ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК501.548

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ПОЛУЦИКЛИЧЕСКИХ n-АРНЫХ ГРУПП

В. М. Кусов (г. Волгоград)

Аннотация

В статье изучается взаимосвязь между представлениями абелевых групп и представлениями абелевых n-арных групп. Опираясь на эту взаимосвязь, описаны все представления абелевых полуциклических n-арных групп.

Ключевые слова: n-арная группа, гомоморфизм, представление

REPRESENTATIONS OF ABELIAN SEMICYCLIC N-ARY GROUPS

V. M. Kusov (c. Volgograd)

Abstract

In this paper we study the relationship between representations of abelian groups and representations of abelian n-ary groups. Based on this relationship, described all the representations of abelian semicyclic n-ary groups.

Keywords: n-ary group, homonorphism, representation.

Алгебра $\langle G, [\;]\rangle$ с n-арной операцией $[\;] : G^n \to G,\ n \geqslant 2$, называется n-арной группой, если

1) операция $[\;]$ ассоциативна, т. е. верны тождества

$$[[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}] = [a_1, \ldots, a_i, [a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}], a_{i+n+1}, \ldots, a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, \ldots, n-1$, и

2) каждое из уравнений

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n] = b,\ i = 1, \ldots, n,$$

разрешимо для любых $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ и b из G.

Очевидно, при $n = 2$ алгебра $\langle G, [\;]\rangle$ является обычной (бинарной) группой.

Если, кроме того, в $\langle G, [\,]\rangle$ верны тождества

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то n-арная группа $\langle G, [\,]\rangle$ называется абелевой.

Для фиксированного элемента a n-арной группы $\langle G, [\,]\rangle$ решение уравнения $[\underbrace{a, \dots, a}_{n-1}, x] = a$ обозначают через $\bar{a}$ и называют косым элементом для a.

В [1] показано, что на любой абелевой n-арной группе $\langle G, [\,]\rangle$ можно определить абелеву группу $\langle G, +\rangle = red_c G$ (называемую редуктом), в которой бинарная операция $+$ действует по правилу

$$a + b = [a, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c}, b], \tag{1}$$

где c – фиксированный элемент из G. Тогда

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \dots + a_n + d, \tag{2}$$

где $d = [\underbrace{c, \dots, c}_{n}]$, а элемент c является нулем в группе $red_c G$.

Верно и обратное: в любой абелевой группе $\langle G, +\rangle$ для произвольного фиксированного элемента d задается абелева n-арная группа $\langle G, [\,]\rangle = abl_d G$, где n-арная операция $[\,]$ действует по правилу (2). Если $\langle G, +\rangle = (a)$ – циклическая группа, то $abl_d G$ называется абелевой полуциклической n-арной группой [2].

В любой группе $\langle G, \circ\rangle$ (не обязательно абелевой) задается n-арная группа $\langle G, [\,]\rangle = red^n G$, где n-арная операция $[\,]$ действует по правилу

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 \circ \dots \circ a_n. \tag{3}$$

Эта n-арная группа $\langle G, [\,]\rangle = red^n G$ называется производной от группы $\langle G, \circ\rangle$. В частности, используемая далее n-арная группа $red^n GL_m(\mathbb{C})$ является производной от полной линейной группы $GL_m(\mathbb{C})$.

Имеется тесная связь между n-арными группами и обычными группами, и, в частности, между гомоморфизмами этих алгебр.

Теорема 1. *Пусть φ – гомоморфизм абелевой n-арной группы $\langle G, [\,]\rangle$ в производную n-арную группу $\langle G', [\ \ ]\rangle = red^n G'$. Тогда для любого фиксированного $c \in G$ существует гомоморфизм ψ абелевой группы $red_c G$ в группу G', действующий по правилу $\psi(x) = \varphi(x) \circ \varphi^{-1}(c)$.*

Доказательство. Из определения косого элемента следует, что для $\varphi(c)$, $\bar{\varphi}(c) \in G'$ справедливо равенство $\varphi(c) = [\underbrace{\varphi(c), \dots, \varphi(c)}_{n-1}, \bar{\varphi}(c)]$. В производной n-арной группе $red^n G'$ n-арная операция $[\,]$ связана с групповой операцией $\circ$ правилом (3), поэтому

$$\varphi(c) = [\underbrace{\varphi(c), \ldots, \varphi(c)}_{n-1}, \bar{\varphi}(c)] = \underbrace{\varphi(c) \circ \ldots \circ \varphi(c)}_{n-1} \circ \bar{\varphi}(c) = \varphi^{n-1}(c) \circ \bar{\varphi}(c),$$

откуда $\bar{\varphi}(c) = \varphi(c)^{-(n-2)}$.

В редукте $red_c G$ групповая операция $+$ связана с n-арной операцией $[\ ]$ правилом (1), поэтому для произвольно выбранных элементов $a, b \in G$ имеем

$$\psi(a+b) = \varphi(a+b) \circ \varphi^{-1}(c) = \varphi([a, \underbrace{c, \ldots, c}_{n-3}, \bar{c}, b]) \circ \varphi^{-1}(c) =$$

$$= [\varphi(a), \underbrace{\varphi(c), \ldots, \varphi(c)}_{n-3}, \bar{\varphi}(c), \varphi(b)] \circ \varphi^{-1}(c) = \varphi(a) \circ \varphi(c)^{n-3} \circ \bar{\varphi}(c) \circ \varphi(b) \circ \varphi^{-1}(c) =$$

$$= \varphi(a) \circ \varphi(c)^{n-3} \circ \varphi(c)^{-(n-2)} \circ \varphi(b) \circ \varphi^{-1}(c) = \varphi(a) \circ \varphi(c)^{-1} \circ \varphi(b) \circ \varphi(c)^{-1} =$$
$$= \psi(a) \circ \psi(b).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть ψ — гомоморфизм абелевой группы $\langle G, + \rangle$ в группу $\langle G', \circ \rangle$ и для некоторых элементов d из G и b из G' выполнено условие*

$$\psi(d) = \underbrace{b \circ \ldots \circ b}_{n-1} = b^{n-1}. \tag{4}$$

Тогда отображение $\varphi : G \to G'$, действующее по правилу $\varphi(x) = \psi(x) \circ b$, является гомоморфизмом абелевой n-арной группы $\langle G, [\ ] \rangle = abl_d$ в n-арную группу $\langle G', [\ ] \rangle = red^n G'$.

Доказательство. Пусть посылка теоремы выполнена. Тогда для произвольно выбранных элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$ имеем

$$\varphi([a_1, \ldots, a_n]) = \psi([a_1, \ldots, a_n]) \circ b = \psi(a_1 + \ldots + a_n + d) \circ b =$$

$$= \psi(a_1) \circ \ldots \circ \psi(a_n) \circ \psi(d) \circ b = \psi(a_1) \circ \ldots \circ \psi(a_n) \circ b^{n-1} \circ b = \psi(a_1) \circ \ldots \circ \psi(a_n) \circ b^n =$$
$$= (\psi(a_1) \circ b) \circ \ldots \circ (\psi(a_n) \circ b) = \varphi(a_1) \circ \ldots \circ \varphi(a_n) = [\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)].$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Гомоморфизм $\varphi : \langle G, [\ ] \rangle \to red^n GL_m(\mathbb{C})$ называется (линейным) представлением n-арной группы $\langle G, [\ ] \rangle$*

(см. например [3],[4]).

Доказанные выше теоремы 1 и 2 позволяют устанановить связь между представлениями абелевых групп и представлениями абелевых n-арных групп. Так, из теоремы 1 имеем

Следствие 1. *Пусть φ – представление абелевой n-арной группы $\langle G, [\ ]\rangle$. Тогда найдется представление ψ группы $red_c\langle G, [\ ]\rangle$, действующее по правилу $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(c)^{-1}$.*

Из теоремы 2 имеем

Следствие 2. *Пусть ψ – представление абелевой группы $\langle G, +\rangle$ и для некоторых элемента d из $\langle G, +\rangle$ и матрицы U из $GL_m(\mathbb{C})$ выполнено условие*

$$\psi(d) = U^{n-1}. \tag{5}$$

Тогда отображение $\varphi : G \to GL_m(\mathbb{C})$, действующее по правилу $\varphi(x) = \psi(x) \cdot U$, является представлением абелевой n-арной группы $\langle G, [\ ]\rangle = abl_d G$.

С помощью следствий 1 и 2 изучим представления абелевых полуциклических n-арных групп.

Для конечных абелевых полуциклических n-арных групп верна

Теорема 3. *Пусть конечная циклическая группа (a) порядка k имеет представление $\psi_r(sa) = \varepsilon^{rs}$, где ε – корень k-й степени из 1, $r = 0, 1, \ldots, k-1$ [5, стр. 94]. Тогда абелева полуциклическая n-арная группа $abl_{la}(a)$ имеет представление*

$$\varphi_{r,t}(sa) = \varepsilon^{rs+t}, \tag{6}$$

где t – решение сравнения

$$x(n-1) \equiv lr \ mod\ k. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда для ψ_r, la и ε^t имеют место равенства

$$\psi_r(la) = \varepsilon^{lr} = \varepsilon^{t(n-1)} = (\varepsilon^t)^{n-1},$$

т. е. выполнено условие (5) следствия 2. Следовательно, отображение

$$\varphi_{r,t} :\ abl_{la}(a) \to red^n GL_m(\mathbb{C}),$$

действующее по правилу

$$\varphi_{r,t}(sa) = \psi_r(sa) \cdot \varepsilon^t = \varepsilon^{rs} \cdot \varepsilon^t = \varepsilon^{rs+t},$$

является представлением n-арной группы $abl_{la}(a)$. Теорема доказана.

Замечание 4. *В том случае, когда сравнение (7) не разрешимо, абелева полуциклическая n-арная группа $abl_{la}(a)$ не имеет представлений, описываемых формулой (6).*

Известно (Лемма 1, [6]), что любые две абелевы полуциклические n-арные группы $abl_{sa}(a)$ и $abl_{ta}(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда НОД $(s, n-1, k) =$ НОД $(t, n-1, k)$, где $k = |(a)|$. Отсюда следует, что количество различных (с точностью до изоморфизма) конечных абелевых полуциклических n-арных групп одного и того же порядка k равно количеству натуральных делителей числа НОД $(n-1, k)$.

В частности, когда делитель НОД $(n-1, k)$ равен 1, получаем циклическую n-арную группу $abl_a(a)$, порождаемую элементом a. Если же делитель НОД $(n-1, k)$ равен ему самому, получаем n-арную группу $abl_0(a) = red^n(a)$, являющуюся производной от циклической группы (a).

Из теоремы 3 для конечных циклических n-арных групп имеем

Следствие 3. *Пусть конечная циклическая группа (a) порядка k имеет представление $\psi_r(sa) = \varepsilon^{rs}$, где ε – корень k-й степени из 1, $r = 0, 1, \dots, k-1$. Тогда для каждого r, кратного НОД $(n-1, k)$, циклическая n-арная группа $abl_a(a)$ имеет НОД $(n-1, k)$ представлений, построенных по правилу (6), где t – решение сравнения $x(n-1) \equiv r$ mod k.*

Из теоремы 3 для производных n-арных групп от конечных циклических групп имеем

Следствие 4. *Пусть конечная циклическая группа (a) порядка k имеет представление $\psi_r(sa) = \varepsilon^{rs}$, где ε – корень k-й степени из 1, $r = 0, 1, \dots, k-1$. Тогда производная n-арная группа $abl_0(a) = red^n(a)$ для каждого r имеет НОД $(n-1, k)$ представлений, построенных по правилу (6), где t – решение сравнения $x(n-1) \equiv 0$ mod k.*

Для бесконечных абелевых полуциклических n-арных групп верна

Теорема 4. *Пусть бесконечная циклическая группа (a) имеет представление $\psi(sa) = \lambda^s$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\lambda \neq 0$ [5, стр. 93]. Тогда бесконечная абелева полуциклическая n-арная группа $abl_{la}(a)$ имеет представление*

$$\varphi(sa) = \lambda^s \cdot \mu, \tag{8}$$

где μ удовлетворяет условию $\lambda^l = \mu^{n-1}$.

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда для ψ, la и μ выполнено также условие (5) следствия 2, поскольку $\psi(la) = \lambda^l = \mu^{n-1}$. Следовательно, отображение $\varphi: abl_{la}(a) \to red^n GL_m(\mathbb{C})$, действующее по правилу

$$\varphi(sa) = \psi(sa) \cdot \mu = \lambda^s \cdot \mu,$$

является представлением n-арной группы $abl_{la}(a)$. Теорема доказана.

Замечание 5. *Так как уравнение $\lambda^l = x^{n-1}$ имеет $n-1$ решений при $\lambda \neq 0$, то с помощью одного представления $\psi(sa) = \lambda^s$ бесконечной циклической группы (a) в теореме 4 строятся $n-1$ не эквивалентных представлений бесконечной абелевой полуциклической n-арной группы $abl_{la}(a)$.*

Известно (Предложение 7, [7]), что любые две бесконечные абелевы полуциклические n-арные группы $abl_{sa}(a)$ и $abl_{ta}(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $s \equiv t \ mod \ (n-1)$ либо $s \equiv -t \ mod \ (n-1)$. Отсюда следует, что количество различных (с точностью до изоморфизма) бесконечных абелевых полуциклических n-арных групп равно $[\frac{n-1}{2}] + 1$, и каждая из них имеет вид $abl_{la}(a)$, где $l = 0, 1, \ldots, [\frac{n-1}{2}]$.

В частности, для $l = 1$ получим бесконечную циклическую n-арную группу $abl_a(a)$, порождаемую элементом a. Если же $l = 0$, получим n-арную группу $abl_0(a) = red^n(a)$, являющуюся производной от бесконечной циклической группы (a).

Из теоремы 4 для бесконечных циклических n-арных групп имеем

Следствие 5. *Пусть бесконечная циклическая группа* (a) *имеет представление* $\psi(sa) = \lambda^s$, *где* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $\lambda \neq 0$. *Тогда бесконечная циклическая* $n-$*арная группа* $abl_a(a)$ *имеет представление*

$$\varphi(sa) = \mu^{s(n-1)+1},$$

где μ *удовлетворяет условию* $\lambda = \mu^{n-1}$.

Из теоремы 4 для производных $n-$арных групп от бесконечных циклических групп имеем

Следствие 6. *Пусть бесконечная циклическая группа* (a) *имеет представление* $\psi(sa) = \lambda^s$, *где* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $\lambda \neq 0$. *Тогда производная* n*-арная группа* $abl_0(a)$ *от бесконечной циклической группы* (a) *имеет представление по правилу (8), где* μ *является корнем* $(n-1)$*-й степени из* 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Timm J. Kommutative n-Gruppen. Diss. Hamburg, 1967.

2. Гальмак А. М. n-Арные группы. Ч. 1 // Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.

3. Dudec W., Shahruari M. Representation theory of polyadic groups // Algebras and Representation Theory, 2010. DOI: 1007/S10468-010-9231-9.

4. Shahruari M. Representations of finite polyadic groups // arXiv.org e-Print archive, 2010. arXiv:1011.0954v1 [math.RT].

5. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.

6. Glazek K., Michalski J. and Sierocki I. On evaluation of some polyadic groups // Contribution to General Algebra 3, 1985, p. 159-171.

7. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. №3(54). С. 186-194.

REFERENCES

1. Timm J. Kommutative n-Gruppen. Diss. Hamburg, 1967.

2. Gal'mak A. M. n-Ary groups. Part I. Gomel: GGU imeni F. Skoriny, 2003. 196 p. *(in Russian)*.

3. Dudec W., Shahruari M. Representation theory of polyadic groups. Algebras and Representation Theory, 2010. DOI: 1007/S10468-010-9231-9.

4. Shahruari M. Representations of finite polyadic groups. arXiv.org e-Print archive, 2010. arXiv:1011.0954v1 [math.RT].

5. Kostrikin A. I. Introduction to algebra. Part III. Basic structure. Moskva: FIZMATLIT, 2004. 272 p. *(in Russian)*.

6. Glazek K., Michalski J. and Sierocki I. On evaluation of some polyadic groups. Contribution to General Algebra 3, 1985, p. 159-171.

7. Shchuchkin A. M. Semicyclic n-ary groups. Izvestiya GGU imeni F. Skoriny, 2009. 3(54). p.186-194. *(in Russian)*.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Поступило 14.09.2013