ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 2.

УДК 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-5-20

Обобщение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами[1]

Ф. С. Авдеев, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Авдеев Фёдор Степанович — доктор педагогических наук, профессор, Орловский государственный университет (г. Орёл).
e-mail: ivanavd@mail.ru
Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

В статье развивается теория интегральных преобразований с целью разработки операционного исчисления для исследования переходных процессов. Введен аналог преобразования Лапласа, который может быть применен к выражениям с кусочно-постоянным множителем перед оператором дифференцирования. Определены понятия, такие как, оригинал, изображение, свертка. Доказаны теоремы о дифференцировании оригинала, о дифференцировании изображения и другие. Дано определение обобщенной свертки и доказана формула для вычисления такой свертки. На основе понятия свертки определен интеграл дробного порядка. Главным инструментом в развитии теории обобщенного операционного исчисления является метод операторов преобразования. С его помощью установлена связь обобщенных интегральных преобразований Лапласа, введенных в статье, с классическим интегральным преобразованием Лапласа. Найдено решение задачи с кусочно-постоянными коэффициентами о нагреве полубесконечного стержня.

Ключевые слова: Обобщение преобразования Лапласа, формула обращения, оператор преобразования, интеграл дробного порядка.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Ф. С. Авдеев, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Обобщение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 5–20.

[1]Эта работа поддержана Министерством Науки и Высшего образования Российской Федерации проект 0707-2020-0034.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 2.

UDC 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-5-20

Generalization of the Laplace transform for solving differential equations with piecewise constant coefficients

F. S. Avdeev, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

$\boxed{\textbf{Avdeev Fedor Stepanovich}}$ — doctor of pedagogical sciences, professor, Orel State University (Orel).
e-mail: ivanavd@mail.ru
Yaremko Oleg Emmanuilovich — Moscow State Technical University «Stankin» (Moscow).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Yaremko Natalia Nikolaevna — National Research Technological Unuversity «MISiS» (Moscow).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Abstract

The article develops the theory of integral transforms in order to obtain operational calculus for the study of transient events. An analogue of the Laplace transform is introduced, which can be applied to expressions with a piecewise constant factor before the differentiation operator. Concepts such as original function, the Laplace transform, convolution are defined. Theorems on differentiation of the original, on differentiation of the Laplace transform and others have been proved. A generalized convolution definition is given and a formula for calculation such convolution is proved. Based on the concept of convolution, a fractional integral is defined. The transmutation operators method is the main tool in the theory of generalized operational calculus. The generalized Laplace integral transforms introduced in the article and the classical Laplace integral transforms are connected with its help. The solution to the heat problem with piecewise constant coefficients for the semi-infinite rod is found.

Keywords: Generalization of the Laplace transform, inversion formula, transformation operator, fractional integral..

Bibliography: 20 titles.

For citation:
F. S. Avdeev, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, 2022, “Обобщение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 5–20.

1. Введение

Преобразования Лапласа получило широкое распространение в научных и инженерных расчётах. Ценность использования преобразования Лапласа заключается в том, что дифференциальным и интегральным соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые-алгебраические- соотношения над их изображениями. В частности, операции дифференцирования в пространстве оригиналов соответствует операция умножения в пространстве изображений. Многочисленные исследователи работали в направлении замены операции дифференцирования на более сложную операцию [1,2,4-17]. Так, например, Адамар [] вместо оператора d/dt использовал операцию td/dt. В рассматриваемой статье оператор d/dt

заменяется оператором $x(t)\,d/dt$, в котором $x(t)$ — кусочно-постоянная функция. Строится соответствующее обобщенное интегральное преобразование Лапласа, доказываются его основные свойства, обосновывается аналог формулы обращения Меллина [3]. При таких построениях используется метод операторов преобразования [18,19], который устанавливает связь классического преобразования Лапласа с обобщенным преобразованием, введенным в статье. Обобщенное преобразование Лапласа реализуется на практике с помощью представленного в статье удобного алгоритма вычисления, разработанного на основе классического преобразования Лапласа. Рассматриваются приложения обобщенного преобразования Лапласа для исследования кусочно-линейных систем. В частности, получено аналитическое описание температурного поля с переменным режимом для полубесконечного стержня [20].

2. Материалы и методы

2.1. Операторы преобразования. Обобщенные оригинал и изображение

Пусть функция $x(t) : [a,b) \to [0,\infty)$ непрерывная кусочно- непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая на промежутке $[a,b)$ и такая что $x(a) = 0$, а функция $x^{-1}(t) : [0,\infty) \to [a,b)$ обратная к ней.

Определение 1. *Функцию $f(t)$ назовем оригиналом для обобщенного преобразования Лапласа, если функция $\tilde{f}(t) = f\left(x^{-1}(t)\right)$ является оригиналом для классического преобразования Лапласа, т.е.если выполняются три требования:*

1. $f(t) = 0, t \notin [a,b)$.
2. *На любом отрезке $[c,d] \subseteq [a,b)$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е.*
   a) ограничена,
   b) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода,
   c) имеет конечное число экстремумов.
3. $|f(t)| \leqslant Me^{s_0 x(t)}$, *при $t \in [a,b)$, где $M > 0, s_0$ — некоторые действительные постоянные, s_0 называют показателем роста функции $f(t)$.*

Определение 2. *Отображение $J : \tilde{f}(t) \to f(t)$ назовем оператором преобразования. Таким образом,*

$$f(t) = J\left[\tilde{f}(t)\right].$$

Теорема 1. *Обратный оператор преобразования J^{-1}: $f(t) \to \tilde{f}(t)$ задается формулой*

$$\tilde{f}(t) = f\left(x^{-1}(t)\right).$$

Определение 3. *Обобщенное преобразование Лапласа – это интегральное преобразование L, которое определим соотношением*

$$L\left[f(t)\right] \equiv F(p) = \tilde{L}\left[\tilde{f}(t)\right],$$

где L — обобщенное преобразование Лапласа, $\tilde{L}$ — преобразование Лапласа. Обобщенное преобразование Лапласа будем обозначать символом L. Функция $F(p)$ называется обобщенным изображением функции $f(t)$.

Теорема 2. *Обобщенное изображение $F(p)$ функции оригинала $f(t)$ вычисляется по формуле*

$$L[f(t)] \equiv F(p) = \int_a^b e^{-px(t)} x'(t) f(t)\,dt.$$

Доказательство. Из определения 3 имеем

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{f}(t)\,dt.$$

Выполним замену переменной $t = x(\tau)$. В результате получим

$$L[f(t)] = \int_a^b e^{-px(\tau)} x'(\tau) f(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Теорема 3. *Аналог формулы обращения Меллина. Если $f(t)$ оригинал, то интеграл (1) сходится всюду в полуплоскости $Rep > s_0$. При этом сходимость равномерная в любой области $Rep \geqslant s > s_0$ и функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $Rep > s_0$. Имеет место формула обращения*

$$L^{-1}[F(p)] \equiv f(t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{px(t)} F(p)\,dp. \tag{2}$$

Доказательство. Формула обращения Меллина имеет вид

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pz} F(p)\,dp.$$

Подставим $z = x(t)$. В итоге получим

$$f(t) = \tilde{f}(x(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{px(t)} F(p)\,dp.$$

Следствие 1. *Оригинал $f(t)$ определяется единственным образом по своему изображению $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва.*

Теорема 4. *Обобщенное преобразование Лапласа L и преобразование Лапласа $\tilde{L}$ связаны соотношением*

$$L = \tilde{L} \cdot J^{-1}.$$

По определению

$$L\left[J\left[\tilde{f}\right]\right] = L[f] = \tilde{L}\left[\tilde{f}\right].$$

Таким образом, $L \cdot J = \tilde{L}$.

2.2. Основные теоремы обобщенного операционного исчисления

Теорема 5. *Дифференцирование оригинала. Пусть функции $f(t)$ и $\frac{f'(t)}{x'(t)}$ является оригиналами, тогда*

$$L\left[\frac{f'(t)}{x'(t)}\right] \equiv pF(p) - f(0).$$

Доказательство. По формуле (1) имеем

$$L\left[\frac{f'(t)}{x'(t)}\right] \equiv \int_a^b e^{-px(t)} x'(t)\, \frac{f'(t)}{x'(t)} dt =$$

$$= e^{-px(t)} f(t)\Big|_a^b + p\int_a^b e^{-px(t)} x'(t)\, f(t)\, dt =$$

$$= -f(a) + pF(p).$$

Свертка оригиналов. Сверткой функций оригиналов $f(t), g(t)$ назовем функцию

$$f(t) * g(t) = L^{-1}[F(p)\, G(p)].$$

Теорема 6. *Свертка вычисляется по формулам*

$$f(t) * g(t) = J\left[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)\right] \tag{3}$$

или в развернутом виде

$$f(t) * g(t) = \int_a^t f\left(x^{-1}(x(t) - x(\tau))\right) x'(\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Изображения правой и левой частей в формуле (3) одинаковы. По определению свертки имеем равенство

$$L[f(t) * g(t)] = F(p)\, G(p).$$

С другой стороны, получим

$$L \cdot J\left[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)\right] = \tilde{L}\left[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)\right] = F(p)\, G(p).$$

По следствию 1 оригиналы совпадают.

Для доказательства второй формулы в теореме 5 перепишем ее правую часть в виде

$$\int_a^t \tilde{f}((x(t) - x(\tau)))\, \tilde{g}(x(\tau))\, x'(\tau)\, d\tau.$$

Затем выполним замену переменной $\tau = x^{-1}(z)$. Тогда

$$\int_0^{x(t)} \tilde{f}((x(t) - z))\, \tilde{g}(z)\, dz = J\left[\int_0^t \tilde{f}((t - z))\, \tilde{g}(z)\, dz\right] =$$

$$= J\left[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)\right] = f(t) * g(t).$$

Интеграл дробного порядка. По аналогии с [21] интегралом порядка α, связанным с обобщенным преобразованием Лапласа от функции $f(t)$, назовем функцию $D^{-\alpha}[f(t)]$:

$$D^{-\alpha}[f(t)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^\alpha} F(p)\right].$$

Теорема 7. *Формула для вычисления интеграла порядка α от функции $f(t)$ имеет вид*

$$D^{-\alpha}[f(t)] = \int_a^t \frac{(x(t) - x(\tau))^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} x'(\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Доказательство. Применим формулу свертки (3)

$$f(t) * g(t) = J\left[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)\right],$$

где

$$\tilde{g}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leftarrow \frac{1}{p^{\alpha}}.$$

Таким образом,

$$D^{-\alpha}[f(t)] = J\left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{f}(\tau)\,d\tau\right] = \int_0^{x(t)} \frac{(x(t)-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f\left(x^{-1}(\tau)\right)d\tau.$$

Выполним замену переменной $\tau = x(z)$. Тогда

$$D^{-\alpha}[f(t)] = \int_a^t \frac{(x(t)-x(\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x'(\tau) f(\tau)\,d\tau.$$

3. Обобщенные преобразования Лапласа

3.1. Операторы преобразования

Выберем функцию $x(t)$ в виде

$$x(t) = a_1 t\left(H(t-t_0) - H(t-t_1)\right) + \left(a_2(t-t_1) + a_1\Delta t_1\right)\left(H(t-t_1) - H(t-t_2)\right) +$$
$$+\left(a_3(t-t_2) + a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1\right)\left(H(t-t_1) - H(t-t_2)\right) + \ldots$$
$$+\left(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + \ldots + a_1\Delta t_1\right)H(t-t_n),$$

здесь

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1}, t_0 = 0.$$

График функции $x(t)$ является ломаной с вершинами в точках

$$M_0(0,0), M_1(t_1, a_1\Delta t_1), M_2(t_2, a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1), \ldots, M_n(t_n, a_n\Delta t_n + \ldots + a_1\Delta t_1)$$

с угловыми коэффициентами звеньев ломаной $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Заметим, что в частном случае $a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots, a_{n+1} = 1$ ломаная становится прямой. Оператор преобразования в таком случае есть тождественный оператор. В общем случае оператор преобразования J принимает вид

$$\begin{cases} f_1(t) = \tilde{f}(a_1 t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ f_2(t) = \tilde{f}\left(a_2(t-t_1) + a_1\Delta t_1\right), t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ f_3(t) = \tilde{f}\left(a_3(t-t_2) + a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1\right), t_2 \leqslant t \leqslant t_3, \\ \ldots \\ f_{n+1}(t) = \tilde{f}\left(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + \ldots + a_1\Delta t_1\right), t_n \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Для обратного оператора J^{-1} справедлива формула

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = f_1\left(\frac{t}{a_1}\right), 0 \leqslant t \leqslant a_1\Delta t_1, \\ \tilde{f}(t) = f_2\left(\frac{t-a_1\Delta t_1}{a_2} + t_1\right), a_1\Delta t_1 \leqslant t \leqslant a_1\Delta t_1 + a_2\Delta t_2, \\ \ldots \\ \tilde{f}(t) = f_{n+1}\left(\frac{t-a_1\Delta t_1-a_2\Delta t_2-\ldots-a_n\Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n\right), a_1\Delta t_1 + \ldots + a_n\Delta t_n \leqslant t. \end{cases} \tag{6}$$

Из формулы (1) получим формулу для вычисления изображения

$$F(p)=a_1\int_0^{t_1}e^{-a_1pt}f_1(t)\,dt+a_2\int_{t_1}^{t_2}e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)}f_2(t)\,dt+ \tag{7}$$

$$+a_3\int_{t_2}^{t_3}e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2\Delta t_2+a_1\Delta t_1)}f_3(t)dt+...+$$

$$+a_{n+1}\int_{t_n}^{\infty}e^{-p(a_3(t-t_n)+a_n\Delta t_n+...+a_1\Delta t_1)}f_{n+1}(t)dt.$$

Из теоремы 2 получаем формулу обращения Меллина

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pta_1}F(p)\,dp, 0\leqslant t\leqslant t_1,$$

$$f_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)}F(p)\,dp, t_1\leqslant t\leqslant t_2, \tag{8}$$

$$...$$

$$f_{n+1}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n\Delta t_n+...+a_1\Delta t_1)}F(p)\,dp, t_n\leqslant t.$$

3.2. Основные теоремы обобщенного операционного исчисления

Обобщенный сдвиг определим по правилу

$$S_\alpha[f(t)]=f\left(t-\frac{\alpha}{a_1}\right)\left(H\left(t-\frac{\alpha}{a_1}\right)-H\left(t-\frac{\alpha}{a_1}-t_1\right)\right)+$$

$$+f\left(t-\frac{\alpha}{a_2}\right)H\left(t-\frac{\alpha}{a_2}-t_1\right).$$

Теорема 8. *Первая теорема о сдвиге. Пусть $f(t)\leftarrow F(p)$, тогда*

$$S_\alpha[f(t)]=e^{-p\alpha}F(p).$$

Доказательство. Из определения 3 следует, что

$$\tilde f(t-a)\leftarrow e^{-ap}F(p).$$

Следовательно, выполнено равенство $J\left[\tilde f(t-a)\right]\leftarrow e^{-ap}F(p)$. Преобразуем выражение $J\left[\tilde f(t-a)\right]$. Мы имеем

$$J\left[\tilde f(t-a)\right]=J\left[f\left(\tfrac{t-\alpha}{a_1}\right)(H(t-\alpha)-H(t-\alpha-a_1t_1))+\right.$$
$$\left.+f\left(\tfrac{t-\alpha-a_1\Delta t_1}{a_2}+t_1\right)(H(t-\alpha-a_1t_1)-H(t-\alpha-a_1t_1-a_2\Delta t_2))\right].$$

Следовательно,

$$J\left[\tilde f(t-a)\right]=\left[f\left(\frac{a_1t-\alpha}{a_1}\right)(H(a_1t-\alpha)-H(a_1t-\alpha-a_1t_1))+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{a_1t-\alpha-a_1\Delta t_1}{a_2}+t_1\right)\cdot H_1\right]H(t_1-t)+$$

$$+\left[f\left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1-\alpha}{a_1}\right)\cdot H_2+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1-\alpha-a_1\Delta t_1}{a_2}+t_1\right)(H(a_2(t-t_1)-\alpha))\right]H(t-t_1)=$$

$$= f\left(t-\frac{\alpha}{a_1}\right)\left(H\left(t-\frac{\alpha}{a_1}\right)-H\left(t-\frac{\alpha}{a_1}-t_1\right)\right)+f\left(t-\frac{\alpha}{a_2}\right)H\left(t-\frac{\alpha}{a_2}-t_1\right)=$$
$$= S_\alpha\left[f\left(t\right)\right].$$

где

$$H_1 = H\left(a_1 t-\alpha-a_1 t_1\right)-H\left(a_1 t-\alpha-a_1 t_1-a_2\Delta t_2\right),$$
$$H_2 = H\left(a_2\left(t-t_1\right)+a_1\Delta t_1-\alpha\right)-H\left(a_2\left(t-t_1\right)+a_1\Delta t_1-\alpha-a_1 t_1\right).$$

Обобщенное преобразование подобия определим по правилу

$$G_\alpha\left[f\left(t\right)\right]=f\left(\alpha t\right)H\left(t_1-t\right)+f\left(\alpha t+\left(\alpha-1\right)\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)t_1\right)H\left(t-t_1\right).$$

Теорема 9. *Теорема подобия. Если $f\left(t\right)$ функция-оригинал, $f\left(t\right)\leftarrow F\left(p\right)$, то*

$$G_\alpha\left[f\left(t\right)\right]\leftarrow\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доказательство. Теорема подобия для преобразования Лапласа имеет вид

$$\tilde f\left(\alpha t\right)\leftarrow\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$J\left[\tilde f\left(\alpha t\right)\right]\leftarrow\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Найдем функцию $J\left[\tilde f\left(\alpha t\right)\right]$. По определению имеем

$$J\left[\tilde f\left(\alpha t\right)\right]=J\left[f\left(\frac{\alpha t}{a_1}\right)H\left(a_1 t_1-\alpha t\right)+f\left(\frac{\alpha t-a_1 t_1}{a_2}+t_1\right)H\left(\alpha t-a_1 t_1\right)\right]=$$

$$=\left(f\left(\frac{\alpha a_1 t}{a_1}\right)H\left(a_1 t_1-a_1 t\right)+f\left(\frac{\alpha a_1 t-a_1 t_1}{a_2}+t_1\right)H\left(a_1 t-a_1 t_1\right)\right)H\left(t_1-t\right)+$$

$$+\left(f\left(\frac{\alpha\left(a_2\left(t-t_1\right)+a_1 t_1\right)}{a_1}\right)H\left(a_1 t_1-a_2\left(t-t_1\right)-a_1 t_1\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{\alpha a_2\left(t-t_1\right)+a_1 t_1-a_1 t_1}{a_2}+t_1\right)H\left(a_2\left(t-t_1\right)+a_1 t_1-a_1 t_1\right)\right)H\left(t-t_1\right)=$$

$$=f\left(\alpha t\right)H\left(t_1-t\right)+f\left(\alpha t+\left(\alpha-1\right)\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)t_1\right)H\left(t-t_1\right).$$

Теорема доказана.

Для уточнения теоремы 5 выберем функцию $x\left(t\right)$ как в начале п.3.1. Тогда производная функции $x\left(t\right)$ существует всюду кроме точек $t_1,t_2,\ldots,t_n$ и вычисляется по формуле

$$x'\left(t\right)=a_1\left(H\left(t-t_0\right)-H\left(t-t_1\right)\right)+a_2\left(H\left(t-t_1\right)-H\left(t-t_2\right)\right)+$$
$$+a_3\left(H\left(t-t_1\right)-H\left(t-t_2\right)\right)+\ldots+a_{n+1}H\left(t-t_n\right),$$

значит,

$$\frac{1}{x'\left(t\right)}=\frac{1}{a_1}\left(H\left(t-t_0\right)-H\left(t-t_1\right)\right)+\frac{1}{a_2}\left(H\left(t-t_1\right)-H\left(t-t_2\right)\right)+ \tag{9}$$
$$+\frac{1}{a_2}\left(H\left(t-t_1\right)-H\left(t-t_2\right)\right)+\ldots+\frac{1}{a_{n+1}}H\left(t-t_n\right).$$

Теорема 10. *Дифференцирование оригинала. Пусть функции $f(t)$ и $f'(t)$ являются оригиналами, тогда*

$$L\left[\frac{1}{x'(t)}f'(t)\right] \equiv pF(p) - f(0),$$

где функция $\frac{1}{x'(t)}$ определена формулой (9). В развернутом виде справедлива формула

$$\int_0^{t_1} e^{-a_1pt} f_1'(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1)} f_2'(t)\,dt$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2\Delta t_2+a_1\Delta t_1)} f_3'(t)\,dt + ...+$$

$$+ \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_3(t-t_n)+a_n\Delta t_n+...+a_1\Delta t_1)} f_{n+1}'(t)\,dt = pF(p) - f(0).$$

Теорема 11. *Интегрирование изображения. Если функция $f(t)$ — оригинал, функция $f(t)/t$ — ограничена в окрестности точки $t = 0$, то функция*

$$\left(\frac{1}{a_1t}H(t_1-t) + \frac{1}{a_2(t-t_1)+a_1t_1}H(t-t_1)\right)f(t)$$

является оригиналом и

$$\left(\frac{1}{a_1t}H(t_1-t) + \frac{1}{a_2(t-t_1)+a_1t_1}H(t-t_1)\right)f(t) \leftarrow \int_p^{\infty} F(p)\,dp.$$

Теорема 12. *Вторая теорема о сдвиге. Если $f(t)$ функция-оригинал, $f(t) \leftarrow F(p)$, то для любого комплексного числа λ функция*

$$\left(H(t_1-t) + e^{a_2(t-t_1)\lambda}H(t-t_1)\right)e^{\lambda a_1 t}f(t)$$

тоже оригинал и

$$\left(H(t_1-t) + e^{a_2(t-t_1)\lambda}H(t-t_1)\right)e^{\lambda a_1 t}f(t) \leftarrow F(p-\lambda).$$

Доказательство. Заметим, что $e^{\lambda t}\tilde{f}(t) \leftarrow F(p-\lambda)$. Затем преобразуем выражение $J\left[e^{\lambda t}\tilde{f}(t)\right]$. Будем иметь

$$J\left[e^{\lambda t}\tilde{f}(t)\right] = J\left[e^{\lambda t}f\left(\frac{t}{a_1}\right)H(a_1t_1-t) + e^{\lambda t}f\left(\frac{t-a_1t}{a_2}+t_1\right)H(t-a_1t_1)\right] =$$

$$= \left(e^{\lambda a_1 t}f\left(\frac{a_1t}{a_1}\right)H(a_1t_1-a_1t) + e^{\lambda a_1 t}f\left(\frac{a_1t-a_1t}{a_2}+t_1\right)H(a_1t-a_1t_1)\right)\cdot$$

$$\cdot H(t_1-t) + \left(e^{\lambda(a_2(t-t_1)+a_1t_1)}f\left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1t_1}{a_1}\right)H(a_1t_1-a_2(t-t_1)-a_1t_1) + \right.$$

$$\left. + e^{\lambda(a_2(t-t_1)+a_1t)}f\left(\frac{a_2(t-t_1)+a_1t_1-a_1t}{a_2}+t_1\right)H(a_2(t-t_1)+a_1t_1-a_1t_1)\right)\cdot$$

$$\cdot H(t-t_1) = e^{\lambda a_1 t}f(t)H(t_1-t) + e^{\lambda(a_2(t-t_1)+a_1t)}f(t)H(t-t_1).$$

Вспоминая, что $L[f(t)] = \tilde{L}\left[\tilde{f}(t)\right]$, доказательство закончим.

Теорема 13. *Дифференцирование изображений. Если функция $f(t)$ — оригинал, то функция*

$$-\left(a_1 t H(t_1 - t) + \left(a_2 (t - t_1) + a_1 t\right) H(t - t_1)\right) f(t) -$$

также оригинал, причем

$$-\left(a_1 t H(t_1 - t) + \left(a_2 (t - t_1) + a_1 t\right) H(t - t_1)\right) f(t) \leftarrow F'(p).$$

Теорема 14. *Свертка функций $f(t) * g(t)$ вычисляется по формуле*

$$f(t) * g(t) = a_1 \int_0^t \tilde{f}\left(a_1 (t - \tau)\right) g_1(\tau)\, d\tau H(t - t_0) +$$

$$+ \left(a_1 \int_0^{t_0} \tilde{f}\left(a_2 (t - t_0) + a_1 (t_0 - \tau)\right) g_1(\tau)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + a_2 \int_{t_0}^t \tilde{f}\left(a_2 (t - \tau)\right) g_2(\tau)\, d\tau \right) H(t - t_0).$$

Доказательство. Мы ограничимся случаем $n = 1$. Воспользуемся формулой (3) для свертки и определением 2 оператора преобразования. После замены переменных в интегралах получим требуемую формулу.

Следствие 2. *При $n = 1$ интеграл дробного порядка α функции $f(t)$ имеет вид*

$$D^{-\alpha}[f] = a_1^{\alpha} \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} g_1(\tau)\, d\tau H(t_0 - t) +$$

$$+ \left(a_1 \int_0^{t_0} \frac{\left(a_2 (t - t_0) + a_1 (t_0 - \tau)\right)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} g_1(\tau)\, d\tau + a_2^{\alpha} \int_{t_0}^t \frac{(t - \tau)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} g_2(\tau)\, d\tau \right) \cdot$$

$$\cdot H(t - t_0).$$

Доказательство. *Воспользуемся формулой* (4) *и определением интеграла дробного порядка α.*

Представлено обобщенное интегральное преобразование Лапласа для оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказаны основные свойства: первая и вторая теоремы о сдвиге, теорема подобия, теоремы о дифференцировании оригинала и изображения, теоремы о свертке. Установлен аналог формулы обращения Меллина. Применение метода операторов преобразования позволило связать обобщенное и классическое преобразования Лапласа, а также разработать эффективный алгоритм вычисления обобщенного преобразования Лапласа. Получены применения обобщенного преобразования Лапласа в решении начально-краевых задач математической физики.

4. Аналог задачи о нагреве полубесконечного стержня

4.1. Постановка задачи

Найти функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$u''_{xx} = B(u), t \in \bigcup_{k=0}^{n} (t_k, t_{k+1}), 0 < x, t_0 = 0, t_{n+1} = \infty$$

$$B(u) = \frac{1}{a_1} u_t' \left(H(t-t_0) - H(t-t_1) \right) + \frac{1}{a_2} u_t' \left(H(t-t_1) - H(t-t_2) \right) + \tag{10}$$
$$+ \frac{1}{a_2} u_t' \left(H(t-t_1) - H(t-t_2) \right) + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} u_t' H(t-t_n)$$

граничным условиям

$$u|_{x=0} = f(t), \, u|_{x\to\infty} = 0$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = 0$$

и условию непрерывности решения в момент $t = t_k, k = 1, ..., n$

$$u(t_k - 0, x) = u(t_k + 0, x).$$

Как известно [21], решение классической задачи о нагреве полубесконечного стержня имеет вид

$$\tilde{u}(t,x) = \int_0^t G(t-\tau)\, \tilde{f}(\tau)\, d\tau,$$

где

$$G(t,x) = \frac{x}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Применим оператор преобразования J к функции $\tilde{u}(t,x)$. Тогда получим

$$u(t,x) = J\left[\int_0^t G(t-\tau)\, \tilde{f}(\tau)\, d\tau\right].$$

Подставим выражение оператора преобразования (5). В результате установим формулу

$$u(t,x) = \int_0^{a_1 t} G(a_1 t - \tau)\, f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau H(t_0 - t) +$$
$$+ \int_0^{a_1 \Delta t_1} G(a_2(t-t_1) + a_1\Delta t_1 - \tau)\, f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau \left(H(t-t_0) - H(t-t_1) \right) +$$
$$+ \int_{a_1 \Delta t}^{a_2(t-t_1)+a_1\Delta t_1} G(a_2(t-t_1) + a_1\Delta t_1 - \tau)\, f\left(\frac{t - a_1\Delta t_1}{a_2} + t_1\right) d\tau \cdot \tag{11}$$
$$\cdot \left(H(t-t_0) - H(t-t_1) \right) + \ldots + \int_0^{a_1\Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + ... + a_1\Delta t_1 - \tau) \cdot$$
$$\cdot f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau H(t-t_n) + \int_{a_1\Delta t_1}^{a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + ... + a_1\Delta t_1 - \tau) \cdot$$
$$\cdot f\left(\frac{\tau - a_1\Delta t_1}{a_2} + t_1\right) d\tau H(t-t_n) +$$
$$+ \int_{a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1}^{a_3\Delta t_3 + a_2\Delta t_2 + a_1\Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + ... + a_1\Delta t_1 - \tau) \cdot$$
$$\cdot f\left(\frac{\tau - a_1\Delta t_1 - a_2\Delta t_2}{a_3} + t_2\right) d\tau H(t-t_n) + \ldots$$
$$+ \int_{a_n\Delta t_n + ... + a_1\Delta t_1}^{a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + ... + a_1\Delta t_1} G(a_{n+1}(t-t_n) + a_n\Delta t_n + ... + a_1\Delta t_1 - \tau) \cdot$$
$$\cdot f\left(\frac{\tau - a_1\Delta t_1 - a_2\Delta t_2 - ... - a_n\Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n\right) d\tau H(t-t_n).$$

4.2. Итерационный алгоритм вычисления температурного поля

Пусть известно $u_n(t,x)$ решение задачи (10) для случая n точек деления $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ с краевым условием

$$u_n(t,0) = f_n(t).$$

Обозначим оператор, определяющий решение $u_n(t,x)$ по известному краевому условию $f_n(t)$ символом A_x. Тогда $u_n(t,x) = A_x f(t)$. Пусть неизвестно $u_{n+1}(t,x)$ решение задачи (10) для случая точек деления $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$ и набора коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ с краевым условием

$$u_{n+1}(t,0) = f_{n+1}(t).$$

Наша цель: выразить решение $u_{n+1}(t,x)$ через модельное решение $u_n(t,x)$. Определим для этого оператор преобразования J

$$f_{n+1}(t) \equiv J[f_n(t)] = f_n(t) H(t_{n+1} - t) + f_n(a_{n+2}(t - t_{n+1}) + t_{n+1}) H(t - t_{n+1}).$$

Тогда обратный оператор преобразования имеет вид

$$f_n(t) \equiv J^{-1}[f_{n+1}(t)] = f_{n+1}(t) H(t_{n+1} - t) + f_{n+1}\left(\frac{t - t_{n+1}}{a_{n+2}} + t_{n+1}\right) H(t - t_{n+1}).$$

Таким образом,

$$u_{n+1}(t,x) = J\left[A_x J^{-1}[f(t)]\right].$$

Решение задачи (10) получается последовательным добавлением по одной новой точке сопряжения к модельной задаче. При этом классическая задача о нагреве полубесконечного стержня рассматривается в качестве модельной. Вычисления производятся по итерационному алгоритму, который экономичнее алгоритма, основанного на формуле (11).

Заметим, что задачу (10) можно решать пошаговым применением классического преобразования Лапласа. Первым шагом вычисляем решение задачи (10) на промежутке $(0, t_1)$, затем значение найденного решения в точке t_1 берется в качестве начального условия для решения на промежутке (t_1, t_2) и т.д. Процесс заканчивается вычислением решения на последнем промежутке (t_n, ∞). Преимущество метода, разработанного в статье, состоит в том, что решение задачи получается сразу для всех значений переменной t и, как следствие, все формулы имеют явный вид, т.е. не содержат итерационных ссылок, обращение к которым существенно снижает эффективность вычислений.

5. Обобщение операторов преобразования

Пусть известно $\tilde{u}(t,x)$ — решение задачи Коши для линейного уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами при производной ∂_t , т.е. с оператором $B(u)$ из формулы (10) с точками деления $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \ldots, \tilde{t}_n$ и набором коэффициентов $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1}$. Требуется найти решение $u(t,x)$ — задачи Коши для того же самого уравнения, но с другими точками деления $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и другим набором коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Оператор J, действующий по формуле

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_1}{\tilde{a}_1} t\right), t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_2}{\tilde{a}_2}(t - t_1) + \frac{a_1}{\tilde{a}_1}\Delta t_1\right), t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_3}{\tilde{a}_3}(t - t_2) + \frac{a_2}{\tilde{a}_2}\Delta t_2 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1}\Delta t_1\right), t_2 \leqslant t \leqslant t_3, \\ \ldots \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_{n+1}}{\tilde{a}_{n+1}}(t - t_n) + \frac{a_n}{\tilde{a}_n}\Delta t_n + \ldots + \frac{a_1}{\tilde{a}_1}\Delta t_1\right), t_n \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{12}$$

назовем прямым оператором преобразования.

Определим набор точек деления

$$\tilde{t}_0 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_0, \tilde{t}_1 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \tilde{t}_2 = \frac{a_2}{\tilde{a}_2} \Delta t_2 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} \Delta t_1, \ldots, \tilde{t}_n = \frac{a_n}{\tilde{a}_n} \Delta t_n + ... + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} \Delta t_1.$$

Выражение обратного оператора J^{-1} получается, если модельную задачу считать основной, а основную - модельной, т.е. выполнить замену: $\tilde{f} \leftrightarrow f, \tilde{a}_k \leftrightarrow a_k, \tilde{t}_k \leftrightarrow t_k$.

Следствие 3. *Решение задачи* (10) *имеет вид*

$$u(t,x) = J[\tilde{u}(t,x)].$$

Следствие 4. *Если* $a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2, \ldots, a_n = \tilde{a}_n, a_{n+1} \neq \tilde{a}_{n+1}$, *то* $\tilde{t}_0 = t_0, \tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_{21}$, $\ldots, \tilde{t}_n = t_n$ *и оператор преобразования имеет вид*

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_n, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_{n+1}}{\tilde{a}_{n+1}}(t - t_n) + t_n\right), t_n \leqslant t \end{cases}$$

Значит, в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$ *решение основной задачи равно решению модельной задачи:* $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)$ *; а в промежутке* $t_n \leqslant t$ *при* $a_{n+1} > \tilde{a}_{n+1}$ *решение* $u(t,x)$ *опережает модельное решение* $\tilde{u}(t,x)$ *и при* $a_{n+1} < \tilde{a}_{n+1}$ *решение* $u(t,x)$ *запаздывает относительно модельного решения* $\tilde{u}(t,x)$.

Следствие 5. *Если* $a_1 \neq \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2, \ldots, a_n = \tilde{a}_n, a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1}$, *то*

$$\tilde{t}_0 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_0, \tilde{t}_1 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \tilde{t}_2 = t_2 - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \ldots, \tilde{t}_n = t_n - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1$$

$$\tilde{t}_0 = t_0, \tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_{21}, \ldots, \tilde{t}_n = t_n.$$

Оператор преобразования принимает вид

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_1}{\tilde{a}_1} t\right), t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ f(t) = \tilde{f}\left(t - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1\right), t_1 \leqslant t. \end{cases}$$

Таким образом, при $a_1 > \tilde{a}_1$ *решение* $u(t,x)$ *опережает модельное решение* $\tilde{u}(t,x)$*; при* $a_1 < \tilde{a}_1$ *решение* $u(t,x)$ *запаздывает относительно модельного решения* $\tilde{u}(t,x)$.

Следствие 6. *Если* $a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2, \ldots, a_i \neq \tilde{a}_i, a_n = \tilde{a}_n, a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1}$, *то*

$$\tilde{t}_0 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_0, \tilde{t}_1 = \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \tilde{t}_2 = t_2 - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1, \ldots, \tilde{t}_n = t_n - t_1 + \frac{a_1}{\tilde{a}_1} t_1$$

$$\tilde{t}_0 = t_0, \tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_{21}, \ldots, \tilde{t}_n = t_n.$$

Оператор преобразования имеет вид

$$\begin{cases} f(t) = \tilde{f}(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_{i-1}, \\ f(t) = \tilde{f}\left(\frac{a_i}{\tilde{a}_i}(t - t_{i-1}) + t_{i-1}\right), t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \\ f(t) = \tilde{f}\left(t - t_i + \frac{a_i}{\tilde{a}_i}(t_i - t_{i-1}) + t_{i-1}\right), t_i \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Таким образом,

1. *при значениях* $t_0 \leqslant t \leqslant t_{i-1}$ *решение основной задачи* $u(t,x)$ *совпадает с модельным решением* $\tilde{u}(t,x)$,
2. *при* $t_{i-1} \leqslant t$ *для значений* $a_i < \tilde{a}_i$ *решение основной задачи* $u(t,x)$ *запаздывает относительно модельного решения* $\tilde{u}(t,x)$, *а для значений* $a_i > \tilde{a}_i$ *решение* $u(t,x)$ *опережает модельное решение* $\tilde{u}(t,x)$.

6. Заключение

Представлено обобщенное интегральное преобразование Лапласа для оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказаны основные свойства: первая и вторая теоремы о сдвиге, теорема подобия, теоремы о дифференцировании оригинала и изображения, теоремы о свертке. Установлен аналог формулы обращения Меллина. Применение метода операторов преобразования позволило связать обобщенное и классическое преобразования Лапласа, а также разработать эффективный алгоритм вычисления обобщенного преобразования Лапласа. Получены применения обобщенного преобразования Лапласа в решении начально-краевых задач математической физики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aghili Arman. New trends in Laplace type integral transforms with applications // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 2017. Vol. 35, № 1, pp. 173-193.

2. Baeumer Boris. On the Inversion of the Convolution and Laplace Transform // Transactions of the American Mathematical Society, 2003. Vol.355, №3, pp.1201-1212 ·

3. Brychkov Yu. A. , Prudnikov A. P. , Shishov V. S. Operational calculus // Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., VINITI, Moscow, 1979.Vol. №16, pp. 99–148.

4. Ermolova, N.Y., Tirkkonen, O. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications // IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions,2014.pp. 2938-2944 .

5. Ganzha, E.I. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol // Programming and Computer Software,2012. Vol. № 38, pp.150–155.

6. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform// Ain Shams Engineering Journal, 2019, Vol. 10,№ 4, pp. 841-845.

7. Jarad Fahd , Abdeljawad Thabet. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators // Results in Nonlinear Analysis, 2018. Vol 1, № 2, pp. 88-98.

8. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions // Axioms,2019. Vol 8, № 3, pp. 87.

9. Li S., Shemyakova E., Voronov Th. Differential operators on the superline // Berezinians, and Darboux transformations. Lett.Math.Phys.,2017. Vol. 107, Vol. 9, pp. 1686–1714.

10. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons // Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

11. Milovanovic G. V., Parmar R. K., Rathie A. K. A study of generalized summation theorems for the series with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions // Applicable analysis and discrete mathematics,2018, Vol. 12, №1, pp. 257–272.

12. Napalkov, V. V., Mullabaeva, A. U. On one class of differential operators and their application // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2015, Vol. 288, pp.142-155.

13. Pinelas Sandra, Xavier G. B. A., Kumar S. U. Vasantha, Meganathan M. Laplace - Fibonacci transform by the solution of second order generalized difference equation // Non autonomous Dynamical Systems, 2017. Vol 4, № 1, pp. 22-30.

14. Sharma V. D., Thakare M. M. Introduction of generalized Laplace-fractional Mellin transform // International journal of engineering sciences research technology, 2016. Vol. №5 pp. 667-670.

15. Sharma, V. D., Thakare, M. M. Generalized Laplace-Fractional Mellin Transform and Operators // International Journal of Pure Applied Sciences Technology,2013. Vol. 16, № 1, pp.20-25.

16. Tsarev, S.P. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations // In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC, 2005. pp. 325–331.

17. Zaikina S. M. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematicheskie Nauki,2014. Vol 1, №34, pp. 19-24.

18. Jeffreys H. and Jeffreys B. Methods of Mathematical Physics // 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.

19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems // Springer Nature Switzerland, 2020, pp.447-466.

20. Yaremko O.E. Transformation operator and boundary value problems // Differential Equation, 2004, Vol.40,№.8,pp.1149-1160.

REFERENCES

1. Aghili Arman. New trends in Laplace type integral transforms with applications // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 2017. Vol. 35, no. 1, pp. 173-193.

2. Baeumer Boris. On the Inversion of the Convolution and Laplace Transform // Transactions of the American Mathematical Society, 2003. Vol.355, no. 3, pp.1201-1212 ·

3. Brychkov Yu. A. , Prudnikov A. P. , Shishov V. S. Operational calculus // J. Soviet Math.,1981. Vol. 15, no. 6, pp. 733–765.

4. Ermolova, N.Y., Tirkkonen, O. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications // IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions,2014.pp. 2938-2944.

5. Ganzha, E.I. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol // Programming and Computer Software,2012. Vol. no. 38, pp.150–155.

6. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform// Ain Shams Engineering Journal, 2019, Vol. 10,no. 4, pp. 841-845.

7. Jarad Fahd , Abdeljawad Thabet. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators // Results in Nonlinear Analysis, 2018. Vol 1, no. 2, pp. 88-98.

8. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions // Axioms,2019. Vol 8, no. 3, pp. 87.

9. Li S., Shemyakova E., Voronov Th. Differential operators on the superline // Berezinians, and Darboux transformations. Lett.Math.Phys.,2017. Vol. 107, Vol. 9, pp. 1686–1714.

10. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons // Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

11. Milovanovic G. V., Parmar R. K., Rathie A. K. A study of generalized summation theorems for the series with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions // Applicable analysis and discrete mathematics,2018, Vol. 12, no.1, pp. 257–272.

12. Napalkov, V. V., Mullabaeva, A. U. On one class of differential operators and their application // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2015, Vol. 288, pp.142-155.

13. Pinelas Sandra, Xavier G. B. A., Kumar S. U. Vasantha, Meganathan M. Laplace - Fibonacci transform by the solution of second order generalized difference equation // Non autonomous Dynamical Systems, 2017. Vol 4, no. 1, pp. 22-30.

14. Sharma V. D., Thakare M. M. Introduction of generalized Laplace-fractional Mellin transform // International journal of engineering sciences research technology, 2016. Vol. no. 5 pp. 667-670.

15. Sharma, V. D., Thakare, M. M. Generalized Laplace-Fractional Mellin Transform and Operators // International Journal of Pure Applied Sciences Technology,2013. Vol. 16, no. 1, pp.20-25.

16. Tsarev, S.P. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations // In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC, 2005. pp. 325–331.

17. Zaikina S. M. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematicheskie Nauki,2014. Vol 1, no.34, pp. 19-24.

18. Jeffreys H. and Jeffreys B. Methods of Mathematical Physics // 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.

19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems // Springer Nature Switzerland, 2020, pp.447-466.

20. Yaremko O.E. Transformation operator and boundary value problems // Differential Equation, 2004, Vol.40,no.8,pp.1149-1160.

Получено 22.07.2020
Принято в печать 22.06.2022