{1+\delta}}{P\,\varphi(D)}\right), \tag{3.12}$$

где

$$\sigma\left(n\right) = \frac{D}{\varphi\left(D\right)} \sum_{\substack{s=1\\(s,Dn)=1}}^{\infty} \frac{\mu\left(s\right)}{\varphi^2\left(s\right)} \sum_{\substack{t \setminus n\\(t,D)=1}} \frac{\mu^2\left(t\right)}{\varphi\left(t\right)}. \tag{3.13}$$

Для четного n согласно (7.2) работы [11] имеем

$$\sigma\left(n\right) = \frac{D}{\varphi\left(D\right)} \prod_{\substack{p \nmid Dn\\p>2}} \left(1 - \frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right) \prod_{\substack{p \setminus n\\p \nmid D}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) =$$

$$= \lambda\ \frac{D}{\varphi\left(D\right)} \prod_{p>2} \frac{p\left(p-1\right)}{\left(p-1\right)^2} \prod_{\substack{p \setminus D\\p>2}} \frac{\left(p-1\right)^2}{p\left(p-2\right)} \prod_{\substack{p \setminus n\\p \nmid D}} \frac{p-1}{p-2}, \tag{3.14}$$

где $\lambda = 1$, если D четное; при D нечетном $\lambda = 2$. Отсюда (см. [11])

$$\sigma\left(n\right) \gg \frac{D}{\varphi\left(D\right)} \cdot \frac{n}{\varphi(n)}. \tag{3.15}$$

Таким образом, в расматрываемым случае, учытивая (3.12) из (3.10), находим

$$R_1\left(n,D\right) = n\ \sigma\left(n\right) + O\left(\frac{X^{1+\delta}}{P\,\varphi(D)}\right) + O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|n-Nl_2|}{\varphi\left(|n-Nl_2|\right)}\ W_1\right) +$$

$$+O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|n-Nl_1|}{\varphi\left(|n-Nl_1|\right)}\ W_2\right) + O\left(\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)}\ W_1W_2\right). \tag{3.16}$$

Теперь предположим, что пусть существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда в правой части (3.6) дополнительно появляется ещё пять членов, т.е. в месте (3.6) получим

$$\sum_{q\leqslant P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} S_1S_2 e\left(-n\alpha\right)d\alpha = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5,$$

где

$$E_1 = \sum_{q\leqslant P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(1)}\left(X,\eta\right) g_{\tilde{\beta}}^{(2)}\left(X,\eta\right) e\left(-\frac{an}{q} - n\eta\right) d\eta\ ,$$

$$E_2=\sum_{q\leqslant P}\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}\int\limits_{M(q,a)}A_1A_2g^{(1)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\,g^{(2)}_1(X,\eta)\,e\left(-\frac{an}{q}-n\eta\right)d\eta,$$

$$E_3=\sum_{q\leqslant P}\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}\int\limits_{M(q,a)}A_1A_2g^{(1)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\,g^{(2)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\,e\left(-\frac{an}{q}-n\eta\right)d\eta,$$

$$E_4=\sum_{q\leqslant P}\quad\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}\int\limits_{M(q,a)}A_1A_2g^{(1)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\,W_2(\chi_m,\eta)\,e\left(-\frac{an}{q}-n\eta\right)d\eta,$$

$$E_5=\sum_{q\leqslant P}\quad\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}\int\limits_{M(q,a)}A_1A_2g^{(2)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\,W_1(\chi_m,\eta)\,e\left(-\frac{an}{q}-n\eta\right)d\eta.$$

Ясно, что E_1, E_2 и E_4, E_5 оцениваются одинаково. Согласно лемме 5.4 работы [11] имеем, если существует исключительный характер по модулю $m=qDd^{-1}$, то $A_i(\chi_D,\chi_q,q,a)=$ $=\frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\tilde\chi_m(al_i)\tau(\tilde\chi_m)$. Поэтому

$$E_4=\frac{1}{\varphi^2(D)}\sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde r\backslash q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi_m}C_{\tilde\chi\chi_0}(|n-(l_1+l_2)|)\tau(\bar\chi_m)\tau(\tilde\chi_m\chi_0)\times$$

$$\times\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}g^{(1)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\,W_2(\chi_m,\eta)\,e(-n\eta)\,d\eta\ll$$

$$\ll\frac{1}{\varphi^2(D)}\sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde r\backslash q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}\,\mu(q)\tau(\tilde\chi_m\chi_0)C_{\tilde\chi_m\chi_0}(|(l_1+l_2)-n|)\left(\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\left|g^{(1)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\right|^2d\eta\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}|W_2(\chi_m,\eta)|^2d\eta)^{1/2}\ll$$

$$\ll\frac{1}{\varphi^2(D)}\sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde r\backslash q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}\,\mu(q)\tau(\tilde\chi_m\chi_m^0)C_{\tilde\chi_m\chi_m^0}(|-n+(l_1+l_2)|)X^{1/2}W_2(\chi_m)\ll$$

$$\ll\frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)}\sum_{q\leqslant P}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\,\tau(\tilde\chi_m\chi_m^0)C_{\tilde\chi_m\chi_m^0}(|-n+l_1+l_2|)\,W_2(\chi_m)\ll$$

$$\ll\frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)}\;\frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi(|l_1+l_2-n|)}W_2(\chi_m).$$

Так как,

$$\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\left|g^{(1)}_{\tilde\beta}(X,\eta)\right|^2d\eta\ll\int\limits_0^1\sum_{P<n_1\leqslant X}n_1^{\tilde\beta-1}e(n_1\eta)\sum_{P<n_2\leqslant X}n_2^{\tilde\beta-1}e(-n_2\eta)d\eta=$$

$$= \sum_{P<n_1,n_2\leqslant X} n_1^{\tilde{\beta}-1} n_2^{\tilde{\beta}-1} \int\limits_0^1 e(n_1-n_2)\eta d\eta = \sum_{P<n\leqslant X} n^{2(\tilde{\beta}-1)} \leqslant X. \tag{3.17}$$

Так, что, согласно лемме 1.3, будем иметь

$$E_4+E_5 \ll \frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)} \frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi\left(|l_1+l_2-n|\right)} W_2(\chi_m).$$

Теперь будем исследовать E_1 и E_2. Имеем

$$E_1+E_2 = 2\left|\sum_{q\leqslant P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(1)}(X,\eta)\, g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(\chi_m,\eta)\, e\left(-\frac{an}{q}-n\eta\right) d\eta\right| \ll$$

$$\ll \frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m\chi_m^0) C_{\tilde{\chi}_m\chi_m^0}\left(|-n+l_1+l_2|\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_1^{(1)}(X,\eta)\, g_{\tilde{\beta}}^{(1)}(X,\eta)\, e\left(-n\eta\right) d\eta. \tag{3.18}$$

В силу (3.7) $g_1^{(1)}\ (X,\eta) \ll \|\eta\|^{-1}$ и $g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X,\eta) \ll \|\eta\|^{-\tilde{\beta}}$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_1^{(1)}(X,\eta)\, g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X,\eta)\, e\left(-n\eta\right) d\eta \ll \int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{2}} \eta^{-1-\tilde{\beta}} d\eta \ll qQ$$

и

$$\int\limits_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} g_1^{(1)}(X,\eta)\, g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X,\eta)\, e\left(-n\eta\right) d\eta \ll \int\limits_0^1 g_1^{(1)}(X,\eta)\, g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X,\eta)\, e\left(-n\eta\right) d\eta + O(qQ) =$$

$$= \tilde{J}(n) + O(qQ),$$

где

$$\tilde{J}(n) = \int\limits_0^1 g_1^{(1)}(X,\eta)\, g_{\tilde{\beta}}^{(2)}(X,\eta)\, e\left(-n\eta\right) d\eta = \int\limits_0^1 \sum_{P<n_1\leqslant X} e(n_1\eta) \sum_{P<n_2\leqslant X} n_2^{\tilde{\beta}-1} e(n_2\eta) e\left(-n\eta\right) d\eta =$$

$$= \sum_{P<n_1,n_2\leqslant X} n_2^{\tilde{\beta}-1} \int\limits_0^1 e((n_1+n_2-n)\eta) d\eta = \sum_{n=n_1+n_2,\ \ P<n_1+n_2\leqslant X} n_2^{\tilde{\beta}-1}\,. \tag{3.19}$$

Теперь из (3.18) получим

$$E_1+E_2 = \frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m\chi_m^0) C_{\tilde{\chi}_m\chi_m^0}\left(|-n+l_1+l_2|\right) (\tilde{J}(n) + O(qQ)). \tag{3.20}$$

Аналогично для E_3 находим

$$E_3 = \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{\tau^2(\tilde{\chi}_m\chi_0)}{\varphi^2(q)} C_q(-n)(\tilde{I}(n) + O(qQ)),$$

где

$$\tilde{I}(n) = \int\limits_0^1 g^{(1)}_{\tilde{\beta}}(X,\eta)\, g^{(2)}_{\tilde{\beta}}(X,\eta)\, e(-n\eta)d\eta + O(qQ). \tag{3.21}$$

Очевидно, что

$$\left|\tilde{J}(n)\right| \leqslant X \quad \text{и} \left|\tilde{I}(n)\right| \leqslant X. \tag{3.22}$$

Обозначая через R_4 остаток в (3,20) оценим его. Согласно лемме 2.4 [13]

$$R_4 = \frac{Q}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{q\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}\chi_0) C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(|l_1+l_2-n|\right) \ll$$

$$\ll \frac{Q\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{q\mu(q)}{\varphi(q)}\, \mu\left(\frac{\frac{q}{(q,|n-l_1-l_2|)}}{\tilde{r}}\right) \varphi^{-1}\left(\frac{q}{(q,n)}\right).$$

Для оценки суммы стоящей на правой части последнего соотношения будем использовать оценку приведенную в работе [14] (см. $(2.2\tilde{1})$), тогда получим:

$$R_4 \ll \frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)} P^{-1}\left(|n-l_1-l_2|, r\right)(\ln\ln X)(lnlnP)^4 \ln P \leqslant$$

$$\ll \frac{1}{\varphi^2(D)} X^{1+\delta} P^{-1}\left(|n-l_1-l_2|, \tilde{r}\right),$$

где $\left(|n-l_1-l_2|, \tilde{r}\right)$ НОД чисел $n-l_1-l_2$ и $\tilde{r}$. Аналогичное оценка справедлива и для остатка в (3.20), которое обозначим через R_5, т.е.

$$R_5 \ll \frac{1}{\varphi^2(D)} X^{1+\delta} P^{-1}\left(|n-l_1-l_2|, \tilde{r}\right).$$

Теперь распространим суммирование в оставшихся членах в равенствах (3.20) и (3.21) на все $q \geqslant 1$, это внесет дополнительные погрешности R_6 и R_7, где

$$R_6 = \frac{1}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\geqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{\tau^2(\tilde{\chi}_m\chi_0)}{\varphi^2(q)} C_q\left(|-n+l_1+l_2|\right)\tilde{I}(n),$$

$$R_7 = \frac{2}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\geqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \tau(\tilde{\chi}_m\chi_0) C_{\tilde{\chi}_m\chi_0}\left(|n-l_1-l_2|\right)\tilde{J}(n).$$

Для R_6 имеем:

$$R_6 \leqslant \frac{X\tilde{r}}{\varphi^2(D)} \sum_{\substack{q\leqslant P\\ \tilde{r}\backslash q}} \mu\left(\frac{\frac{q}{(q,|n-l_1-l_2|)}}{\tilde{r}}\right)\varphi^{-1}(q)\varphi\left(\frac{q}{(q,|n-l_1-l_2|)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X\tilde{r}}{\varphi^2(D)}\frac{\tilde{r}}{\varphi(\tilde{r})}\,\varphi^{-1}\left(\frac{\tilde{r}}{(|n-l_1-l_2|\,,\tilde{r})}\right)\sum_{\substack{l>\mathrm{P}\,\tilde{r}^{-1}\\ \tilde{r}\backslash q}}\varphi^{-1}(l)\varphi^{-1}\left(\frac{l}{(|n-l_1-l_2|\,,l)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{X\tilde{r}}{\varphi^2(D)}\frac{\tilde{r}}{\varphi(\tilde{r})}\,\varphi^{-1}\left(\frac{\tilde{r}}{(|n-l_1-l_2|\,,\tilde{r})}\right)\sum_{d\backslash n}\varphi^{-1}(d)\sum_{k}>\mathrm{P}\,/\tilde{r}d\frac{1}{\varphi^2(k)}\ll$$

$$\ll \frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)}P^{-1}\left(|n-l_1-l_2|\,,r\right)(\ln\ln X)(\ln\ln P)^4\ll\frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)}P^{-1}\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde{r}\right).$$

Аналогично,

$$R_7\leqslant\frac{2X\tilde{r}}{\varphi^2(D)}\sum_{\substack{q>P\\ \tilde{r}\backslash q}}\left|\mu(q)\mu\left(\frac{\frac{q}{(q,|n-l_1-l_2|)}}{\tilde{r}}\right)\varphi^{-1}(q)\varphi^{-1}\left(\frac{q}{(q,|n-l_1-l_2|)}\right)\right|\ll$$

$$\ll\frac{X^{1+\delta}}{\varphi^2(D)}P^{-1}\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde{r}\right).$$

В силу лемм 2.1 и 2.2 [11], первая бесконечная сумма в (3.19) есть

$$\tilde{\sigma}(n)=\frac{1}{\varphi^2(D)}\sum_{\substack{q=1\\ \tilde{r}\backslash q}}^{\infty}\tau^2(\tilde{\chi}_m\chi_0)C_q\left(|-n+l_1+l_2|\right)\varphi^{-2}(q)=$$

$$=\frac{D}{\varphi^2(D)}\tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{r}}{(\tilde{r},n)}\right)\frac{\tilde{r}}{\varphi(\tilde{r})}\frac{1}{\varphi\left(\frac{\tilde{r}}{(|n-l_1-l_2|,\tilde{r})}\right)}\times$$

$$\times\prod_{\substack{p\backslash\tilde{r}\\ p\backslash nD}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\backslash\tilde{r}\\ p\backslash D,p>2}}\left(1+\frac{1}{(p-1)}\right).\tag{3.23}$$

А для второй суммы справедлива оценка

$$\frac{2}{\varphi^2(D)}\sum_{\substack{q=1\\ \tilde{r}\backslash q}}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\,\tau(\tilde{\chi}_m\chi_0)C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(|-n+l_1+l_2|\right)\leqslant\frac{3}{2}\tilde{\chi}^2(n)\tilde{r}\varphi^{-2}(\tilde{r})\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)}.$$

Таким образом, собирая все оценки, в случае $E_{\tilde{\beta}}=1$ имеем

$$R_1(n,D)=\sigma(n)n+\tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n)+\frac{3}{2}\tilde{\chi}^2(n)\frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})}\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)}\frac{X}{D}+$$

$$O\left(X^{1+\delta}P^{-1}\frac{1}{\varphi^2(D)}\right)+O\left(X^{1+\delta}P^{-1}\frac{1}{\varphi^2(D)}\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde{r}\right)\right)+O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{1/2}\frac{|n-Nl_2|}{\varphi\left(|n-Nl_2|\right)}W_1\right)+$$

$$+O\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{1/2}\frac{|n-Nl_1|}{\varphi(|n-Nl_1|)}W_2\right)+O\left(\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi(|n-l_1-l_2|)}W_1W_2\right)+$$

$$+O\left(\frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)}\frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi\left(|l_1+l_2-n|\right)}W_2\right)+O\left(\frac{X^{1/2}}{\varphi^2(D)}\frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi\left(|l_1+l_2-n|\right)}W_1\right).\tag{3.24}$$

4. Оценка исключительного множества

Данной параграф посвящен доказательству теоремы 1. Понятно, что, если докажем $R(n,D) > 0$, то это означает, что для данного n существует представление в виде (0.2). В силу (1.7)

$$R(n,D) = R_1(n,D) + R_2(n,D) \tag{4.1}$$

и

$$R(n,D) > R_1(n,D) - R_2(n,D).$$

Покажем, что

$$R_1(n,D) > |R_2(n,D)|$$

для всех четных n из интервала $\frac{X}{2} < n \leqslant X$, за исключением самого большого $\frac{X^{1-\delta}}{\varphi(D)}$ значения n из них. В силу (2.4) имеем $\sum\limits_{n\leqslant X n\equiv l(\mathrm{mod}\,D)} R_2^2(n,D) \ll \frac{X^3D^2}{\varphi(D)\,P}\ln^{12}N$. Отсюда следует, что количество, $n \leqslant X, n \equiv l(\mathrm{mod}\,D)$, для которого

$$R_2(n,D) > DX/P^{1/3}; \tag{4.2}$$

не превосходит

$$\ll \frac{X}{\varphi(D)\ P^{1/3}}\ln^{12}X < \frac{X^{1-\delta}}{\varphi(D)}. \tag{4.3}$$

Исключаем такие n, для которых выполняется неравенство (4.2). Тогда для остальных $n \leqslant X$, $n \equiv l(modD)$ выполняется неравенство

$$R_2(n,D) \leqslant DX/P^{1/3}\ . \tag{4.4}$$

Количество исключаемых $n, n \leqslant X$, $n \equiv l(modD)$ не более чем $X^{1-\delta}/\varphi(D)$. Сначала предположим, что $E_{\tilde{\beta}} = 0$. Тогда из (3.10) и леммы 1.2 (см. также [23]) получим

$$R_1(n,D) > n\sigma(n) - c_1\frac{X^{1+\delta}}{\varphi(D)\,P} - c_2\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}\exp\left(-\frac{c_3}{6\delta}\right) - c_4\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}\exp\left(-\frac{c_3}{3\delta}\right).$$

Так как согласно (3.14),

$$\sigma(n) \gg \frac{n}{\varphi(n)}\cdot\frac{D}{\varphi(D)}, \tag{4.5}$$

то, отсюда следует

$$\begin{gathered}R_1(n,D) > c_5\frac{n}{\varphi(n)}\cdot\frac{D}{\varphi(D)}\cdot\frac{X}{2} - c_1\frac{X^{1+\delta}}{\varphi(D)\,P} - c_2\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}\exp\left(-\frac{c_3}{6\delta}\right) - \\ -c_4\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}\exp\left(-\frac{c_3}{3\delta}\right) > \frac{n}{\varphi(n)}\cdot\frac{D}{\varphi(D)}X\left(c_6 - c_1\frac{X^{\delta}}{\varphi(D)P}\cdot\frac{\varphi(n)}{n}\cdot\frac{\varphi(D)}{D} - \right. \\ \left. -_2\frac{1}{D}\cdot\frac{D}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{c_3}{6\delta}\right) - c_4\frac{1}{D}\exp\left(-\frac{c_3}{3\delta}\right)\frac{D}{\varphi(D)}\right) \geqslant \frac{nD}{\varphi(n)\varphi(D)}X \gg X,\end{gathered} \tag{4.6}$$

для любого $\frac{X}{2} < n \leqslant X$, $n \equiv l(\mathrm{mod}\,D)$, при достаточно малом $\delta > 0$. В случае $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $\tilde{r} \not\backslash m$, оценка (4.6) остается в силе. Пусть $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $\tilde{r}\backslash m$. Тогда из (3.24) и леммы 1.2 получим

$$R_1(n,D) > n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) + \frac{3}{2}\tilde{\chi}_{\tilde{r}}^2(n)\frac{\tilde{r}}{\varphi^2(\tilde{r})}\cdot\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)} -$$

$$-c_7\frac{X^{1+\delta}}{P\varphi(D)}-c_8\frac{X^{1+\delta}}{P\varphi^2(D)}\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde r\right)-c_9\frac{X}{D}\frac{|n-Nl_2|}{\varphi\left(|n-Nl_2|\right)}(1-\tilde\beta)\ln Pexp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)-$$
$$-c_{11}\frac{X}{D}(1-\tilde\beta)\ln Pexp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)\frac{|n-Nl_1|}{\varphi(|n-Nl_1|)}-c_{12}\frac{X}{D}\frac{|l_1+l_2-n|}{\varphi\left(|l_1+l_2-n|\right)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{c_{10}}{3\delta}\right)(1-\tilde\beta)^2ln^2P-c_{13}\frac{X}{D^{1/2}\varphi^2(D)}\cdot\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)}\exp\left(-\frac{c_{14}}{6\delta}\right)(1-\tilde\beta)\ln P-$$
$$-c_{15}\frac{X}{D^{1/2}\varphi^2(D)}\cdot\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)}\exp\left(-\frac{c_{16}}{6\delta}\right)\geqslant$$
$$\geqslant n\sigma(n)+\tilde\sigma(n)\tilde I(n)+\frac{3}{2}\tilde\chi^2_{\tilde r}(n-l_1-l_2)\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}\cdot\frac{|n-l_1-l_2|}{\varphi\left(|n-l_1-l_2|\right)}\frac{X}{D}-$$
$$-c_7\frac{X^{1+\delta}}{P\varphi(D)}-c_8\frac{X^{1+\delta}}{P\varphi^2(D)}\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde r\right)-\left(c_{17}\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}+c_{18}\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\, exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)(1-\tilde\beta)\ln P\right)(1-\tilde\beta)\ln Pexp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right). \tag{4.7}$$

Если $\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde r\right)=1$, из (3.23) следует, что

$$\tilde\sigma(n)\leqslant\frac{D}{\varphi^2(D)}\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}\frac{n}{\varphi(n)}\prod_{\substack{p\not|\tilde r\\ p\not|nD}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\ll\frac{D}{\varphi^2(D)}\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}\frac{n}{\varphi(n)}. \tag{4.8}$$

Поэтому, учитывая (4.5) и (4.8), из (4.7) находим

$$R_1(n,D)>c_{19}n\cdot\frac{n}{\varphi(n)}\cdot\frac{D}{\varphi(D)}-c_{20}\frac{D}{\varphi^2(D)}\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}\frac{n}{\varphi(n)}\tilde I(n)-c_{21}\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}\frac{n}{\varphi(n)}\frac{X}{D}-$$
$$-c_{22}\frac{X^{1+\delta}}{P\varphi(D)}-\left(c_{17}\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}+c_{18}\frac{X}{D}\frac{n}{\varphi(n)}exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)\right)c_{22}exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right). \tag{4.9}$$

Отсюда при $\frac{X}{2}<n\leqslant X$, $n\equiv l(\operatorname{mod}D)$, имеем

$$R_1(n,D)>\frac{D}{\varphi(D)}\frac{n}{\varphi(n)}\cdot X\left(c_{23}-c_{24}\frac{1}{\varphi^2(D)}\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}-c_{21}\frac{\tilde r}{\varphi^2(\tilde r)}\frac{1}{D}\frac{\varphi(D)}{D}-c_{22}\frac{X^\delta\varphi(n)}{D\,nP}-\right.$$
$$\left.-\left(c_{17}\frac{\varphi(D)}{D}+c_{18}\frac{\varphi(D)}{D}exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)c_{22}exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)\right)\right)\gg$$
$$\gg\frac{n}{\varphi(n)}\cdot\frac{D}{\varphi(D)}X\gg X, \tag{4.10}$$

так как в силу леммы 1.1c, имеем $\tilde r\gg\ln P$. Если $\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde r\right)>1$, то третий член в (4.7) обращается нуль, однако пятый член (за счёт множителя $\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde r\right)$) может быть большим. В связи с этим отбросим те четные n, $n\leqslant X$, $n\equiv l(\operatorname{mod}D)$, для которых $\left(|n-l_1-l_2|\,,\tilde r\right)>P^{1/2}$. Тогда для оставшихся n этот остаточный член не больше чем

$$\ll\frac{X^{1+\delta}}{P\varphi^2(D)}\cdot P^{1/2}\ll\frac{X^{1+\delta}}{P^{1/2}\varphi^2(D)}. \tag{4.11}$$

Кроме того число отброшенных n есть

$$\sum_{\substack{d\backslash\tilde r\\ d>P^{1/2}}}\quad\sum_{\substack{d\backslash|n-l_1-l_2|\\ n\leqslant X,\,n\equiv l(\operatorname{mod}D)}}1\leqslant\sum_{\substack{d\backslash\tilde r\\ d>P^{1/2}}}\frac{X}{DP^{1/2}}\leqslant\frac{X}{DP^{1/2}}d(\tilde r)\ll\frac{X}{DP^{1/2-\delta}}, \tag{4.12}$$

так как $d(\tilde{r}) \ll \tilde{r}^{\delta}$, при любом $\delta > 0$. Остаётся рассмотреть такие n, $\frac{X}{2} < n \leqslant X$, $n \equiv l(\mathrm{mod}\, D)$, $1 < (|n - l_1 - l_2|\, , \tilde{r}) \leqslant P^{1/2}$.

Так как

$$|\tilde{\sigma}(n)| \leqslant \sigma(n) \prod_{\substack{p \setminus \tilde{r} \\ p \not\setminus nD \\ p > 3}} (p-2)^{-1} \tag{4.13}$$

то, при условии, что произведение в (4.13) не пустое, то из (4.10) имеем

$$R_1(n, D) > X \cdot \frac{n}{\varphi(n)} \frac{D}{\varphi(D)} \left(c_{19} - \frac{1}{3} c_{19} - {}_7 \frac{X^{\delta}}{P\varphi(D)} \cdot \frac{\varphi(D)}{D} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} - \right.$$

$$\left. -{}_8 \frac{X^{\delta}}{P^{1/2}\varphi(D)} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} \right) - \left(c_{17} + c_{18} exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)\right) c_{22} exp\left(-\frac{c_{10}}{6\delta}\right)\Bigg) \gg$$

$$\gg X \cdot \frac{nD}{\varphi(n)\varphi(D)} \gg X. \tag{4.14}$$

Если произведение пустое, то согласно лемме 2.1 работы [13] $(|n - l_1 - l_2|\, , \tilde{r}) > \frac{\tilde{r}}{24}$ и так как рассматриваемые n удовлетворяют условию $(n, \tilde{r}) \leqslant P^{1/2}$, то

$$\tilde{r} \leqslant 24 P^{1/2}. \tag{4.15}$$

Имеем

$$n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) \geqslant n\sigma(n) - \tilde{\sigma}(n) \left|\tilde{I}(n)\right|. \tag{4.16}$$

Здесь

$$\tilde{I}(n) = \sum_{P<k<n-P} (k(n-k))^{\tilde{\beta}-1} \leqslant n \cdot n^{\tilde{\beta}-1} = n^{\tilde{\beta}}.$$

Применяя формулу Лагранжа о конечном приращении, находим

$$n - n^{\tilde{\beta}} = (1-\tilde{\beta})\, n^{\theta} \log n \geqslant (1-\tilde{\beta})\, n^{\tilde{\beta}} \log n = (1-\tilde{\beta})\, n (\log n) n^{\tilde{\beta}-1}.$$

Из леммы 1.1c и (4.15) следует, что

$$1 - \tilde{\beta} \gg \tilde{r}^{-1/2} log^{-2} \tilde{r} \geqslant P^{-1/4} log^{-2} P. \tag{4.17}$$

Следовательно,

$$n - n^{\tilde{\beta}} = (1-\tilde{\beta})\, n (\log n) \exp\left((\tilde{\beta} - 1) log n\right) \geqslant (1-\tilde{\beta})\, n (\log n) \exp\left(-\frac{23}{3\delta}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\tilde{\beta})\, n \left(\log \frac{X}{2}\right) \exp\left(-\frac{23}{3\delta}\right) > c_{24}(1-\tilde{\beta}) n \log P.$$

Используя это неравенство в (4.16), получим

$$n\sigma(n) + \tilde{\sigma}(n)\tilde{I}(n) \geqslant \sigma(n) \left(n - n^{\tilde{\beta}}\right) \gg \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{D}{\varphi(D)} (1-\tilde{\beta}) n \log P \gg$$

$$\gg \frac{n}{\varphi(n)} \cdot \frac{DX}{\varphi(D)} (1-\tilde{\beta}) \ln P. \tag{4.18}$$

Последний остаточный член в (4.7) при достаточно X и достаточно малом $\delta > 0$ будет меньше чем половина правой части (4.18). Поэтому

$$R_1(n, D) \geqslant c_{26} (1-\tilde{\beta}) \frac{X}{D} n \varphi^{-1}(n) \ln P - c_{27} \frac{X^{1+\delta}}{P^{1/2} \varphi^2(D)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{X}{DP^{1/4}\ln P}\left(c_{28}-c_{29}\frac{X^{\delta}\ln P}{P^{1/4}\varphi^2(D)}\right) \gg \frac{X}{DP^{1/4}\ln P}\left(c_{28}-c_{29}\frac{X^{\delta}(6\delta)\ln P}{X^{3\delta/2}\varphi^2(D)}\right) \gg$$

$$\gg \frac{X}{DP^{1/4}\ln P} > \frac{DX}{P^{1/3}}. \tag{4.19}$$

Далее, пусть $E^*(D,X)-$ количество четных чисел $X/2 < n \leq X$, непредставимых суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии. Тогда из (4.1),(4.3), (4.4), (4.6),(4.10), (4.14) и (4.19) следует утверждение

$$E^*(D,X) \leqslant c_8^{(1)} X^{1-\delta}\varphi^{-1}(D). \tag{4.20}$$

Оценка (0.3) следует из (4.4), (4.6), (4.10), (4.14) и (4.19), если учесть, что $X/2 < n \leqslant X$, $n \equiv l(\operatorname{mod} D)$ и

$$\mathrm{R}\,(\mathrm{n},\mathrm{D}) > \mathrm{R}_1\,(\mathrm{n},\mathrm{D}) - |\mathrm{R}_2\,(\mathrm{n},\mathrm{D})|\,.$$

Мы доказали теоремы для четных чисел n из интервала $X/2 < n \leq X$. Это доказательство можно распространять для всех четных чисел n из интервала $1 < n \leq X$ следующим образом. Имеем

$$E(D,X) \leqslant \sum_{\substack{n\leqslant X\\ R(n,D)=0}} 1 \leqslant 2Y + \sum_{Y<2^h\leqslant X}\ \sum_{\substack{2^h<n\leqslant 2^{h+1}\\ R(n,D)<A(n,\delta)}} 1 \leqslant 2Y + \sum_{\mathrm{h}\leqslant 2\ln\mathrm{X}} E^*(D,X),\ (\mathrm{Y} \geqslant \mathrm{c}_8^{(2)}). \tag{4.21}$$

Здесь через $A(n,\delta)$ обозначена правая часть неравенства (0.3). Из (4.20) и (4.21) находим

$$E(D,X) << 1 + \sum_{h\leqslant 2\ln X} c_8^{(1)} < c_8 X^{1-\delta}\varphi^{-1}(D).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. О гольдбаховых числах.// Чебышевский сборник, 2008. № 9(1), С.13–17.

2. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Наука, М., 1980. С.200.

3. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. // Наука, М., 1976. С.95

4. Хуа-Ло-Ген. Аддитивная теория простых чисел. // Тр. Матем. инс. им. В.А.Стеклова., 1947. С.3–179.

5. Хуа-Ло-Ген. Метод тригонометрических сумм и её приложения в теория чисел. // Мир, М., 1964. С.18–19.

6. Corput,J.G.van.der. Sur l'hypothese de Goldbach pour Presque tous les nombers pairs. // Acta arithm. Варшава, 1937. V.2. pp. 266–290.

7. Чудаков Н.Г. О проблеме Гольдбаха. // Докл. АН СССР, 1937. 17, С.331–334.

8. Estermann T. On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes.// Proc.Lond. Math. Soc. № 2(44), 1938, С.307–314.

9. Hardy G.H. and Littlewood J.E. Some problems of partitio numerorum; III: On the expression of a number as sum of primes. // Acta Math., 1923. № 44. С. 1–70.

10. Vaughan R.C. The Hardi-Littlewood method. Second edition. //Cambridge University Press. 1997. 2, С. 176–256.

11. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова. //Вестник ЛГУ. 1961. № 13. С.11–27.

12. Vaughan R.C. On Goldbach' s problem. // Acta arithm. 1972 v.22. p. 21–48.

13. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem. // Acta arithm. 1975., № 27. p. 353–370.

14. Аллаков И. Исключительное множество суммы двух простых. Диссертация на соисканию ученой степени кандидата физ.-мат.наук. Ленинград. ЛГУ, С. 148, 1983.

15. Виноградов А.И. О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда. Acta arithm. № 46, 33–56 (1985).

16. Архипов Г.И.,Чубариков В.Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа. Докл.РАН, 387, 3, С. 295–296 (2002).

17. Плаксин В.А. Об одном вопросе Хуа- Ло –Кена. Мат. Заметки. № 3(47). С. 78–90 (1990).

18. Аллаков И. Решение некоторых аддитивных задач теории чисел аналитическими методами. (Таълим, Ташкент, 2012).

19. Allakov I., Safarov A.Sh. Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number. Russian Mathematics. 64, С. 8–21 (2020).

20. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math. Sinica. 7. 102-121 (1957).

21. Liu M.C. , Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval Uniyersity. Cand. Math. Soc. pp. 595–624 (Berlin- New York .1989).

22. Чубариков В.Н. Многомерные проблемы теории простых чисел. Чебышевский сборник, Вып. 12, т. 4, С. 176-256 (2011).

23. Аллаков И. О представление чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии. Известия ВУЗов. "Математика". 8(459). С. 3–15 (2000).

24. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. (Наука, М., 1983).

25. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory. (Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi., 1997).

26. Montgomery H.L. and Vaughan R.C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. (Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006).

27. Прахар К. Распределение простых чисел. (Мир, М., 1967).

28. Gallagher P.X. A large sieve density estimate near . Inv.Math. 11, pp. 329–339 (1970).

29. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа (Наука, М., 1976).

30. Аллаков И., Исраилов М. Оценка тригонометрических сумм по простым числам в арифметической прогрессии. Доклады АН РУз., 4, С. 5–6 (1982).

REFERENCES

1. Allakov I., 2008, “About Goldbach numbers” // Chebyshevsky collection, № 9, Vol. 1, pp.13–17.
2. Vinogradov I. M., 1980, “Method of trigonometric sums in number theory” // Nauka, M., pp. 200.
3. Vinogradov I. M., 1976, “Special variants of the method of trigonometric sums” // Nauka, M., pp. 95.
4. Hua-Lo-Gen, 1947, “Additive theory of prime numbers” // Tr. Matem. ins. im. V.A.Steklov., pp.3–179.
5. Hua-Lo-Gen., 1964, “The method of trigonometric sums and its applications in number theory” // Mir, M., pp.18–19.
6. Output, J. G. van. der.. 1937, “Sur l'hypothese de Goldbach pour Presque tous les nombers pairs” // Acta arithm. - Warsaw, Vol. 2. pp. 266–290.
7. Chudakov N. G., 1937, “On the Goldbach's problem. // Docl. USSR Academy of Sciences”, № 17, pp.331–334.
8. Estermann T., 1938, “On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes” // Proc.Lond. Math. Soc. № 2(44), pp. 307–314.
9. Hardy G. H. and Littlewood J.E., 1923, “Some problems of partitio numerorum; III: On the expression of a number as sum of primes” // Acta Math., № 44., pp. 1–70.
10. Vaughan R. C., 1997, The Hardi-Littlewood method. Second edition. //Cambridge University Press, № 2, pp.176–256.
11. Lavrik A. F., 1961, “On binary problems of additive theory of prime numbers in connection with the method of trigonometric sums by I.M. Vinogradov” //Bulletin of LSU., № 13., pp.11–27.
12. Vaughan R. C., 1972, “On Goldbach' s problem” // Acta arithm. - 1972 v.22. pp. 21-48.
13. Montgomery H. L., 1975, “Vaughan R. C.„ The exceptional set in Goldbach's problem” // Acta algorithm. № 27, pp.353–370.
14. Allakov I., 1983, “An exceptional set of the sum of two primes”. Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Leningrad. LSU,148(1983).
15. Vinogradov A. I., 1985, “On the binary Hardy-Littlewood problem”, Acta arithm. 46, 33-56 (1985).
16. Arkhipov G. I., Chubarikov V.N., 2002, “On an exceptional set in a binary Goldbach type problem”. Dokl.RAN, 387, 3, pp. 295–296 (2002).
17. Plaksin V. A., 1990, “About one question of Hua-Lo-Ken”, Math. Notes, № 3, Vol. 47, pp. 78–90.
18. Allakov I., 2012, “Solving some additive problems of number theory by analytical methods”, (Talim, Tashkent).
19. Allakov I., Safarov A. Sh., 2020, “Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number”. Russian Mathematics. № 64, pp. 8–21.

20. Wu Fang., 1957, “On the solutions of the systems of linear equations with prime variables”. Acta Math. Sinica”, № 7, pp. 102–121.

21. Liu M. C., 1987(1989), “Tsang K. M. Small prime solutions of linear equation”s. Proc. Intern. Number. Th. Conf. Laval Uniyersity. Cand. Math. Soc. pp. 595–624 (Berlin–New-York).

22. Chubarikov V. N., 2011, “Multidimensional problems of prime number theory”. Chebyshev collection, № 12, Vol. 4, pp. 176–256.

23. Allakov I., 2000, “About the representation of numbers by the sum of two primes from an arithmetic progression”. News of universities. Mathematics, № 8(459). pp. 3–15.

24. Karatsuba A. A., 1983, “Fundamentals of analytical number theory”, Nauka, M.

25. Davenport Harold, 1997, “Multiplicative Number Theory”, (Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi..

26. Montgomery H. L. and Vaughan R. C., 2006, “Multiplicative number theory. I. Classical theory”. (Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York).

27. Prahar K., 1967, “Distribution of prime numbers”, Mir, M.

28. Gallagher P. X., 1970, “A large sieve density estimate near”, Inv.Math. № 11, pp. 329–339.

29. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., 1976, “Elements of the theory of function and functional analysis”, Nauka, M.

30. Allakov I., Israilov M., 1982, “Estimation of trigonometric sums by prime numbers in arithmetic progression”, Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan, № 4, pp. 5–6.

Получено 17.09.21
Принято в печать 22.06.2022