

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-312-327

**Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны
через упругую пластину с неоднородным покрытием¹**

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

Толконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Нгуен Тхи Шанг — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении и прохождении гармонической цилиндрической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным по толщине упругим покрытием. Полагается, что пластина помещена в безграничную идеальную жидкость, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями.

Аналитическое решение поставленной задачи получено на основе известного решения задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием и с использованием интегрального представления цилиндрической волны в виде разложения по плоским волнам.

Нахождение поля смещений в неоднородном слое сведено к решению краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представлены результаты численных расчетов частотных характеристик отраженного и прошедшего акустических полей. Показано сильное отличие частотных зависимостей для разных законов неоднородности материала покрытия.

Ключевые слова: отражение и прохождение звука, цилиндрическая звуковая волна, однородная упругая пластина, неоднородное покрытие.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 312–327.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-312-327

Reflection and transmission of cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating²

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Nguyen Thi Sang — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Abstract

In paper the problem of harmonic cylindrical sound waves reflection and transmission through a homogeneous isotropic elastic plate with a continuously inhomogeneous in thickness elastic coating is considered. It is believed that the plate is placed in an infinite ideal fluid, the laws of heterogeneity of the coating material are described by continuous functions.

An analytical solution of the posed problem is obtained on the basis of the known solution of the problem about the passage of plane sound waves through plate with a continuously inhomogeneous coating and using integral representation of a cylindrical wave in the form of an expansion on flat waves.

Finding the displacement field in an inhomogeneous layer is reduced to solving boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the second order.

The results of numerical calculations of frequency characteristics are presented for reflected and transmitted acoustic fields. Shown strong difference of frequency dependencies for different laws of inhomogeneity coating material.

Keywords: reflection and transmission of sound, cylindrical sound wave, homogeneous elastic plate, inhomogeneous coating.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2022, “Reflection and transmission of cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 312–327.

1. Введение

Отражение и прохождение звука через плоскую однородную изотропную упругую пластину исследовалось во многих работах (см., например, [1, 2]). Прохождение звука через однородный изотропный термоупругий плоский слой исследовалось в [3, 4]. Отражение звука однородными анизотропными упругими пластинами рассматривалось в [5, 6].

Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем решена для изотропного слоя [7], для трансверсально-изотропного слоя [8, 9], для слоя с анизотропией общего вида [10]. В [11] изучалось прохождение звука через неоднородный

²Supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

анизотропный плоский слой, граничащий с вязкими жидкостями. Прохождение плоской звуковой волны через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, рассматривалось в [12, 13]. Отражение и прохождение плоской звуковой волны через панели из функционально-градиентных материалов изучено в [14]. В [15] рассматривается задача о прохождении плоской звуковой волны через плоский слой композита конечной толщины. Предполагается, что композит состоит из взаимно чередующихся слоев упругого и вязкоупругого изотропных материалов.

В [16] решена обратная задача об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. Задача определения вида зависимостей плотности и модулей упругости трансверсально-изотропного неоднородного упругого слоя по коэффициенту прохождения плоской звуковой волны решена в [17].

Ряд работ посвящен исследованию отражения и прохождения звуковых волн на однородных изотропных упругих пластинах с неоднородными покрытиями. Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим однородным плоским слоем с неоднородным по толщине покрытием решена в [18]. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [19]. Прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием решены в [20]. В [21 - 23] исследовано влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия на разных поверхностях пластины и разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия. В [21] полагалось, что пластина граничит с идеальными жидкостями, а в [22, 23] — с вязкими жидкостями. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного изотропного покрытия конечной однородной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения звука, решена в [24]. В [25] получено решение задачи об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием.

В работах, упомянутых выше, первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако, как правило, приходится учитывать конечную удаленность источника от рассеивателя. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоский слой, а с математической точки зрения задача в этом случае становится значительно сложнее.

В [26, 27] построено решение задачи о прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину.

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении цилиндрической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты z : $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис.

1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

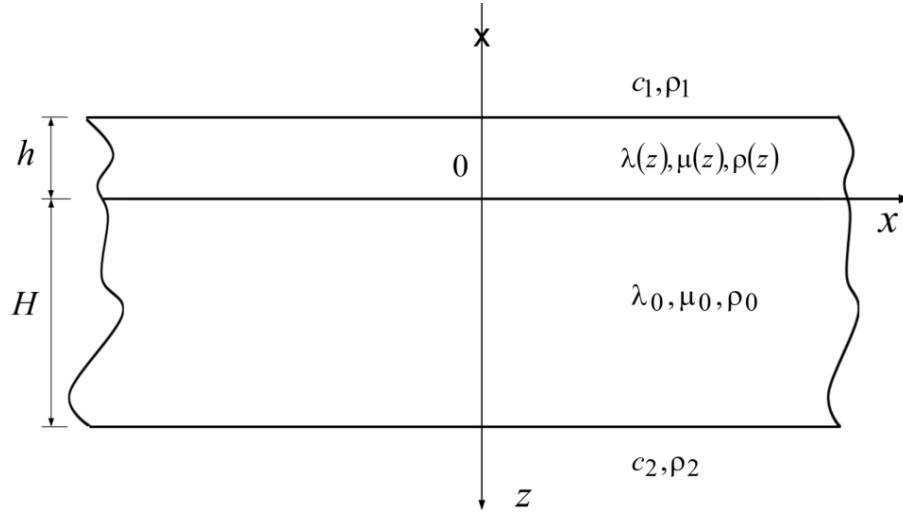


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает монохроматическая симметричная цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси y . Без ограничения общности полагаем, что положение источника определяется координатами

$$x = x_0 = 0; -\infty < y < \infty; z = -z_0.$$

Потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0 = A H_0(k_1 R) \exp(-i\omega t), \quad (2.1)$$

где A — амплитуда волны; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $z < -h$; ω — круговая частота; $H_0(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $R = |r - r_0|$; r и r_0 — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, 0, z)$ и с точкой $M_0(0, 0, -z_0)$, определяющей положение источника, соответственно; $R = [x^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также найдем поля смещений в однородной пластине и неоднородном слое.

3. Математическая модель задачи

Ввиду осевой симметрии задачи и свойств упругого материала покрытия, рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты y .

Распространение звуковых волн в полупространствах $z < -h$ и $z > H$ в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [2]

$$\Delta \psi_j + k_j^2 \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где ψ_1 и ψ_2 — потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн; $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $z > H$ ($j = 2$); $\psi = \psi_0 + \psi_1$ — потенциал

скорости полного акустического поля в полупространстве $z < -h$. При этом скорость частиц жидкости v_j и акустическое давление p_j в верхнем и нижнем полупространствах определяются по формулам

$$v_1 = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad v_2 = \text{grad} \psi_2, \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в упругой однородной изотропной пластине в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [2]

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad \Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (3.2)$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя $\mathbf{u}^0 = \text{grad}\Psi + \text{rot}\Phi$ ($\text{div}\Phi = 0$).

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор оси y . Тогда векторное уравнение относительно Φ сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi(x, z)$.

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [28], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_x, \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_z, \quad (3.3)$$

где u_x и u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Решения дифференциальных уравнений (3.1) – (3.3) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = -h : \quad -i\omega u_z = v_{1z}, \quad \sigma_{zz} = -p_1, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (3.4)$$

$$z = H : \quad -i\omega u_z^0 = v_{2z}, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_2, \quad \sigma_{xz}^0 = 0. \quad (3.5)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$z = 0 : \quad u_x = u_x^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0. \quad (3.6)$$

В (3.5) и (3.6) u_x^0 и u_z^0 — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^0$ частиц однородной пластины; σ_{ij}^0 — компоненты тензора напряжений в однородной пластине.

4. Аналитическое решение задачи

Найдем решение задачи (3.1) – (3.6), воспользовавшись решением задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием, полученным в [18].

Приведем некоторые элементы решения задачи для случая плоской падающей волны и отметим их индексом pl (*plane*). Согласно [18] потенциал скорости падающей плоской волны выражается формулой

$$\psi_{0pl} = A_0 \exp\{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + h)]\}, \quad (4.1)$$

а потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн, потенциалы смещения в однородной пластине и компоненты вектора смещения в неоднородном покрытии выражаются формулами

$$\begin{aligned}\psi_{1pl} &= A_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z + h)]\}, \quad \psi_{2pl} = A_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2z}(z - H)]\}, \\ \Psi_{pl} &= B_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + B_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \\ \Phi_{pl} &= C_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)] + C_2 \exp[i(k_{\tau x}x - k_{\tau z}z)], \\ u_{xpl} &= U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_{zpl} = U_2(z) \exp(ik_{1x}x),\end{aligned}\tag{4.2}$$

где A_0 — амплитуда падающей плоской волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2} = k_1 \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1$ в полупространстве $z < -h$ на оси координат x и z соответственно; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту плоской волны с осью z ; k_{2x} , k_{2z} — проекции волнового вектора прошедшей волны $\mathbf{k}_2$ на оси координат x и z ; $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2}$; $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [1] $k_{2x} = k_{lx} = k_{\tau x} = k_{1x}$.

В выражения для коэффициентов A_j , B_j , C_j ($j = 1, 2$) входят величины $U_2(-h)$, $U_1(0)$ и $U_2(0)$. Функции $U_n(z)$ ($n = 1, 2$) являются решением краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0,\tag{4.3}$$

с краевыми условиями

$$(\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{E}\mathbf{U})_{z=-h} = \mathbf{G}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{F}\mathbf{U})_{z=0} = 0,\tag{4.4}$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$; $\mathbf{A} = (A_{mn})$, $\mathbf{B} = (B_{mn})$, $\mathbf{C} = (C_{mn})$, $\mathbf{E} = (E_{mn})$, $\mathbf{F} = (F_{mn})$ — матрицы второго порядка; $\mathbf{G} = (G_m)_{2 \times 1}$ ($m, n = 1, 2$).

В [29] получено приближенное аналитическое решение краевой задачи (4.3), (4.4) в виде

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^4 \bar{C}_l U_n^l(z), \quad U_n^l(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2).\tag{4.5}$$

Коэффициенты $\bar{C}_l$ ($l = 1, 2, 3, 4$) определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^4 \bar{C}_l (\mathbf{A}\mathbf{U}^{l'} + \mathbf{E}\mathbf{U}^l)_{z=-h} &= D, \\ \sum_{l=1}^4 \bar{C}_l (\mathbf{A}\mathbf{U}_n^{l'} + \mathbf{F}\mathbf{U}^l)_{z=0} &= 0,\end{aligned}$$

где $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l)^T$.

Коэффициенты $U_n^{l(s)}$ ($n = 1, 2$; $l = 1, 2, 3, 4$) разложений (4.5) вычисляются по формулам

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{3l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{4l},$$

$$\begin{aligned}U_n^{l(s+2)} &= -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + B_{nq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)}U_q^{l(s-k)}\} \\ &\quad (s = 0, 1, \dots),\end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера;

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= \mu^{(k)}; \quad A_{12}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = 0; \quad A_{22}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}; \\ B_{11}^{(k)} &= (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \\ B_{22}^{(k)} &= (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}); \\ C_{11}^{(k)} &= -k_{1x}^2(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) + \omega^2\rho^{(k)}; \quad C_{12}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}; \\ C_{21}^{(k)} &= ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}. \end{aligned}$$

Используя интегральное представление функции $H_0(x)$ [30], запишем цилиндрическую волну (3.1) в виде

$$\psi_0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_0(\xi) d\xi, \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{\psi}_0(\xi) = A \frac{1}{\pi\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} e^{i\eta_1|z+z_0|}, \quad \eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}. \quad (4.7)$$

При $|\xi| > k$ величина η_1 становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im} \eta_1 \geq 0$ обеспечивает ограниченность поля падающей волны при $|z| \rightarrow \infty$. Таким образом, $\eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ при $-k_1 < \xi < k_1$ и $\eta_1 = i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}$ при $|\xi| > k_1$.

Произведение экспонент в подынтегральном выражении (4.7) представляет собой плоскую волну, направление распространения которой задается горизонтальной ξ и вертикальной η_1 компонентами волнового вектора $\mathbf{k}_1$.

При $z > -z_0$ формула (4.7) принимает вид (с учетом того, что $x_0 = 0$)

$$\tilde{\psi}_0(\xi) = I(\xi) e^{i(\xi x + \eta_1 z)}, \quad I(\xi) = A \frac{1}{\pi\eta_1} e^{i\eta_1 z_0}. \quad (4.8)$$

В дальнейшем величины, зависящие от ξ будем обозначать знаком «тильда».

Сравнивая формулы (4.8) и (4.1) замечаем, что подынтегральное выражение в (4.6), определяемое (4.8), аналогично по форме выражению плоской волны (4.1). При этом ξ соответствует k_{1x} , а $I(\xi) = A_0 e^{ik_{1z}h}$. Следовательно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\tilde{\psi}_0(\xi)$, потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ и компоненты вектора смещения $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_z$ в покрытии определяется формулами, аналогичными (4.2), в которых следует сделать указанные выше замены.

В результате будем иметь

$$\tilde{\psi}_1 = \tilde{A}_1 \exp\{i[\xi x - \eta_1(z+h)]\}, \quad \tilde{\psi}_2 = \tilde{A}_2 \exp\{i[\xi x + \eta_2(z-H)]\}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{B}_1 \exp[i(\xi x + \eta_l z)] + \tilde{B}_2 \exp[i(\xi x - \eta_l z)], \quad (4.10)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{C}_1 \exp[i(\xi x + \eta_\tau z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(\xi x - \eta_\tau z)], \quad (4.11)$$

$$\tilde{u}_x = \tilde{U}_1(z, \xi) \exp(i\xi x), \quad \tilde{u}_z = \tilde{U}_2(z, \xi) \exp(i\xi x), \quad (4.12)$$

где

$$\tilde{A}_1 = I(\xi) e^{-i\eta_1 h} + \frac{\omega}{\eta_1} \tilde{U}_2(-h, \xi); \quad (4.13)$$

$$\tilde{A}_2 = -\frac{i\omega}{\eta_2} \left[\eta_l (\tilde{B}_1 \tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2 \tilde{e}_{2l}) + \xi (\tilde{C}_1 \tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2 \tilde{e}_{2\tau}) \right]; \quad (4.14)$$

$$\tilde{B}_j = \tilde{\beta}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi) + \tilde{\beta}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi); \quad \tilde{C}_j = \tilde{\gamma}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi) + \tilde{\gamma}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi) \quad (j = 1, 2);$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \quad \eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}; \quad \eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2}; \\
\tilde{e}_{1l} &= e^{i\eta_l H}; \quad \tilde{e}_{2l} = e^{-i\eta_l H}; \quad \tilde{e}_{1\tau} = e^{i\eta_\tau H}; \quad \tilde{e}_{2\tau} = e^{-i\eta_\tau H}; \\
\tilde{\beta}_{11} &= \xi \tilde{t}_2 \tilde{w}_1; \quad \tilde{\beta}_{21} = \eta_\tau \tilde{r}_2 \tilde{w}_1; \quad \tilde{\beta}_{12} = \xi \tilde{t}_1 \tilde{w}_1; \quad \tilde{\beta}_{22} = -\eta_\tau \tilde{r}_1 \tilde{w}_1; \\
\tilde{\gamma}_{11} &= -\eta_l \tilde{q}_2 \tilde{w}_2; \quad \tilde{\gamma}_{21} = \xi \tilde{g}_2 \tilde{w}_2; \quad \tilde{\gamma}_{12} = \eta_l \tilde{q}_1 \tilde{w}_2; \quad \tilde{\gamma}_{22} = -\xi \tilde{g}_1 \tilde{w}_2; \\
\tilde{w}_1 &= \frac{-4i\mu_0 \tilde{s}_3}{\tilde{r}_1 \tilde{t}_2 + \tilde{r}_2 \tilde{t}_1}; \quad \tilde{w}_2 = \frac{4i\tilde{s}_1}{\tilde{g}_1 \tilde{q}_2 - \tilde{g}_2 \tilde{q}_1}; \\
\tilde{g}_j &= (-1)^j 4\tilde{s}_1 \eta_l \eta_\tau - (\tilde{s}_{7-j} \tilde{e}_{1l} + \tilde{s}_{9-j} \tilde{e}_{2l}) \tilde{e}_{j\tau}; \\
\tilde{q}_j &= 4\tilde{s}_1 \xi^2 + (\tilde{s}_{7-j} \tilde{e}_{1l} - \tilde{s}_{9-j} \tilde{e}_{2l}) \tilde{e}_{j\tau}; \\
\tilde{t}_j &= 4\mu_0 \tilde{s}_3 \eta_l \eta_\tau + (\tilde{s}_{6+(-1)^j} \tilde{e}_{2\tau} - \tilde{s}_{7+(-1)^j} \tilde{e}_{1\tau}) \tilde{e}_{jl}; \\
\tilde{r}_j &= 4\mu_0 \xi^2 \tilde{s}_3 + (-1)^j (\tilde{s}_{6+(-1)^j} \tilde{e}_{2\tau} + \tilde{s}_{7+(-1)^j} \tilde{e}_{1\tau}) \tilde{e}_{jl}; \\
\tilde{s}_1 &= (\lambda_0 + 2\mu_0) k_l^2 - 2\mu_0 \xi^2, \quad \tilde{s}_2 = 2\mu_0 \xi \eta_\tau; \quad \tilde{s}_3 = 2\xi^2 - k_\tau^2; \quad \tilde{s}_4 = \frac{\omega^2 \rho_2}{\eta_2}; \\
\tilde{s}_{4+j} &= \tilde{s}_3 (\tilde{s}_4 \eta_l - \tilde{s}_1) - 2\xi \eta_l (\tilde{s}_4 \xi - (-1)^j \tilde{s}_2); \\
\tilde{s}_{6+j} &= \tilde{s}_3 (\tilde{s}_4 \eta_l + \tilde{s}_1) - 2\xi \eta_l (\tilde{s}_4 \xi - (-1)^j \tilde{s}_2), \\
&(j = 1, 2).
\end{aligned}$$

Кроме того, указанные замены k_{1x} на ξ и A_0 на $I(\xi)e^{-i\xi h}$ следует произвести и в элементах матриц **B**, **C**, **E**, **F**, **D** краевой задачи (4.3), (4.4) для нахождения $\tilde{U}_n(z, \xi)$ ($n = 1, 2$) из преобразованного выражения (4.5).

Получим

$$\tilde{U}_n(z, \xi) = \sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \tilde{U}_n^l(z, \xi), \quad \tilde{U}_n^l(z, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{U}_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2), \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1^{l(0)} &= \delta_{1l}; \quad \tilde{U}_2^{l(0)} = \delta_{2l}; \quad \tilde{U}_1^{l(1)} = \delta_{3l}; \quad \tilde{U}_2^{l(1)} = \delta_{4l}; \\
\tilde{U}_n^{l(s+2)} &= -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \tilde{B}_{nq}^{(k)}] \tilde{U}_q^{l(s+1-k)} + \tilde{C}_{nq}^{(k)} \tilde{U}_q^{l(s-k)} \} \\
&(s = 0, 1, \dots); \\
\tilde{B}_{11}^{(k)} &= B_{11}^{(k)}; \quad \tilde{B}_{22}^{(k)} = B_{22}^{(k)}; \quad \tilde{B}_{12}^{(k)} = \tilde{B}_{21}^{(k)} = i\xi(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \\
\tilde{C}_{11}^{(k)} &= -\xi^2(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) + \omega^2 \rho^{(k)}; \quad \tilde{C}_{12}^{(k)} = i\xi(k+1)\mu^{(k+1)}; \\
\tilde{C}_{21}^{(k)} &= i\xi(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{22}^{(k)} = -\xi^2 \mu^{(k)} + \omega^2 \rho^{(k)}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $\tilde{C}_l$ ($l = 1, 2, 3, 4$) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \left(A\tilde{U}^{l'} + \tilde{E}\tilde{U}^l \right)_{z=-h} &= \tilde{D}, \\
\sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \left(A\tilde{U}_n^{l'} + \tilde{F}\tilde{U}^l \right)_{z=0} &= 0,
\end{aligned}$$

где $\tilde{U}^l(z, \xi) = (\tilde{U}_1^l, \tilde{U}_2^l)^T$;

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & i\xi\mu \\ i\xi\lambda & i\omega^2\rho_1/\eta_1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & i\xi\mu + \tilde{f}_{12} \\ i\xi\lambda + \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{pmatrix}; \quad \tilde{D} = (0; -2i\rho_1\omega I(\xi)e^{-i\xi h})^T;$$

$$\tilde{f}_{1j} = \mu_0[2\xi\sqrt{k_l^2 - \xi^2}(\tilde{\beta}_{j1} - \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_3(\tilde{\gamma}_{j1} + \tilde{\gamma}_{j2})];$$

$$\tilde{f}_{2j} = \tilde{s}_1(\tilde{\beta}_{j1} + \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_2(\tilde{\gamma}_{j1} - \tilde{\gamma}_{j2}) \quad (j = 1, 2).$$

Штрихи означают дифференцирование по z .

Чтобы обеспечить ограниченность поля прошедшей волны при $z \rightarrow \infty$, выбор знака корня

$\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$ осуществим из условия $\text{Im } \eta_2 \geq 0$, то есть

$$\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \text{ при } -k_2 < \xi < k_2, \quad \eta_2 = i\sqrt{\xi^2 - k_2^2} \text{ при } |\xi| > k_2.$$

Величины $\eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}$, $\eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2}$ определяются по формулам

$$\eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2} \text{ при } -k_l < \xi < k_l, \quad \eta_l = i\sqrt{\xi^2 - k_l^2} \text{ при } |\xi| > k_l;$$

$$\eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2} \text{ при } -k_\tau < \xi < k_\tau, \quad \eta_\tau = i\sqrt{\xi^2 - k_\tau^2} \text{ при } |\xi| > k_\tau.$$

При рассеянии цилиндрической волны пластиной с покрытием искомые потенциалы ψ_j ($j = 1, 2$), Ψ , Φ и компоненты вектора смещения u_x , u_z в неоднородном покрытии определяется путем интегрирования

$$\psi_j(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi) d\xi \quad (j = 1, 2), \quad (4.16)$$

$$\Psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\xi) d\xi, \quad \Phi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\xi) d\xi, \quad (4.17)$$

$$u_x(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_x(\xi) d\xi, \quad u_z(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_z(\xi) d\xi. \quad (4.18)$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи.

5. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ и $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при расположении источника в точке M_0 с координатами $(x = 0, z = -z_0)$. Точки наблюдения M_1 и M_2 в отраженном и прошедшем акустических полях имели координаты $(x = 0, z = -50H)$ и $(x = 0, z = 50H)$ соответственно. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1 = k_2$, $\rho_1 = \rho_2$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H , равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутирала, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \tilde{\rho} f(z), \quad \lambda = \tilde{\lambda} f(z), \quad \mu = \tilde{\mu} f(z).$$

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right) \quad (a_1 = 1), \quad f_2(z) = a_2 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 0,5 \right] \quad (a_2 = 1, 2).$$

Множитель a_j ($j = 1, 2$) выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине слоя было равно единице.

Несобственные интегралы (4.16) – (4.18) являются сходящимися. Они могут быть оценены только численно.

При вычислении интегралов (4.16) (когда $k_1 = k_2$) интервал интегрирования разбивался на участки (с учетом того, что $k_1 < k_l < k_\tau$)

$$(-\infty, -k_\tau), (-k_\tau, -k_l), (-k_l, -k_1), (-k_1, k_1), (k_1, k_l), (k_l, k_\tau), (k_\tau, +\infty).$$

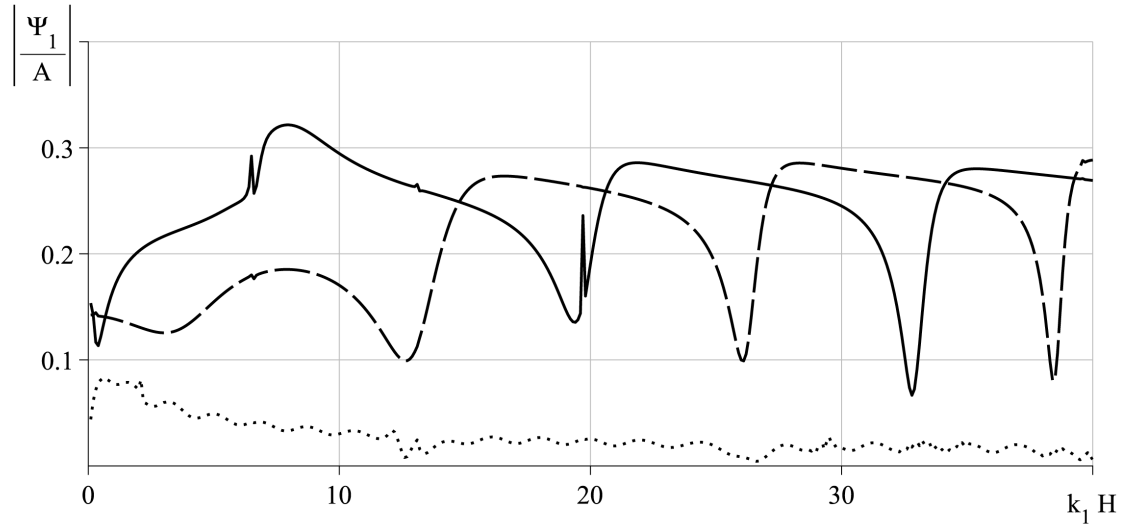


Рис. 2: Зависимость $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$

На рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ и $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$. Сплошной и штриховой линиями обозначены зависимости для линейного и квадратичного законов неоднородности соответственно. Пунктирной линией обозначена зависимость для однородного покрытия. Расчеты показывают сильное отличие частотных характеристик для разных законов неоднородности материала покрытия.

На рис. 4 приведены частотные характеристики $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ для линейного закона неоднородности при разном удалении источника от пластины. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям, когда $z_0 = 5H; 10H;$

$100H$. При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается существенное изменение частотной зависимости, что проявляется в изменении уровней и сдвиге резонансных частот.

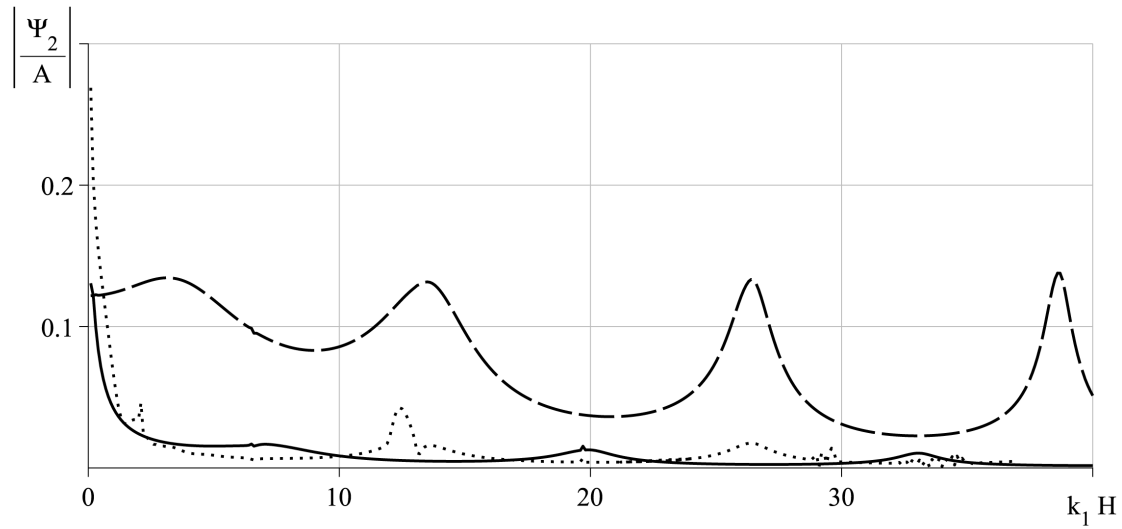


Рис. 3: Зависимость $\left| \frac{\psi_2}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$

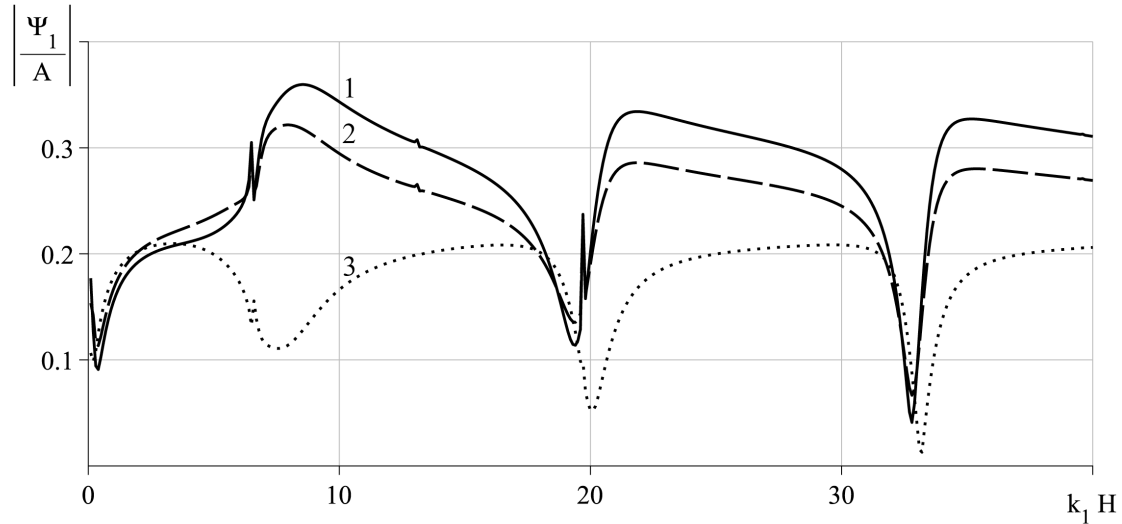


Рис. 4: Зависимость $\left| \frac{\psi_1}{A} \right|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для линейного закона неоднородности при

6. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником, через однородную упругую пластину с покрытием, выполненным из функционально-градиентного материала. При этом упругие свойства покрытия непрерывно изменяются по его толщине.

С помощью неоднородных покрытий можно изменять характер отражения и прохождения звука путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия пластины. Полученное решение задачи позволяет выявить закономерности изменения характеристик отраженных и преломленных акустических полей, а также упругого поля в пластине для покрытия из материалов с разными видами неоднородности и при различных

значениях волнового размера пластины.

Актуальность таких задач обусловлена потребностью промышленности в конструировании новых композитных материалов с высокими звукоизолирующими свойствами. Развитие методов ультразвуковой дефектоскопии невозможно без теоретического исследования волновых процессов, а именно процессов отражения, преломления, трансформации волн в упругих структурах разной конфигурации, в том числе в пластинах. Необходимость решения подобных волновых задач возникает в гидро- и сейсмоакустике, в физической акустике, в медицинской диагностике.

На основе решения прямой задачи можно рассмотреть обратную задачу об определении законов неоднородности материала покрывающего слоя, позволяющих получить требуемые звукоотражающие свойства пластины в заданных диапазонах частот.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
3. Ларин Н. В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145 – 153.
4. Ларин Н. В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109 – 123.
5. Лонкевич М. П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85 – 92.
6. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122 – 129.
7. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212 – 218.
8. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740 – 744.
9. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78 – 83.
10. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 5. С. 179 – 184.
11. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029 – 1035.
12. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650 – 659.
13. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108 – 116.

14. Huang C., Nutt S. An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials // J. of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330. No. 6. P. 1153 – 1165.
15. Шамаев А. С., Шумилова В. В. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акустический журн. 2015. Т. 61. Вып. 1. С. 10 – 20.
16. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 5. С. 552 – 558.
17. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246 – 257.
18. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.
19. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.
20. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.
21. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.
22. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 289 – 302.
23. Нгуен Т. Ш. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 5. С. 404 – 414.
24. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.
25. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 423 – 437.
26. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.
27. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика, 2014. № 2. С. 36 – 47.

28. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
29. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Определение поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 310 – 321.
30. Фелсен Л., Маркувиц М. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 557 с.

REFERENCES

1. Brekhovskikh, L. M. 1973, “*Waves in Layered Media*”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
2. Shenderov, E. L. 1972, “*Wave problems of underwater acoustics*”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
3. Larin, N. V. 2015, “The transmission of sound through a uniform thermoelastic plane layer”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 145 – 153, [in Russian].
4. Larin, N. V. 2017, “Analysis of the resonance sound scattering by a thermoelastic plate”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 4, pp. 109 – 123, [in Russian].
5. Lonkevitch, M. P. 1971, “Transmission of sound through a finite-thickness layer of a transversal-isotropic materia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 17, no. 1, pp. 85 – 92, [in Russian].
6. Shenderov, E. L. 1984, “Sound propagation through transversally-isotropic plate”, *Akust. Zhurnal*, vol. 30, no. 1, pp. 122 – 129, [in Russian].
7. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, “Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media”, *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 2, pp. 212 – 218, [in Russian].
8. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, “Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no. 4, pp. 740 – 744, [in Russian].
9. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, “Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate”, *Defektoskopiya*, no. 8, pp. 78 – 83, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 1999, “Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no. 5, pp. 936 – 941.
11. Tolokonnikov, L. A. 1998, “The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 62, no. 6, pp. 953 – 958.
12. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, “The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no. 4, pp. 590 – 598.
13. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, “Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no. 1, pp. 95 – 102.
14. Huang C. & Nutt S. 2011, “An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 6, pp. 1153 – 1165.

15. Shamaev A. S. & Shumilova V. V. 2015, "Passage of a plane acoustic wave through a layered composite with components of elastic and viscoelastic materials", *Acoustical Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 8 – 18.
16. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no. 5, pp. 504 – 510.
17. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining the parameters of anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7-2, pp. 246 – 257, [in Russian].
18. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 219 – 226, [in Russian].
19. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modeling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no. 4, pp. 339 – 344.
20. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11-2, pp. 216 – 234, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 6, pp. 362 – 372, [in Russian].
22. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311 – 324, [in Russian].
23. Nguyen, T. S. 2021, "About reflection and transmission of a plane sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 5, pp. 404 – 414, [in Russian].
24. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7, pp. 83 – 92, [in Russian].
25. Tolokonnikov, L. A. & Tolokonnikov, L. A. 2021, "Reflection and refraction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423 – 437, [in Russian].
26. Piquette J. C. 1988, "Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, No. 4, pp. 1284 – 1294.
27. Shushkevich G. Ch. & Kiselyova N. N. 2014, "Sound field shielding by flat elastic layer and thin unclosed spherical shell", *Informatika*, no. 2, pp. 36 – 47, [in Russian].
28. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
29. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2020, "Determination of the displacement field in an inhomogeneous coating of an elastic plate when passing through her plane sound wave", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 310 – 321, [in Russian].

-
30. Felsen L.B., Marcuvitz N. 1973, *“Radiation and scattering of waves”*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Получено 18.02.2022 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.