

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-293-311

Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука¹

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Толконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение при дифракции гармонической цилиндрической звуковой волны. Полагается, что упругий цилиндр является однородным и изотропным, материал покрытия является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями, тело помещено в безграничную идеальную жидкость.

Получено аналитическое решение прямой задачи дифракции. Определены рассеянное акустическое поле и волновые поля в цилиндре и его покрытии.

Волновые поля в содержащей среде и однородном изотропном цилиндре описываются разложениями по цилиндрическим волновым функциям, а для нахождения полей смещений в неоднородном анизотропном слое построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Получено аналитическое решение обратной задачи дифракции об определении законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих минимальное рассеяние звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения, а также в заданном секторе наблюдения при фиксированной частоте. Построены функционалы, выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения. Минимизация функционалов осуществлена с помощью алгоритма имитации отжига.

Представлены результаты численных расчетов частотных и угловых зависимостей интенсивности рассеянного акустического поля в дальней зоне при оптимальных параболических законах неоднородности.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное анизотропное покрытие.

Библиография: 34 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 293–311.

¹Исследование выполнено за счет гранта российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-293-311

Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection²

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

The article deals with the mathematical modeling of an inhomogeneous anisotropic coating of the elastic cylinder, providing the least reflection upon diffraction of a harmonic cylindrical sound wave. It is assumed that the elastic cylinder is homogeneous and isotropic, the coating material is radially inhomogeneous and transversely isotropic, the laws inhomogeneities of the coating material are described by continuous functions, the body is placed in a boundless ideal fluid.

An analytical solution of the direct diffraction problem is obtained. The scattered acoustic field and wave fields in the cylinder and its coating are defined.

Wave fields in a containing medium and a homogeneous isotropic cylinder are described by expansions in cylindrical wave functions. A boundary value problem is constructed for a system of ordinary differential equations of the second order for finding displacement fields in an inhomogeneous anisotropic layer.

An analytical solution of the inverse problem of the diffraction about the determination of the inhomogeneity laws of the coating material, ensuring the minimum sound scattering in the specified frequency range at a fixed angle of observation and also at a given observation sector at a fixed frequency is obtained. The functionals expressing the average intensity of sound scattering in given frequency range and angular sector of observation are built. Minimization of the functionals are implemented with the help of the burnout simulation algorithm.

The results of numerical calculations of frequency and angular dependencies of the intensity of the scatter acoustic field in the far zone at the optimal parabolic inhomogeneity laws are presented.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic coating.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2022, “Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293–311.

²Supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

1. Введение

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. Решены прямая [1] и обратная [2] задачи рассеяния плоской волны на однородном изотропном упругом цилиндре с однородной упругой облицовкой. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [3]. Рассеяние плоской звуковой волны однородным упругим цилиндром, покрытым вязкоупругим слоем и находящимся в вязкой жидкости изучено в [4]. Прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием решены в [5]. В [6, 7] рассматривается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. В [8, 9] получены решения задач о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [10], а с дискретно-слоистым покрытием — в [11]. Дифракция цилиндрических и сферических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием исследована в [12, 13]. Рассеяние звука на термоупругом цилиндре с радиально-неоднородным термоупругим покрытием изучено в работах [14, 15]. При этом в [15] рассмотрены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении оптимальных законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение. В [16, 17] проведено математическое моделирование радиально-неоднородного изотропного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами. В [18] получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, имеющем цилиндрическую полость и радиально-неоднородное изотропное покрытие, на основе которой рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих минимальное звукоотражение. Решены прямая [19] и обратная [20] задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской идеальной поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой). Дифракция цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным изотропным упругим покрытием, находящемся вблизи поверхности упругого полупространства исследована в [21].

Задачи дифракции звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами решены в [22, 23]. В [24] исследовано рассеяние звука абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, одна граница которого является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой.

В [25] изучено рассеяние звуковых волн, излучаемых линейным источником, абсолютно жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным изотропным покрытием в плоском волноводе, когда одна из границ волновода является идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой), а другая сколь угодно мало отличается от идеальной. В [26, 27] решены обратные задачи дифракции звука об определении оптимальных квадратичных и кубических законов неоднородности изотропного покрытия упругого цилиндра в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в заданном сечении волновода.

В настоящей работе рассматривается математическое моделирование радиально-неоднородного трансверсально-изотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука при дифракции гармонической цилиндрической звуковой волны.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий цилиндр бесконечной длины и радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр покрыт упругим радиально-неоднородным трансверсально-изотопным слоем с внешним радиусом r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндра и является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия. Полагаем, что модули упругости λ_{ijkl} материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты r : $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(r)$, $\rho = \rho(r)$.

Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр с покрытием падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод и ось которого параллельна оси цилиндра. В системе координат r, φ, z ось источника имеет координаты (r_0, φ_0) (рис. 1). Выберем дополнительную цилиндрическую систему координат R, θ, z , связанную с источником так, чтобы полярные оси основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы. Тогда потенциал скоростей гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m , может быть представлен в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp[i(m\theta - \omega t)],$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; ω — круговая частота; $H_m(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; R — расстояние между источником и точкой наблюдения;

$$R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}.$$

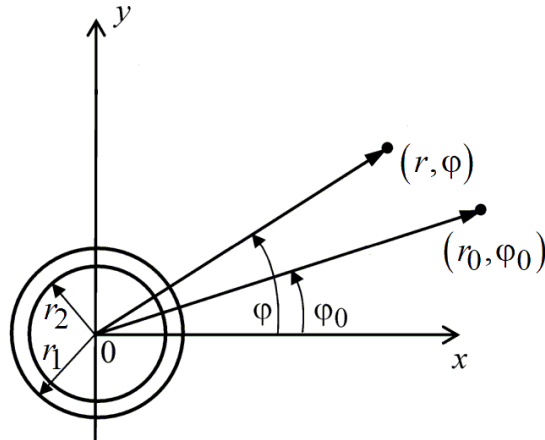


Рис. 1: Геометрия задачи

Структура цилиндрических волн существенно сложнее структуры плоских волн. Простейшая монохроматическая симметричная цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси z , описывается с помощью цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка. Потенциал скоростей такой волны представляется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t).$$

В дальнейшем временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном трансверсально-изотропном слое. На основе решения прямой задачи найдем решение обратной задачи дифракции об определении законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих минимальное рассеяние звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения, а также в заданном секторе наблюдения при фиксированной частоте.

3. Аналитическое решение прямой задачи

В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z .

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [28]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_s,$$

где Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны.

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций, представим потенциал скорости падающей волны в основной системе координат в виде [29]

$$\begin{aligned} \Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} H_{m-n}(kr_0) J_n(kr), & r < r_0; \\ J_{m-n}(kr_0) H_n(kr), & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n .

Учитывая, что [29]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad H_{-n}(x) = (-1)^n H_n(x),$$

из (3.1) для симметричной цилиндрической волны получаем разложение

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(kr_0) J_n(kr), & r < r_0; \\ J_n(kr_0) H_n(kr), & r > r_0. \end{cases}$$

С учетом условий излучения на бесконечности [28] потенциал скорости рассеянной волны Ψ_s , являющийся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3.2)$$

Рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре.

Представим вектор смещения частиц в однородном изотропном упругом цилиндре $\mathbf{u}_0$ в виде

$$u_0 = \text{grad } L + \text{rot } \Phi,$$

где L и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения. В случае установившегося режима колебаний эти потенциалы являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [28]

$$\Delta L + k_l^2 L = 0,$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0,$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Так как упругое тело находится в условиях плоской деформации, то $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z . Тогда векторный потенциал

$$\Phi = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z.$$

В этом случае векторное уравнение относительно Φ сводится к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi(r, \varphi)$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Функции L и Φ с учетом условия ограниченности будем искать в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (3.3)$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_\tau r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3.4)$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0$ в цилиндрической системе координат записываются через функции L и Φ следующим образом:

$$u_{0r} = \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения $\mathbf{u}_0$ в однородном изотропном цилиндре имеют вид

$$\sigma_{0rr} = \lambda_0 \left[\frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) \right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0\varphi\varphi} = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right).$$

Выразим компоненты тензора напряжений σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$ через функции L и Φ . Учитывая, что $\Delta L = -k_l^2 L$, получим

$$\sigma_{0rr} = -\lambda_0 k_l^2 L + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right).$$

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды [30], которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где u_r , u_φ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое; $\rho = \rho(r)$.

Для трансверсально-изотропного покрытия цилиндра осью упругой симметрии является всякая прямая, проходящая через ось анизотропии и перпендикулярная к ней. При этом поверхностями изотропии являются цилиндрические поверхности, а тензор модулей упругости Λ в соответствии с нотацией Фойгта [31] может быть записан в матричной форме

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix},$$

где λ_{ik} — модули упругости материала покрытия в двухиндексном обозначении, где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

В соответствии с обобщенным законом Гука [30] компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij} соотношениями

$$\sigma_{rr} = \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (3.6)$$

где

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (3.7)$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r , u_φ будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad u_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3.8)$$

Подставляя разложения (3.6) в уравнения (3.5) с учетом (3.7) и (3.8), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ для каждого n

$$\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r), U_{2n}(r))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{2 \times 2}$, $\hat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{2 \times 2}$, $\hat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{2 \times 2}$ — матрицы второго порядка с элементами

$$a_{n11} = \lambda_{11}r^2, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0, \quad a_{n22} = \lambda_{55}r^2,$$

$$\begin{aligned}
b_{n11} &= \lambda'_{11} r^2 + \lambda_{11} r, & b_{n12} &= b_{n21} = in (\lambda_{12} + \lambda_{55}) r, & b_{n22} &= \lambda'_{55} r^2 + \lambda_{55} r, \\
c_{n11} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{55} + \lambda'_{12} r - \lambda_{22}, & c_{n12} &= in (\lambda'_{22} r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\
c_{n21} &= in (\lambda'_{55} r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), & c_{n22} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{22} - \lambda'_{55} r - \lambda_{55}.
\end{aligned}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Коэффициенты A_n , B_n , C_n разложений (3.2) – (3.4) и функции U_{1n} , U_{2n} из разложений (3.8) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения:

$$\text{при } r = r_1 \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0.$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r = r_2 \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты A_n , выраженные через $U_{1n}(r)$

$$A_n = -\frac{A\alpha_{mn}kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)},$$

где

$$\alpha_{mn} = (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0) \exp(im\varphi_0).$$

В случае симметричной падающей волны ($m = 0$) получаем $\alpha_{0n} = H_n(kr_0)$ и

$$A_n = -\frac{AH_n(kr_0)kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)}, \quad (3.10)$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим неизвестные коэффициенты B_n и C_n , выраженные через $U_{1n}(r_2)$ и $U_{2n}(r_2)$:

$$B_n = \gamma_{1n}U_{1n}(r_2) + \gamma_{2n}U_{2n}(r_2), \quad C_n = \gamma_{3n}U_{1n}(r_2) + \gamma_{4n}U_{2n}(r_2),$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{1n} &= k_\tau r_2 J'_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, & \gamma_{2n} &= in J_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, \\
\gamma_{3n} &= in J_n(k_l r_2) / \Delta_n, & \gamma_{4n} &= -k_l r_2 J'_n(k_l r_2) / \Delta_n, \\
\Delta_n &= [k_l r_2^2 J'_n(k_l r_2) k_\tau J'_n(k_\tau r_2) - n^2 J_n(k_l r_2) J_n(k_\tau r_2)] / r_2.
\end{aligned}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (3.10)

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n)_{r=r_1} &= \mathbf{G}_n, \\
(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n)_{r=r_2} &= 0,
\end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\mathbf{G}_n = (g_{n1}, 0)^T$; $\hat{\mathbf{D}}_n = (d_{nij})_{2 \times 2}$, $\hat{\mathbf{F}}_n = (f_{nij})_{2 \times 2}$ – матрицы второго порядка;

$$g_{n1} = 2A\rho_1\omega r_1\alpha_{mn} / (\pi k H'_n(kr_1)), \quad d_{n11} = r\lambda_{12} + \rho_1\omega^2 r^2 H_n(kr) / (k H'_n(kr)),$$

$$d_{n12} = inr\lambda_{12}, \quad d_{n21} = inr\lambda_{55}, \quad d_{n22} = -r\lambda_{55},$$

$$f_{n11} = r^2 [\gamma_{1n}e_{1n} + \gamma_{3n}e_{2n} + \lambda_{12}/r], \quad f_{n12} = r^2 [\gamma_{2n}e_{1n} + \gamma_{4n}e_{2n} + in\lambda_{12}/r],$$

$$\begin{aligned}
 f_{n21} &= \mu_0 r^2 [\gamma_{1n} e_{3n} + \gamma_{3n} e_{4n} + i n \lambda_{55} / (\mu_0 r)], \quad f_{n22} = \mu_0 r^2 [\gamma_{2n} e_{3n} + \gamma_{4n} e_{4n} - \lambda_{55} / (\mu_0 r)]; \\
 e_{1n} &= [\lambda_0 n^2 J_n(k_l r) - k_l^2 r^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) J_n''(k_l r) - \lambda_0 k_l r J_n'(k_l r)] / r^2, \\
 e_{2n} &= 2\mu_0 i n [J_n(k_\tau r) - k_\tau r J_n'(k_\tau r)] / r^2, \quad e_{3n} = 2i n [J_n(k_l r) - k_\eta r J_n'(k_l r)] / r^2, \\
 e_{4n} &= [k_\tau^2 r^2 J_n''(k_\tau r) - k_\tau r J_n'(k_\tau r) + n^2 J_n(k_\tau r)] / r^2.
 \end{aligned}$$

Решая краевую задачу (3.9), (3.11) каким-либо методом, определим неизвестные функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$. Затем вычислим коэффициенты A_n , B_n , C_n . В результате получим аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ($kr \gg 1$). Используя асимптотическое представление функции Ганкеля при больших значениях аргумента [32]

$$H_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (3.12)$$

из (3.2) находим

$$\Psi_s \approx A \sqrt{\frac{r_1}{2r}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] F(\omega, \varphi),$$

где

$$F(\omega, \varphi) = \frac{2}{A \sqrt{\pi k r_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n \exp [i n (\varphi - \varphi_0) - i \omega t]$$

Отметим, что из полученного решения прямой задачи дифракции цилиндрических волн на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропном покрытием можно получить решение для случая, когда падающая волна является плоской. Для этого следует заменить в (3.10) функцию $H_n(kr_0)$ ее асимптотическим выражением согласно (3.12), считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($kr_0 \gg 1$). В результате получим решение задачи дифракции плоской волны с амплитудой $A \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp[i(kr_0 - \frac{\pi}{4})]$, распространяющейся перпендикулярно оси цилиндра в направлении волнового вектора, образующего угол $\pi - \varphi_0$ с положительным направлением оси x .

4. Аналитическое решение обратной задачи

На основе решения прямой задачи определим такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi_*$ и в заданном секторе наблюдения $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ при фиксированной частоте $\omega = \omega_*$.

Будем считать, что функции ρ , λ_{11} , λ_{12} , λ_{22} , λ_{55} аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r , то есть будем рассматривать следующие параболические законы неоднородности трансверсально-изотропного упругого материала покрытия:

$$\eta(r) = \eta^* \bar{\eta}(r), \quad (4.1)$$

где

$$\bar{\eta}(r) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)} r + \eta^{(2)} r^2. \quad (4.2)$$

Здесь и далее под символом η подразумевается каждая из величин ρ , λ_{ij} , а под символом η^* — характерные величины для механических свойств материала покрытия. Отметим, что значение модуля упругости λ_{23} не фиксируется, так как он не присутствует ни в уравнениях (3.9), ни в краевых условиях (3.11).

В качестве меры звукового рассеяния введем величину $I(\omega, \varphi) = |F(\omega, \varphi)|^2$ — интенсивность звукового рассеяния. Построим функционалы вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, \varphi_*) d\omega, \quad (4.3)$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I(\omega_*, \varphi) d\varphi, \quad (4.4)$$

определенные на классе параболических функций (4.2) и выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов функций (4.2), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (4.2), определенных на отрезке $[r_2, r_1]$, введем ограничения

$$C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(r) \leq C_{2\eta}, \quad (4.5)$$

где $C_{1\eta}, C_{2\eta}$ — некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (4.5) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат $f(r)$ бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \{(r, f) : r_2 \leq r \leq r_1, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\}.$$

В области Ω каждая функция $f(r)$ единственным образом определяется тремя точками $G_{0\eta}(r_2, f_{0\eta}), G_{1\eta}(\bar{r}, f_{1\eta}), G_{2\eta}(r_1, f_{2\eta})$, где $\bar{r} = (r_2 + r_1)/2$, $f_{q\eta} \in [C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ ($q = 0, 1, 2$).

Подставляя значения точек $G_{0\eta}, G_{1\eta}, G_{2\eta}$ в выражение (4.2), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$. Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= [f_{0\eta} r_1 \bar{r} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} r_1 r_2 (r_1 - r_2) + f_{2\eta} \bar{r} r_2 (r_2 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(1)} &= [f_{0\eta} (r_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\eta} (r_2^2 - r_1^2) + f_{2\eta} (\bar{r}^2 - r_2^2)] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(2)} &= [f_{0\eta} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} (r_1 - r_2) + f_{2\eta} (r_2 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \Delta_\eta &= (r_1 - r_2) (r_1 r_2 - r_1 \bar{r} - r_2 \bar{r} + \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ значения ординат $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$ и вычисляя с помощью соотношений (4.6) значения коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, получаем параболические законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$r_2 \leq -\eta^{(1)} / (2\eta^{(2)}) \leq r_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[r_2, r_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$, то есть при выполнении условия

$$C_{1\eta} \leq \eta^{(0)} - \eta^{(1)2} / (4\eta^{(2)}) \leq C_{2\eta}. \quad (4.7)$$

Поиск значений коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ функций (4.2), удовлетворяющих условиям (4.5) и минимизирующих функцию

$$\Phi_m \left(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \lambda_{55}^{(0)}, \lambda_{55}^{(1)}, \lambda_{55}^{(2)} \right) \rightarrow \min \quad (m = 1, 2), \quad (4.8)$$

осуществим с помощью алгоритма имитации отжига [33].

Введем для ординаты $f_{q\eta}$ ($q = 0, 1, 2$) точки $G_{q\eta}$ на отрезке $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ равномерную сетку $f_{q\eta}^{(l_{q\eta})} = C_{1\eta} + l_{q\eta}h$. Здесь $l_{q\eta}$ — номер узла сетки, $h = (C_{2\eta} - C_{1\eta})/\tilde{n}$ — шаг сетки, $\tilde{n}$ — количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$.

Нахождение оптимального набора коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ осуществим с помощью процедуры поиска минимума функции пятнадцати переменных (4.8). Алгоритм имитации отжига представляет собой метод решения задачи глобальной оптимизации. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов.

На первом этапе из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной сетке случайным образом выбирается начальная точка — совокупность пятнадцати значений

$$f^{(0)} = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, \dots, f_{0\lambda_{55}}, f_{1\lambda_{55}}, f_{2\lambda_{55}}).$$

На втором этапе в качестве минимального значения устанавливается текущий уровень энергии $E_{\min} = \Phi_m(f^{(0)})$, а также начальное и конечное значения температуры — $T_{\max} = T(1)$ и $T_{\min}$, которые определяют количество выполняемых итераций в вычислительном процессе.

Понижение температуры определяется законом $T(j) = T_{\max}/j^{(1/w)}$, где w — число параметров, оптимизирующих значение функции Φ_m .

Итерация j основного цикла выглядит следующим образом:

1) Сгенерировать новую точку $f^{(j)}$ по правилу

$$f^{(j)} = f^{(j-1)} + T(j) \cdot X, \quad X \sim C(0, 1),$$

где $C(0, 1)$ — стандартное распределение Коши размерности w .

2) Вычислить новое значение энергии $E_j = \Phi_m(f^{(j)})$.

3) Сравнить энергию системы E_j в состоянии $f^{(j)}$ с найденным к текущему моменту минимальным значением $E_{\min}$. Если $E_j < E_{\min}$, то необходимо изменить текущее значение минимума $E_{\min} = E_j$, понизить значение температуры и перейти к следующей итерации. Если $E_j \geq E_{\min}$, то следует перейти к следующему шагу.

4) Сгенерировать случайную величину $\tilde{\alpha}$, равномерно распределенную на интервале $(0, 1)$.

5) Понизить значение температуры системы. Вычислить вероятность принятия нового состояния системы, которая в соответствии с распределением Гиббса равна

$$P(\Delta E, T(j)) = \exp[(E_{\min} - E_j)/T(j)].$$

Если $\tilde{\alpha} < P(\Delta E, T(j))$, то необходимо изменить текущее значение минимума и перейти к следующей итерации.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока выполняется условие $T(j) > T_{\min}$.

Так как поставленная задача решается на некотором дискретном множестве значений $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$, то на первый шаг основного цикла накладываются дополнительные условия. В том случае, если найденное значение $f^{(j)}$ выходит за пределы области Ω , то $f^{(j)}$ вычисляется заново. Также сгенерированное значение $f^{(j)}$ может не соответствовать узлам введенной сетки. В таком случае $f^{(j)}$ округляется до ближайшего узла.

Найденный таким образом локальный минимум функции Φ_m и соответствующий ему набор коэффициентов зависит как от выбора начальной точки, так и от значения шага h , вектора

X , а также значений $\tilde{\alpha}$, $P(\Delta E, T(j))$, которые за одну полную процедуру поиска могут вычисляться достаточно большое количество раз. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется M раз, а в качестве конечного решения выбирается наилучший найденный результат.

5. Численные исследования

Проведены расчеты параметров в законах неоднородности (4.1), обеспечивающих минимальное рассеяние звука. Полагалось, что магниевый цилиндр ($\rho_0 = 1,74 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 1,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 0,8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0,2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). При расчетах рассматривались два типа характерных модулей упругости неоднородного трансверсально-изотропного цилиндрического слоя, а также случай изотропного неоднородного покрытия. Изотропной базой всех материалов был алюминий с характерной плотностью $\rho^* = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Характерные значения модулей упругости приведены в таблице.

Характерные величины модулей упругости ($\times 10^{10}$) Н/м²

Материал	λ_{11}^*	λ_{12}^*	λ_{22}^*	λ_{55}^*
Тип 1	5,74	3,28	16,4	2,54
Тип 2	16,4	0,82	5,74	2,95
Изотропный	10,5	5,3	10,5	2,6

Предполагалось, что линейный источник излучает симметричную звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 4r_1$ и $\varphi_0 = \pi$.

Решение краевой задачи (3.9), (3.11) получено методом сплайн-коллокации [34].

В ограничениях (4.7) полагалось $C_{1\eta} = 0,5$ и $C_{2\eta} = 1,5$ для всех функций $\eta = \rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}$.

При расчетах использовались следующие параметры алгоритма имитации отжига. Шаг сетки полагался $h = 0.125$. Размерность пространства параметров $w = 15$, а в качестве минимального и максимального значений температуры были выбраны значения $T_{\min} = 5$ и $T_{\max} = 10$, что обеспечило 32768 итераций за одну полную процедуру поиска оптимальных значений. Для каждого типа входных данных эксперимент выполнялся $M = 10$ раз.

Все допустимые законы неоднородности материала покрытия изображены на рис. 2.

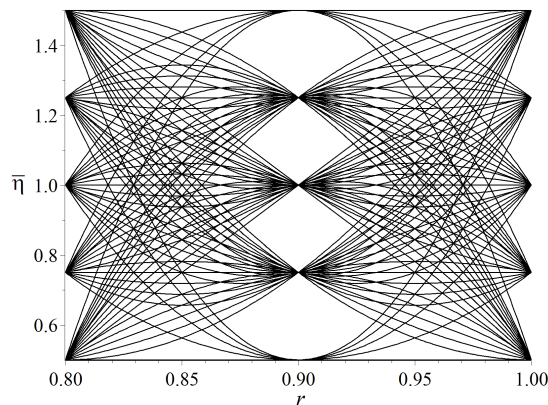


Рис. 2: Допустимые параболические зависимости

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при фиксированном угле $\varphi_* = \pi$ в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке $6 \leq kr_1 \leq 8$ имеют вид:

тип 1

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (-12,5r^2 + 17,5r - 4,5), \\ \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (-56,25r^2 + 99,375r - 42,625), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 112,5r - 49,5), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-18,75r^2 + 34,375r - 15), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (25r^2 - 45r + 21,5); \end{aligned} \quad (5.1)$$

тип 2

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (37,5r^2 - 67,5r + 31,5), \\ \lambda_{11} &= 16,4 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\ \lambda_{12} &= 0,82 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5), \\ \lambda_{22} &= 5,74 \cdot 10^{10} (12,5r^2 - 27,5r + 15,5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (-43,75r^2 + 81,875r - 37); \end{aligned} \quad (5.2)$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (6,25r^2 - 13,125r + 8), \\ \lambda_{11} &= 10,5 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5), \\ \lambda_{12} &= 5,3 \cdot 10^{10} (6,25r^2 - 11,875r + 6,75), \\ \lambda_{22} &= 10,5 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5), \\ \lambda_{55} &= 2,6 \cdot 10^{10} (25r^2 - 50r + 25,5). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для оптимальных законов неоднородности (5.1) — (5.3) значения функционала Φ_1 равны $1,26 \cdot 10^{-2}$, 10^{-2} и $1,23 \cdot 10^{-2}$ соответственно. Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала Φ_1 для упругого цилиндра без покрытия, равное $1,86 \cdot 10^{-2}$.

Для случая фиксированной частоты ω_* , которой соответствует волновой размер цилиндра $kr_1 = 6$, в угловом секторе $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

тип 1

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (-100r^2 + 180r - 79,5), \\ \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (37,5r^2 - 67,5r + 31,5), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-56,25r^2 + 100,625r - 43,875), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-6,25r^2 + 11,875r - 5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81,5); \end{aligned} \quad (5.4)$$

тип 2

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (56,25r^2 - 101,875r + 46,875), \\ \lambda_{11} &= 16,4 \cdot 10^{10} \cdot 1,5, \\ \lambda_{12} &= 0,82 \cdot 10^{10} (-12,5r^2 + 26,25r - 26), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\lambda_{22} = 5,74 \cdot 10^{10} (87,5r^2 - 157,5r + 71,5),$$

$$\lambda_{55} = 2,54 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 113,75r - 50,375);$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 (62,5r^2 - 112,5r + 51,5), \\ \lambda_{11} &= 10,5 \cdot 10^{10} (25r^2 - 47,5r + 23,5), \\ \lambda_{12} &= 5,3 \cdot 10^{10} (18,75r^2 - 29,375r + 12,125), \\ \lambda_{22} &= 10,5 \cdot 10^{10} (37,5r^2 - 67,5r + 31,5), \\ \lambda_{55} &= 2,6 \cdot 10^{10} \cdot 0,5.\end{aligned}\tag{5.6}$$

При этом наименьшие значения функционала Φ_2 при найденных оптимальных законах (5.4) — (5.5) для анизотропии типов 1 и 2 равны $\Phi_2 = 0,69 \cdot 10^{-2}$ и $\Phi_2 = 0,51 \cdot 10^{-2}$, а для изотропного покрытия $\Phi_2 = 0,56 \cdot 10^{-2}$. Для упругого цилиндра без покрытия $\Phi_2 = 1,15 \cdot 10^{-2}$.

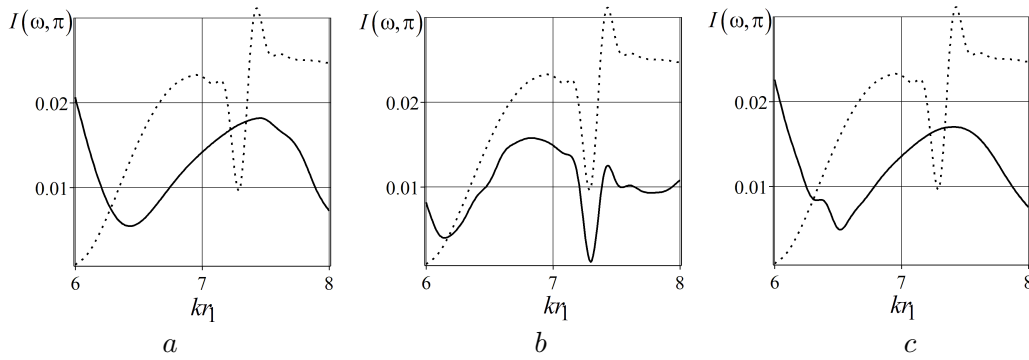


Рис. 3: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния

Для иллюстрации эффективности предложенных покрытий проведены расчеты частотных и угловых зависимостей интенсивности рассеяния звука.

На рис. 3 приведены зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ от волнового размера kr_1 при $\varphi = \pi$ в диапазоне $6 \leq kr_1 \leq 8$. Сплошными линиями изображены частотные зависимости для цилиндров, имеющих покрытия с оптимальными законами неоднородности (5.1) (рис. 3a), (5.2) (рис. 3b) и (5.3) (рис. 3c).

На рис. 4 приведены угловые зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ при фиксированной частоте $\omega = 6c/r_1$ в угловом секторе $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$. Сплошными линиями показаны зависимости для цилиндров с оптимальными покрытиями (5.4) (рис. 4a), (5.5) (рис. 4b) и (5.6) (рис. 4c).

Пунктирными линиями обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

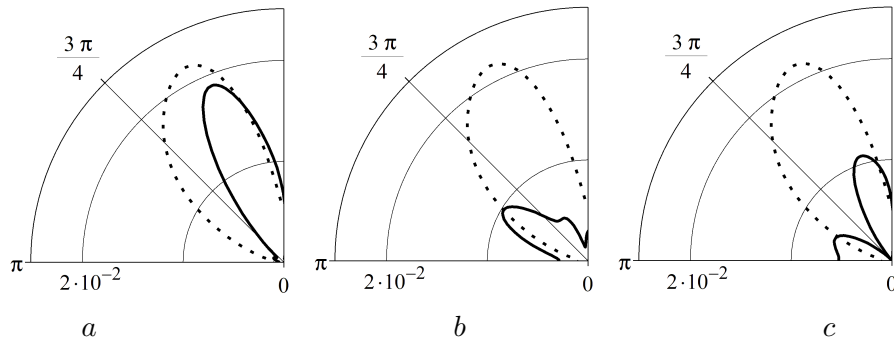


Рис. 4: Угловые зависимости интенсивности звукового рассеяния

6. Заключение

В настоящей работе получены аналитические решения прямой и обратной задач дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным покрытием. Осуществлено математическое моделирование покрытия, позволяющего достигать минимальное звукоотражение в определенном направлении и заданном диапазоне частот, а также при фиксированной частоте и в заданном угловом секторе наблюдения.

Проведенные численные исследования показали эффективность неоднородных покрытий, материал которых имеет разные типы анизотропии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Honarvar F., Sinclair A. Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod. // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102. No. 1. P. 41–48.
2. Fathi-Haftshejani P., Honarvar F. Nondestructive evaluation of clad rods by inversion of acoustic scattering data // J. of Nondestructive Evaluation. 2019. Vol. 38. No. 3 (67). P. 1–9.
3. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34–37.
4. Hasheminejad S.M., Safari N. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids // J. of Sound and Vibration. 2005. Vol. 280. No. 1. P. 101–125.
5. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791–798.
6. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.
7. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
8. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
9. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202–208.
10. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
11. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
12. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460–472.

13. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
14. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154–173.
15. Ларин Н. В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 9. Часть 1. С. 395–403.
16. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54–62.
17. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189–199.
18. Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67–81.
19. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
20. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О влиянии неоднородного покрытия упругого цилиндра на рассеяние звука в присутствии плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2020. Вып. 9. С. 111–118.
21. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
22. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 43–53.
23. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 76–83.
24. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270–281.
25. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Рассеяние цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 97–113.
26. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 315–323.

27. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 354–368.
28. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
29. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
30. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
31. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
32. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
33. Лопатин А. С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Вып. 1. С. 133–149. СПб.: Изд-во СПбГУ.
34. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

REFERENCES

1. Honarvar, F. & Sinclair, A. 1997, “Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, no. 1, pp. 41–48.
2. Fathi-Haftshejani, P. & Honarvar, F. 2019, “Nondestructive evaluation of clad rods by inversion of acoustic scattering data”, *J. of Nondestructive Evaluation*, vol. 38, no. 3 (67), pp. 1–9.
3. Kosarev, O. I. 2012, “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34–37, [in Russian].
4. Hasheminejad, S. M. & Safari, N. 2005, “Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 280, no. 1, pp. 101–125.
5. Ivanov, V. P. 2006, “Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating”, *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683–690.
6. Bobrovnikskii, Yu. I. 2008, “A nonscattering coating for a cylinder”, *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758–768.
7. Bobrovnikskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010, “A periodic surface structure with extreme acoustic properties”, *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127–131.
8. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.
9. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202–208, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274, [in Russian].

11. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164–169.
12. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460–472, [in Russian].
13. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform coating" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
14. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154–173, [in Russian].
15. Larin, N. V. 2017, "Influence of the continuously inhomogeneous coating on the thermoelastic cylinder sound-reflecting properties", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9-1, pp. 395–403, [in Russian].
16. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54–62, [in Russian].
17. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733–742.
18. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity, providing minimum sound reflexion", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 67–81, [in Russian].
19. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 276–289, [in Russian].
20. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2020, "About influence of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder on sound scattering in the presense of a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 111–118, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, "Diffraction of Sound Waves at an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating in the Vicinity of the Boundary of an Elastic Half-Space", *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1641–1648.
22. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating in a plane waveguide with acoustic soft boundaries", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 43–53, [in Russian].
23. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating in a plane waveguide with absolutely rigid boundaries", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 76–83, [in Russian].
24. Tolokonnikov, L. A. 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 270–281, [in Russian].

25. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021, "Scattering by a cylinder with a inhomogeneous coating of sound waves radiated linear source in a flat waveguide ", *Mathematical modelling*, vol. 33, no. 8, pp. 97–113, [in Russian].
26. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2018, "Mathematical modelling of an inhomogeneous coating of an elastic coating in a plane waveguide", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 315–323, [in Russian].
27. Tolokonnikov, L. A. & Belkin A. E. 2020, "Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 354–368, [in Russian].
28. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
29. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
30. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
31. Fedorov, F. I. 1965, "Theory of elastic waves in crystals", Nauka, Moscow, 388 p., [in Russian].
32. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].
33. Lopatin, A. S. 2005, "Annealing method", *Stochastic optimization in computer science*, SPtb. Gos. Univ., no. 1, pp. 133–149, [in Russian].
34. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].

Получено 18.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.