

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 531

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292

История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

Смирнов Алексей Сергеевич — Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения Российской академии наук (г. Санкт-Петербург).

e-mail: — smirnov.alexey.1994@gmail.com

Смольников Борис Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения Российской академии наук (г. Санкт-Петербург).

e-mail: — smolnikovba@yandex.ru

Аннотация

В статье прослеживается исторический процесс развития одного из важнейших понятий теории механических колебаний – резонанса, начиная с XVII в. и до наших дней. Отмечается, что резонанс имеет огромное теоретическое и практическое значение, однако для этого термина отсутствует достаточно строгое и всеобъемлющее определение. Кратко изложена предыстория резонанса и обсуждаются первоначальные исследования, связанные с трудами Г. Галилея, впервые описавшего резонанс на примере обычного маятника, и Х. Гюйгенса, изучившего явление симпатического резонанса на примере двух маятников на общей балочной опоре. Отмечается ведущая роль в XVIII-XIX вв. орбитальных резонансов, свидетельствующих об эволюционной зрелости Солнечной системы, и анализируются внутренние резонансы в земной механике на примере двойного и сферического маятников. Подробно анализируется классический гармонический резонанс, сыгравший значительную роль в технике. На примере катастроф с мостовыми конструкциями продемонстрирована вредная роль резонанса. Помимо этого, дается классификация различных разновидностей резонанса, сформировавшаяся в XIX-XX вв. Последним шагом в этой цепочке стал термин «авторезонанс», связанный с именем А. А. Андропова. Авторезонанс позволяет крайне эффективно осуществлять разгон системы при помощи обратных связей, приспособив тем самым вынуждающие силы под свойства самой системы. Приводятся несколько наглядных примеров авторезонанса в маятниковых системах. В заключение отмечается, что авторезонансы постепенно начали занимать серьезное место в робототехнике и биомеханике, и их использование оказалось важнейшей ступенькой в мир оптимальных режимов движения.

Ключевые слова: акустический резонанс, симпатический резонанс, внутренний (конструкционный) резонанс, орбитальный (астрономический) резонанс, гармонический (технический) резонанс, антирезонанс, супергармонический (ультрагармонический) резонанс, субгармонический резонанс, комбинационный (субультрагармонический) резонанс, параметрический резонанс, автоколебательный (самовозбуждающийся) резонанс, авторезонанс (управляемый резонанс), биорезонанс, квазирезонанс, истинный резонанс.

Библиография: 60 названий.

Для цитирования:

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // *Чебышевский сборник*, 2022, т. 23, вып. 1, с. 269–292.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 531

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292

The history of mechanical resonance – from initial studies to autoresonance

A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov

Smirnov Alexey Sergeevich — Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg).

e-mail: — *smirnov.alexey.1994@gmail.com*

Smolnikov Boris Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg).

e-mail: — *smolnikovba@yandex.ru*

Abstract

The paper traces the historical development process of one of the most important concepts of the mechanical oscillations theory – resonance, starting from the XVII century to the present day. It is noted that resonance is of great theoretical and practical importance, but there is no sufficiently strict and comprehensive definition for this term. The prehistory of resonance is mentioned and the initial studies associated with the works of Galileo Galilei, who first described resonance using the example of an ordinary pendulum, and Christiaan Huygens, who studied the phenomenon of sympathetic resonance using the example of two pendulums on a common beam support, are discussed. The leading role of orbital resonances in the XVIII-XIX centuries, that indicate the evolutionary maturity of the Solar system, is noted, and the internal resonances in terrestrial mechanics are analyzed using the example of double and spherical pendulums. The classical harmonic resonance is analyzed in detail, and it played a significant role in technology. The harmful role of resonance is demonstrated by the example of catastrophes with bridge structures. In addition, a classification of various types of resonance, which was formed in the XIX-XX centuries, is given. The term "autoresonance" associated with the name of A. A. Andronov was the last step in this chain. Autoresonance made it possible to effectively swing the system using feedbacks, thereby adapting the driving forces to the properties of the system itself. Several illustrative examples of autoresonance in pendulum systems are given. In conclusion, it is noted that autoresonances gradually began to take a serious place in robotics and biomechanics, and their use turned out to be the most important step into the world of optimal motion modes.

Keywords: acoustic resonance, sympathetic resonance, internal (structural) resonance, orbital (astronomical) resonance, harmonic (technical) resonance, antiresonance, superharmonic (ultraharmonic) resonance, subharmonic resonance, combinational (subultraharmonic) resonance, parametric resonance, self-oscillating (self-excited) resonance, autoresonance (controlled resonance), bioresonance, quasi-resonance, true resonance.

Bibliography: 60 titles.

For citation:

A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov, 2022, "The history of mechanical resonance – from initial studies to autoresonance", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 269–292.

1. Введение

Мы все живем в колебательном, а точнее – в непрерывно колеблющемся мире, начиная от младенческой люльки и детских качелей, где впервые замечаем, что получаемое удовольствие зависит от размаха, т. е. от амплитуды раскачивания. В школе мы узнаем, что звук и свет – это тоже колебания, причем здесь возникает и вторая характеристика колебательного процесса – частота, которой определяется высота тона звучания или цвет различных предметов [1]. Наконец, уже в университете, особенно техническом, мы постепенно осознали, что весь окружающий мир и мы сами в том числе колеблемся во всем спектре частот и амплитуд.

Естественно, что и подавляющее большинство профессий направлено на управление колебаниями либо физически, либо умозрительно, либо путем построения их математических моделей. Последний случай представляет для нас наибольший интерес, т. к. мы живем в эпоху машин и механизмов, которые требуют от инженера-исследователя настройки колебательной системы на тот или иной режим функционирования в зависимости от собственных параметров механизма и от условий окружающей среды. Для инженера-механика (и электро-механика) одним из ключевых параметров является собственная частота (или спектр частот) рассматриваемого механизма, ибо именно в ее окрестности может произойти неожиданный рост амплитуд колебаний при действии гармонической вынуждающей силы той же самой частоты. Это явление традиционно и принято называть *резонансом*, и оно характеризуется резким возрастанием амплитуд угловых или пространственных перемещений.

Хорошо известно, что резонанс может выступать как в качестве полезного, так и в качестве вредного явления, и он представляет огромное теоретическое и практическое значение. Тем не менее, вплоть до настоящего времени для него нет даже достаточно строгого и всеобъемлющего определения [1], хотя термин «резонанс» имеет довольно длинную историю. В этой связи значительный интерес представляет исторический анализ различных подходов к понятию резонанса – от основополагающих к современным [1], что и является основной целью настоящей работы.

2. Первоначальные исследования явления резонанса

Наименование «резонанс» происходит от латинского слова «resono», означающего «отклик», «эхо», т. е. в самом названии подчеркивается реакция системы на какое-либо воздействие. Если мощность вынуждающей силы достаточно велика, то она способна превратить почти незаметную вибрацию в полноценные колебания с нарастающей амплитудой, которые нередко заканчиваются поломками и даже катастрофами. В силу своей высочайшей избирательности и эффективности явление резонанса приобретает поистине вселенское и всемасштабное влияние на динамические процессы во всех областях знаний физического мира.

Предыстория резонанса корнями уходит еще в Древнюю Грецию, когда пифагорейцы, перебирая струны своих лир на берегах Средиземного моря, нередко замечали их дрожание в ответ на громкое звучание другой струны того же тона. Это явление называется *акустическим резонансом*. Однако первый заметный вклад в теорию резонанса внес в первой половине XVII века выдающийся ученый Г. Галилей (1564–1642). Впервые это явление было описано Галилеем в 1602 г. в работах, посвященных исследованиям динамики маятников и музыкальных струн [4, 5]. В своем фундаментальном труде «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», опубликованном в 1638 г., Галилей писал [6]: «... маятник, находящийся в покое, хотя бы и очень тяжелый, мы можем привести в движение, и притом очень заметное простым дуновением, если мы будем приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент» [7]. Таким образом, в своем описании резонанса Га-

лилей обратил внимание на крайне важный момент – на способность маятника накапливать механическую энергию, подводимую от внешнего источника, имеющего конкретную частоту, хотя самого понятия «энергия» в то время еще не было.

Большое внимание к явлению резонанса проявляли и многие последователи Галилея, среди которых особую роль сыграл Х. Гюйгенс (1629–1695). Во время своих исследований с маятниковыми часами в 1665 г. он впервые обнаружил, что когда он поместил двое часов на стене рядом друг с другом и качнул их маятники с разной скоростью, то они спустя некоторое время стали качаться с одинаковым ритмом. Это явление получило название *симпатического резонанса*, и оно может быть определено как синхронизация осцилляторов с внешним ритмом, т. е. тенденция двух колеблющихся тел стремиться к гармонии. Синхронизацию колебаний маятников можно объяснить их влиянием друг на друга через невидимую на глаз вибрацию стены, на которой они висят. Ниже приводится цитата из письма Х. Гюйгенса своему отцу, от 26 февраля 1665 года: «... я заметил удивительный эффект, о котором ранее никто даже и не думал. Двое часов, висящих на стене друг рядом с другом на расстоянии одного или двух футов, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе, без отклонений. Наблюдая это с восхищением в течение некоторого времени, я, наконец, пришел к выводу, что это происходит вследствие некоторой симпатии: когда я придавал маятникам разный ход, то я обнаружил, что через полчаса они всегда возвращаются к синхронизму и сохраняют его до тех пор, пока я не нарушу их ход...» [8].

Интересно подчеркнуть, что данное наблюдение Гюйгенс осуществил, будучи больным и потому вынужденным оставаться несколько дней в постели, как раз наблюдая двое маятниковых часов, висящих на стене. Гюйгенс продолжил наблюдения за часами, подвешивая их на общей балочной опоре, размещенной на двух стульях (рис. 1), и всякий раз маятники часов синхронизовались и начинали ходить в унисон друг к другу [9, 10].

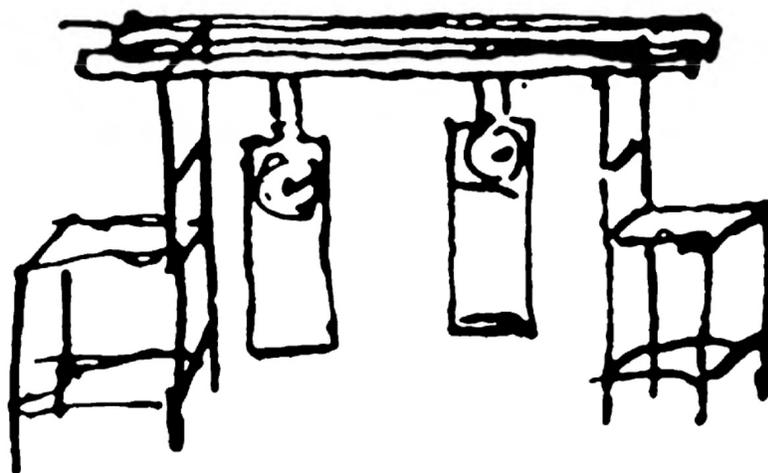


Рис. 1: Оригинальный рисунок Х. Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты

Представляет большой интерес процитировать еще раз Гюйгенса, демонстрируя его собственное исключительно точное описание наблюдения синхронизации: «... Очень важно отметить, что когда мы подвесили двое таким способом сконструированных часов к одной и той же деревянной балке, оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если это совпадение искусственно нарушалось, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы

тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и, если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был с самого начала очень однороден и согласован между собой».

Таким образом, Гюйгенс не только привел точное описание явления, но и дал отличное качественное объяснение эффекта взаимной синхронизации [8]. Он совершенно правильно понял, что согласованность ритмов двух часов была вызвана недоступными восприятию движениями балки. Гюйгенс писал о «симпатии часов», в современной терминологии это означает, что часы синхронизировались в противофазе за счет слабой связи через балку. Подчеркнем, что несмотря на то, что это явление называют самосинхронизацией, в его основе лежит тот же принцип резонанса, т. к. происходит отклик одного маятника на движение другого.

3. Внутренние резонансы в небесной и земной механике

Открытие синхронизации в механических системах оказалось провидческим для небесной механики, но несколько замедлило развитие динамики машин и механизмов. Дело в том, что изобретение телескопа, связанное с именем Г. Галилея, и открытие закона всемирного тяготения, связанное с именами Р. Гука (1635–1703) и И. Ньютона (1642–1727), резко усилило интерес к астрономии вообще и к механике движения планет внутри Солнечной системы в частности. И оказалось, что Солнечная система буквально до краев заполнена *внутренними резонансами* или *синхронизмами*. Под внутренним резонансом здесь понимается целочисленное соотношение между периодами обращения T_1 и T_2 некоторых двух небесных тел, т. е. $T_1/T_2 = n_1/n_2$, где n_1 и n_2 – целые числа [11]. Начало этим исследованиям положил П.-С. де Лаплас (1749–1827), который на примере анализа периодов обращения Юпитера и Сатурна установил следующее соотношение: $5T_1 \approx 2T_2$. Это означает, что продолжительность 5 оборотов Юпитера почти полностью совпадает с продолжительностью 2 оборотов Сатурна, из-за чего возникает резонансное взаимодействие их движений [12]. Так возникла «проблема малых знаменателей» в уравнениях орбитальных движений планет Солнечной системы, которая уже более двух столетий интересует астрономов. В настоящее время установлено 46 пар планет и их спутников, обладающих подобными *орбитальными (или астрономическими) резонансами*, для которых отношение периодов обращения (или отношение средних движений) не превосходит 7. Поэтому подобные соизмеримости встречаются значительно чаще, чем это можно было бы ожидать, считая их случайными совпадениями [13]. Возникающее при этом регулярное гравитационное взаимодействие небесных тел может стабилизировать их орбиты, так что можно утверждать, что резонансная структура стабилизирует Солнечную систему на очень большие периоды времени. В некоторых случаях резонансные явления вызывают неустойчивость отдельных орбит. Таким образом, резонансы являются крайне важными особенностями Солнечной системы [11], что свидетельствует об ее «эволюционной зрелости». Особенность эта объясняется, по-видимому, «принципом Аппеля» [14], который гласит, что изолированная динамическая система стремится избежать на нее воздействия сил внутреннего и внешнего трения, т. е. минимизировать работу этих сил [15]. В свою очередь эти синхронизмы порождают множество вторичных синхронизмов, таких, как времена года (весна, лето, осень, зима), продолжительность суток и т. д., причем, в отличие от астрономических резонансов, обладающих четкой повторяемостью, эти вторичные резонансы имеют, как правило, плавающую частоту (таяние снежного покрова, время уборки урожая и пр.). И эти резонансы уже тесно связаны с трудовой деятельностью человека, обеспечивая ему необходимую концентрацию физических и интеллектуальных усилий. По-видимому, это также оказало влияние на введение термина «авторезонанс», к которому мы обратимся несколько позднее.

Внутренние резонансы получили распространение не только в небесной, но и в земной

механике. Например, в трудах Д. Бернулли (1700–1782) по колебаниям двойного математического маятника имеются рассуждения о том, при каких его параметрах частоты колебаний будут соотноситься как целые числа [16]. Было показано, что если при равных длинах обоих маятников массы верхнего и нижнего грузов соотносятся как 16:9, то будет иметь место резонанс 1:2, а если эти массы соотносятся как 9:16, то будет резонанс 1:3 (рис. 2) [17].

COMMENTATIO PHYSICO-MECHANICA
SPECIALIOR
D E
**MOTIBUS RECIPROCIS
COMPOSITIS.**
MULTIFARIIS NONDUM EXPLORATIS QUI IN PENDULIS
BIMEMBRIBUS FACILIS OBSERVARI POSSINT IN CON-
FIRMATIONEM PRINCIIPII SUI DE COEXISTENTIA VIBRA-
TIONUM SIMPLICIORUM.
Auctore
DANIELE BÉRNOULLI.

§. 4. Descendamus ad exempla particularia, retinendo hypothesin aequalitatis inter ambo fila, utrumque aequale l .

(a) Ponatur corpus superius $m = 16$ et inferius $\mu = 9$; fiet $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{3}{5}$; hinc longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus simplicibus tardioribus $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{14}{5}l$ ac pro oscillationibus celerioribus $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{4}{5}l$; hinc prius alterius quadruplum est, unde $T = 2t$ et $n = 2$.

(b) Invertantur corpora atque nunc supponatur $m = 9$ et $\mu = 16$; habebitur $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{4}{5}$; hinc longitudo penduli isochroni tardioris $= \frac{4}{5}l$ et celerioris $= \frac{14}{5}l$; unde $T = 3t$ et $n = 3$.

Рис. 2: Заголовок и фрагмент статьи Д. Бернулли [16]

Наиболее же простым примером внутреннего резонанса в земной механике служит сферический маятник, обладающий двумя одинаковыми частотами в рамках линейной модели [18]. Известно, что в этом случае даже при малых колебаниях недостаточно рассмотрения лишь линейной модели, в которой уравнения движения оказываются не связанными друг с другом. Это объясняется тем, что здесь вследствие внутреннего резонанса 1:1 имеет место интенсивный обмен энергией между двумя степенями свободы. Данный эффект можно адекватно описать лишь в рамках слабо-нелинейной модели при удержании кубической нелинейности, связывающей оба уравнения [19]. В. Пюизе (1820–1883) в 1842 г. показал, что эллиптическая траектория сферического маятника не является неподвижной, а постепенно прецессирует, т. е. поворачивается [20]. Наглядно это явление было продемонстрировано в 1905 г., когда под руководством А. Н. Крылова (1863–1945) в Опытном бассейне морского ведомства в Санкт-Петербурге был проведен эксперимент со сферическим маятником. Его результатом стала известная фотографическая запись траектории сферического маятника в проекции на горизонтальную плоскость, полученная С. В. Вяхиревым (1875–1946) и подтвердившая все высказанные выше выводы (рис. 3) [21].

Интересно также отметить, что подобный обмен энергией между двумя степенями свободы можно наблюдать и в системах, имеющих не равные, но близкие частоты в рамках линейной модели. Например, если два одинаковых маятника связаны пружиной малой жесткости, то частоты колебаний этой системы будут мало отличаться от друга, и в этом случае мы будем иметь т. н. систему со слабой связью. Тем не менее, эта связь оказывает важную роль, осуществляя взаимодействие двух маятников, которые начинают «чувствовать» друг друга. Отклоняя один маятник при неподвижном другом, можно наблюдать явление биений [22], когда колебания одного маятника убывают, а колебания другого нарастают, после чего они меняются ролями [23]. На рис. 4 представлен процесс изменения углов отклонения каждого из маятников во времени. Биения могут иметь место и в других системах, например, они проявляются при рассмотрении упомянутого ранее двойного математического маятника, когда длины его звеньев равны, а масса нижнего груза много меньше массы верхнего груза.

Таким образом, внутренний резонанс представляет определенный интерес, поскольку при этом имеет место особое взаимодействие движений, вследствие чего происходит перекачка

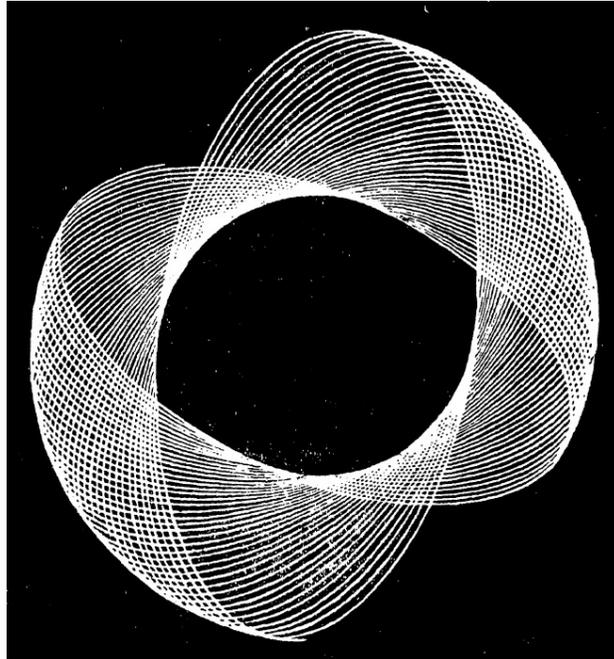


Рис. 3: Фотография траектории сферического маятника

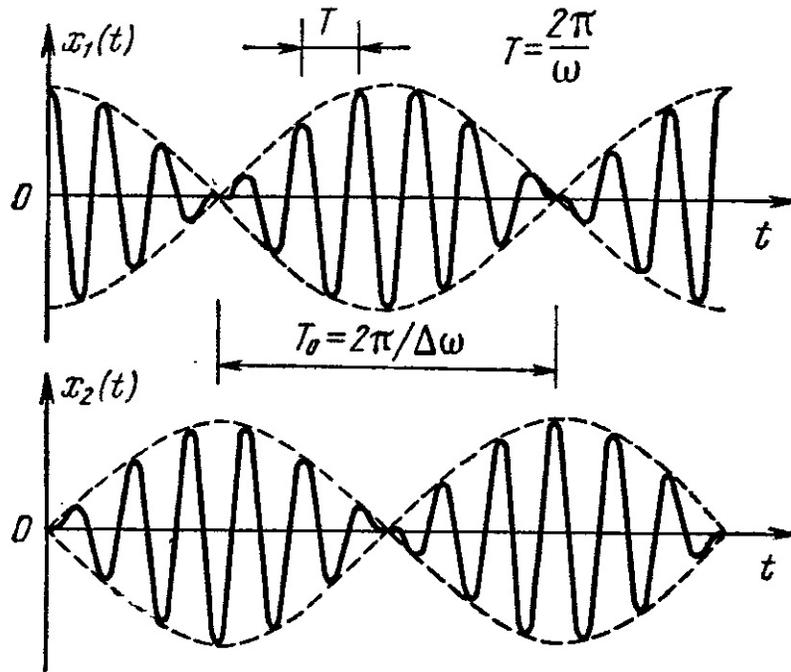


Рис. 4: Биения двух связанных маятников

энергии с одной степени свободы на другую. Следует обратить внимание на то, что подобная перекачка может привести и к неблагоприятным последствиям. Поскольку внутренний резонанс не удастся устранить так легко, как внешний, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, то на этапе проектирования конструкции этому фактору необходимо уделять самое серьезное внимание. Именно поэтому внутренний резонанс можно назвать *конструкционным резонансом*, понимая под этим непосредственную роль самой конструкции в возникновении подобного резонанса.

4. Гармонический резонанс

Возвращаясь в XVIII век, заметим, что большое внимание к механическим колебаниям проявляли выдающиеся ученые Л. Эйлер (1707–1783) и Ж. Лагранж (1736–1813), которые в своих трудах по теории малых колебаний занимались построением математических моделей многочисленных механических систем. Их исследования и легли в основу *классического понятия резонанса*, которое рассматривается в подавляющем большинстве книг. Оно касается резонанса в линейных системах с одной или несколькими степенями свободы, когда резонансное возбуждение предполагается гармоническим с заданной частотой и амплитудой, вследствие чего подобный резонанс можно назвать *гармоническим резонансом*.

Под резонансом в линейной системе обычно понимается явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего гармонического воздействия к собственной частоте. Именно вынуждающая сила в виде гармонической функции времени (т. е. программное управление) зачастую используется для целенаправленного поиска резонансных режимов, что вполне естественно для линейных систем. В самом деле, внешняя сила при этом действует в унисон с собственными колебаниями системы, также являющимися гармоническими, тем самым усиливая их. Поэтому возникновение интенсивных колебаний в этой ситуации вполне естественно. Таким образом, при указанных условиях даже малое воздействие способно создать весьма большие колебания системы. Тем не менее, данный метод возбуждения резонансных колебаний вряд ли будет пригоден при увеличении амплитуд, когда линейная модель превращается в нелинейную, о чем будет сказано ниже.

Хорошо известно, что при нулевых начальных условиях и совпадении собственной частоты линейного осциллятора с внешней происходит нарастание колебаний во времени по линейному закону (рис. 5, по оси абсцисс откладывается безразмерное время). Интересно отметить, что резонансное движение, приведенное на рис. 5, является устойчивым процессом, что может показаться поначалу неожиданным. Однако здесь следует иметь в виду, что устойчив процесс неограниченного нарастания амплитуд вынужденных колебаний, иначе говоря, небольшие возмущения не могут изменить общий характер рассматриваемого движения [24].

Однако на практике физически невозможно обеспечить точное совпадение указанных частот, а именно это обстоятельство и приводит к получению нарастающих колебаний. Более реальным является случай малой расстройки частот, где уже отсутствует резонансный эффект, вместо которого будут иметь место биения. В результате колебания осциллятора примут вид, представленный на второй иллюстрации с рис. 4. Кроме того, учет демпфирования также не позволяет неограниченно наращивать колебания, вследствие чего происходит ограничение амплитуд колебаний. В этих условиях основной оценкой подобного резонанса служит его амплитудно-частотная характеристика, традиционная иллюстрация которой при наличии вязкого трения с различными коэффициентами демпфирования представлена на рис. 6. Здесь построена зависимость безразмерной амплитуды вынужденных колебаний (отношение истинной амплитуды к т. н. «равновесной» амплитуде, называемое коэффициентом динамичности) от безразмерной внешней частоты (истинной частоты, отнесенной к собственной) [25]. Под резонансом в данном случае следует понимать пик амплитудно-частотной характеристики, который при достаточно небольшом трении достигается вблизи собственной частоты. Отметим, что подобную амплитудно-частотную характеристику можно построить и для слабо-нелинейной системы, и она будет отличаться от рис. 6 в первую очередь тем, что резонансные кривые при малом демпфировании будут «нанизаны» на скелетную кривую, описывающую зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды. Вследствие этого возможны несколько различных режимов при изменении частоты в определенных пределах, причем реализация того или иного режима зависит от его начальных условий, т. е. от того, происходит ли квазистатическое увеличение или уменьшение частоты.

Особенно полезными данные заключения оказались на закате века Просвещения (XVIII в.),

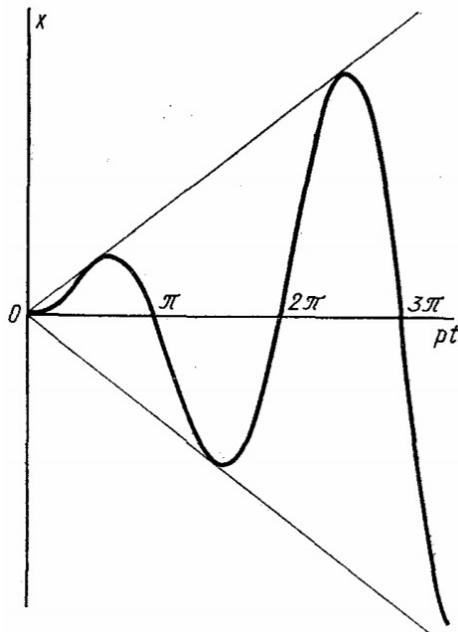


Рис. 5: Классический резонанс

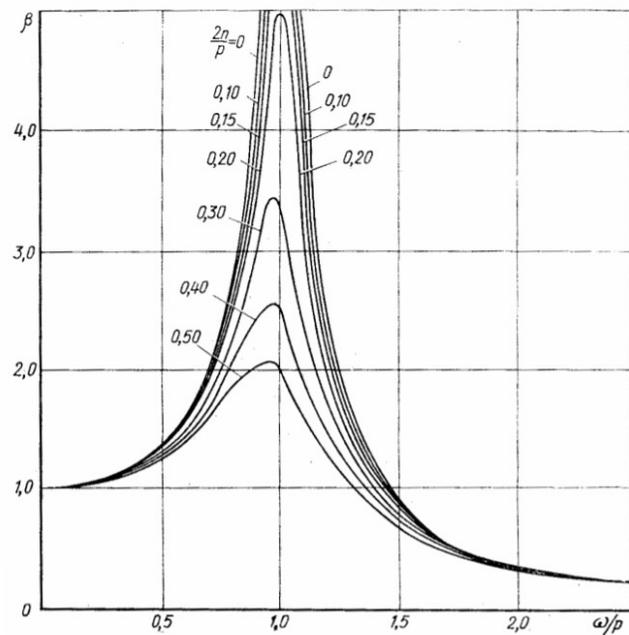


Рис. 6: Амплитудно-частотная характеристика

который ознаменовался приходом другой эпохи – эпохи машин и механизмов. Эта эпоха уже нуждалась в технических специалистах, изобретателях и конструкторах, и наступившая эпоха машиностроения (XIX-XX вв.) поставила множество новых задач – сначала чисто кинематических, а затем и динамических. И если кинематические задачи оказались вполне доступными рядовым инженерам и конструкторам, то динамические нередко оказывались для них «твердым орешком». И эта твердость по большей части объяснялась наличием резонансов. Как правило, современные машины (а многие высотные здания, вышки, мосты и т. д. также можно отнести к машиностроительным сооружениям) работали в широком диапазоне частот, характеризуемых резонансами. Построенная теория резонанса для линейных систем позволила адекватно описать многочисленные резонансные явления в машинах, механизмах и различных сооружениях. В этой связи подобные резонансы могут быть названы *техническими резонансами*.

Здесь уместно упомянуть и про такое весьма интересное динамическое явление, как *антирезонанс*. Это явление широко используется для динамического гашения колебаний механических систем [25]. Его суть заключается в том, что для системы, которая имеет по крайней мере две степени свободы (например, два твердых тела, соединенных пружиной друг с другом и с неподвижной опорой), тело, к которому прикладывается возбуждающая гармоническая сила, при надлежащем подборе параметров остается все время неподвижным [26]. В более общем случае, когда в системе имеет место демпфирование, под антирезонансом по аналогии с резонансом следует понимать ярко выраженный минимум амплитудно-частотной характеристики. Отметим также, что явление антирезонанса встречается и при исследовании систем с распределенными параметрами. Так, если приложить гармоническую силу к правому концу стержня, закрепленного на левом конце, то при надлежащем выборе частоты этой силы можно добиться того, что правый конец стержня, т. е. точка приложения силы, будет неподвижным, тогда как все остальные точки оси стержня, за исключением конечного числа узлов, будут совершать продольные колебания [27]. Аналогичный эффект можно наблюдать и при исследовании изгибных колебаний консольной балки [26].

Кроме наиболее часто встречающегося *обычного (главного) резонанса* (когда собственная

частота колебаний равна частоте вынуждающего воздействия), существуют также и более сложные резонансы при наличии гармонического возбуждения, которые можно уловить при рассмотрении слабо-нелинейных систем [28]. К ним относятся *супергармонический (или ультрагармонический) резонанс* (когда имеется ярко выраженная супергармоника, частота которой кратна частоте вынуждающего воздействия), *субгармонический резонанс* (когда частота колебаний в целое число раз меньше частоты вынуждающего воздействия), *комбинационный (или субультрагармонический) резонанс* (когда отношение частоты колебаний к частоте вынуждающего воздействия является рациональным числом) [29, 30].

Необходимо указать и на то, что резонансные эффекты в линейной системе могут возникать не только при чисто гармоническом возбуждении. Если внешняя сила является периодической, но не гармонической, то ее можно разложить в ряд Фурье, названный по имени Ж.-Б. Фурье (1768–1830), на сумму отдельных гармонических составляющих. Ясно, что каждая из них будет возбуждать решение, аналогичное описанному ранее, так что в силу линейности задачи общее решение будет представлять собой суперпозицию всех этих решений. Поскольку в ряде Фурье гармонические составляющие будут иметь частоты, кратные частоте вынуждающей силы, то можно наблюдать интенсивные колебания системы, если одна из этих гармоник вступит в резонанс со свободными колебаниями. Таким образом, в этой ситуации резонанс наступает, если частота внешнего воздействия равна долям от собственной частоты [25].

Интересно отметить и такое явление, как *прохождение через резонанс*. Оно возникает при разгоне машины, например, под действием внешней синусоидальной нагрузки с линейно изменяющейся частотой [25]. При этом максимальные амплитуды колебаний при проходе через резонанс оказываются меньшими, чем в случае описанных выше установившихся резонансных колебаний, причем различие будет тем большим, чем быстрее осуществляется прохождение через резонанс [31]. Кроме того, особенностью этого явления является и то, что максимальные амплитуды достигаются не в момент совпадения частоты внешней силы с собственной, а несколько позже: в процессе разгона максимум амплитуды смещается в сторону больших частот, в процессе остановки – в сторону меньших частот.

Выше были представлены резонансные эффекты, возникающие вследствие периодического внешнего воздействия на систему. Однако явление резонанса может также возникать и в случае периодического изменения параметров самой системы [32]. В этом случае резонанс называется *параметрическим* [33]. Впервые с резонансом такого типа столкнулся Дж. У. Хилл (1838–1914) в 1877 г. при исследовании движения Луны. Он вывел уравнение осциллятора с переменным коэффициентом жесткости, которое и называется уравнением Хилла, и его подробному исследованию посвящена работа [34], изданная в 1886 г. Наиболее простым и в то же время интересным случаем является изменение жесткости по гармоническому закону вблизи некоторого постоянного значения. Движение такой системы описывается уравнением Матьё, которое является частным случаем уравнения Хилла и было названо по имени его исследователя Э. Л. Матьё (1835 – 1890). Не вдаваясь в подробности, отметим, что это уравнение содержит два безразмерных коэффициента, зависящих от параметров задачи. Данные коэффициенты полностью определяют характер решений уравнения, и на плоскости этих коэффициентов можно выделить области устойчивости (рис. 7). Такая диаграмма называется диаграммой Айнса-Стретта по именам Э. Л. Айнса (1891–1941) и М. Ю. О. Стретта (1903 – 1992) [35], опубликовавших свои работы на эту тему в 1927 г. и 1928 г. соответственно [36, 37]. Незаштрихованные области отвечают неустойчивым движениям, при которых и реализуется параметрический резонанс. В частности, резонансные проявления имеют место при малой амплитуде гармонического изменения жесткости тогда, когда отношение собственной частоты осциллятора без учета гармонического изменения жесткости к частоте ее изменения равно 1:2, 1, 3:2, 2, 5:2 и т. д. Наиболее серьезной является первая зона неустойчивости, когда частота изменения жесткости вдвое больше собственной. Еще одним примером параметрического резонанса служит маятник с периодически изменяющейся длиной по гармоническому закону. Его

движение описывается более сложным уравнением, чем уравнение Матъё, однако оно также имеет переменные коэффициенты. Поэтому и здесь можно возбудить параметрический резонанс, принимая, например, что частота изменения длины вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, вычисленной при неизменной длине [22].

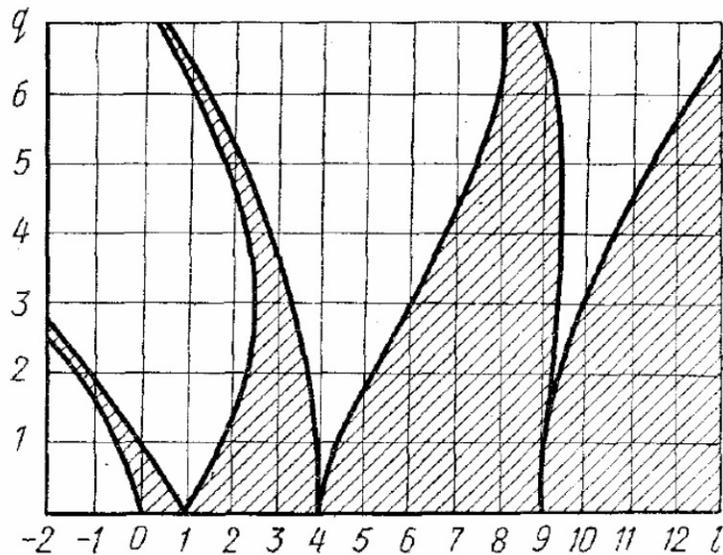


Рис. 7: Диаграмма Айнса-Стретта

5. Резонанс как неблагоприятный фактор

Вредная роль резонанса нередко приводила к различным неблагоприятным последствиям и даже катастрофам [38]. Особенно чувствительными к резонансу оказались мостовые конструкции. Истории хорошо известны случаи, когда марширующая войсковая часть во время перехода по подвесному мосту возбуждает настолько большие колебания, что они создают возможность обрушения этого моста [39].

В апреле 1831 г. рухнул Бротонский подвесной мост с железными цепями, переброшенный через реку Ирвелл в Великобритании, что было вызвано проходившим по нему отрядом солдат [40]. Частота шага солдат, шедших в ногу, оказалась близка к одной из собственных частот колебаний моста, что повлекло за собой обрыв цепей и последующее обрушение моста в реку. Интересно отметить, что солдаты, шедшие четвером в ряд, почувствовали, что мост вибрирует в такт их шагам, и, находя это весьма забавным, заставили его вибрировать еще больше. К счастью, в этом инциденте никто не погиб, поскольку пролет моста был низким, а глубина воды в этом месте была небольшой, однако порядка 20 человек получили ранения. Это событие вызвало некоторую потерю доверия к подвесным мостам, что, однако, не помешало строительству новых подвесных мостов. Главным следствием обрушения Бротонского моста стал приказ «не шагать в ногу» при пересечении мостов войсками.

Несмотря на то, что французские солдаты также получили аналогичный приказ, в апреле 1850 г. подобный инцидент повторился. На этот раз обрушился мост Бас-Шен через реку Мен во французском городе Анже, имевший два троса, когда по нему проходил батальон французских солдат (рис. 8). К сожалению, здесь уже не обошлось без жертв: погибло более 200 человек [41]. Колебаниям моста способствовала плохая погода, поскольку батальон проходил по мосту во время сильной грозы, когда ветер заставлял мост вибрировать, а солдаты, пытаясь восстановить свое равновесие, еще больше раскачали его. Оставшиеся в живых сообщили,



Рис. 8: Разрушенный мост Бас-Шен

что они шли, как пьяные, и едва могли удержаться от падения. Усилия солдат, направленные на то, чтобы не шагнуть в ногу, вероятно, заставили их непроизвольно маршировать с тем же ритмом, что и мост, а это и привело к возникновению резонансного эффекта.

Не менее трагична и судьба известного однопролетного Египетского моста со сфинксами, подвешенного на тройных нитях металлических цепей и переброшенного через реку Фонтанку в Санкт-Петербурге. В январе 1905 г., когда по мосту проходил кавалерийский эскадрон, цепи разорвались, и пролеты моста полностью обрушились на лед Фонтанки (рис. 9) [42]. Среди



Рис. 9: Разрушенный Египетский мост

эскадрона не было людских жертв, но одна лошадь утонула, а еще две сильно пострадали, поэтому их пришлось пристрелить. Одной из основных версий обрушения служит явление резонанса: предполагается, что лошади, хорошо обученные стройному церемониальному маршу, отлично отбивали шаг, который попал в такт с колебаниями моста [43]. Эта версия подвергалась сомнению, поскольку есть утверждение, что лошади не способны двигаться «в ногу», т. е. не могут отбивать точный ритм. Более того, очевидцы катастрофы единогласно заявля-

ли, что по мосту помимо проходившего эскадрона навстречу ему также ехали извозчики, а по тротуару шли прохожие, так что слаженного хода не было. Поэтому, казалось бы, эффект резонанса в этом случае и не должен был возникнуть. Другой причиной катастрофы высказывалась непрочность конструкции, хотя поначалу и эта версия отрицалась инженерами, ведь с момента постройки в 1826 г. мост периодически ремонтировался, однако после обрушения была обнаружена раковина в металле одного из звеньев несущей цепи [44]. Наиболее вероятным объяснением трагедии служат оба указанных обстоятельства, поскольку раскачка моста кавалерией в той или иной степени имела место быть, что в сочетании с не вполне прочной конструкцией моста и привело к его обрушению.

Разумеется, с ростом парка машиностроительных конструкций, с возрастанием их скоростей и мощностей множились и их аварийные ситуации, обусловленные вредной ролью резонанса. В качестве примеров нежелательного воздействия резонанса в технике можно указать разрушение различных сооружений, обрыв проводов, вибрации в трубопроводах, раскачивание вагона на стыках рельсов, раскачивание груза на подъемном кране и многие другие проявления. Следует особо подчеркнуть, что в число резонансных проявлений также необходимо включить и самовозбуждающиеся разгонные режимы, отличающиеся от выше описанных тем, что они поддерживаются за счет силовых факторов неколебательной природы, и их параметры (амплитуда и частота) определяются внутренними свойствами самой системы. Колебания такого рода принято называть автоколебаниями, так что рассматриваемый режим может быть назван *самовозбуждающимся* или *автоколебательным резонансом*. Его простейшими примерами служат флаттер элементов конструкций летательного аппарата (главным образом, крыла самолета либо несущего винта вертолета) и шимми передних колес транспортного средства [45]. Нужно также отметить, что в отличие от классического гармонического резонанса, при котором амплитуда возрастает во времени линейно, автоколебательный резонанс может повлечь возрастание амплитуд по экспоненциальному закону.

Применительно к мостовым конструкциям здесь следует упомянуть о катастрофе, случившейся в результате аэроупругого флаттера. В ноябре 1940 г. почти сразу после открытия произошло обрушение висячего Такомского моста через пролив Такома-Нэрроуз в штате Вашингтон в США [46, 47] (рис. 10). По счастливому стечению обстоятельств движение на мосту в момент крушения было слабым, и единственный водитель успел покинуть его и спастись, а жертвой трагедии стала лишь собака, оставленная в машине. При этом можно было наблюдать динамические изгибно-крутильные колебания моста, вызванные недоучетом ветровых нагрузок при проектировании сооружения и усиливавшиеся вертикальными колебаниями тросов. В самом деле, при проектировании моста учитывалось действие лишь статических нагрузок, в том числе и ветровой, однако ее аэродинамическое действие не было принято во внимание. Эта авария оставила огромный след в истории науки и техники и способствовала целому пласту новых исследований в области аэродинамики. Более того, она оказала серьезное влияние на подходы к проектированию большепролетных мостов во всем мире. Отметим, что сам Такомский мост был полностью восстановлен с учетом улучшения его конструкции для дополнительной устойчивости и снижения аэродинамических нагрузок и повторно открыт в 1950 г., успешно функционируя и по сей день.

6. От гармонического резонанса к авторезонансу

Возвращаясь к вопросам разгона механических систем, отметим, что особенностью всех упомянутых ранее резонансных эффектов является то, что они относятся лишь к линейным или же к слабо-нелинейным системам. Тем не менее, с увеличением амплитуд колебаний все более отчетливо начинают проявляться нелинейные свойства механической системы. В первую очередь, в нелинейной системе имеет место дрейф частот с увеличением амплитуд, и данный



Рис. 10: Разрушенный Тако́мский мост

факт приводит к нарушению главного условия возникновения резонансного процесса – действия внешней силы в такт с собственными колебаниями. Поэтому описанные ранее методы резонансного возбуждения колебаний становятся малоэффективными, так что взамен чисто гармонического (т. е. программного) управления, следует синтезировать другое. Необходимо подчеркнуть, что проблема резонанса как метода управления свободными колебаниями в различных динамических системах приобрела достойное внимание со стороны механиков, радиоинженеров, математиков лишь на подходе к середине XX века благодаря развитию радиосвязи и электромашиностроения. Особенно важную роль здесь сыграло то, что с ростом мощностей и скоростей колебания различных машин и механизмов приобретали существенно нелинейные свойства и новые степени свободы, и в соответствии с этим усложнялись и множились различные типы резонансов.

Все это привело к необходимости использования иного режима возбуждения резонансных колебаний, при котором частота возбуждения не предписывается извне, а поступает на привод возбуждения как сигнал контура обратной связи. Именно таким образом целесообразно прикладывать управляющие воздействия в нелинейных системах, поскольку при этом частота и фаза этого сигнала будут точно соответствовать текущей частоте и фазе системы, ввиду чего ей будет передаваться вся поступающая энергия. Это свойство и характерно для настоящего резонансного режима. Возникающий при этом режим нарастающих колебаний получил в литературе название «*авторезонанса*», и впервые он был введен в научный лексикон классиком советской школы теории колебаний А. А. Андроновым (1901–1952) в первом издании энциклопедического труда «Теория колебаний», выпущенного им в 1937 г. совместно с коллегами, известными учеными А. А. Виттом (1902 – 1938) и С. Э. Хайкиным (1901 – 1968). К сожалению, к моменту публикации этой книги А. А. Витт был арестован и вскоре после этого скончался, поэтому было невозможно поставить его фамилию на титульном листе. Второе издание книги вышло только в 1959 г., и на сей раз несправедливость в отношении А. А. Витта была исправлена. Учитывая наличие обратной связи для использования явления авторезонанса, его также можно назвать *управляемым резонансом*.

В книге [48] авторезонанс определяется как «резонанс под действием силы, порождаемой движением самой системы». В ней рассматривается пример линейной системы второго порядка (электрический контур) при наличии реле в обратной связи. Происхождение термина

«авторезонанс», вероятно, было связано с тем, что с учетом обратной связи система фактически становилась замкнутой. Следует обратить внимание на то, что и упомянутый выше термин «автоколебания» также был введен Андроновым в 1928 г. и быстро вошел в практику как в советской литературе, так и за рубежом. Что же касается термина «авторезонанс», то он долгие годы оставался практически незамеченным и использовался лишь применительно к достаточно простым системам с одной степенью свободы, где не требуется определять формы колебаний. Подчеркнем, что главной трудностью при практической реализации авторезонанса является именно необходимость использования контура обратной связи для формирования требуемого закона управления приводом. В этой связи следует отметить, что понятия «автоколебательный резонанс» и «авторезонанс», являясь родственными, имеют между собой важное отличие: автоколебательный резонанс, как правило, проявляется благодаря естественным физическим причинам, как, например, аэроупругий флаттер, и оказывается явлением неблагоприятным, тогда как авторезонанс целенаправленно организуется специальным образом за счет контура обратной связи [49]. Всплеск интереса к понятию авторезонанса стал возрастать в последние десятилетия [50]. Среди наиболее значимых публикаций, в которых изучаются резонансные эффекты при наличии обратной связи, следует отметить статьи [51, 52]. При этом важнейшую роль играет задача синтеза адекватного закона управления движением системы на основе обратной связи. Стоит подчеркнуть, что и приведенное в начале настоящей статьи описание резонанса, данное Галилеем на примере маятника, вовсе не противоречит наличию обратной связи – напротив, из приведенной цитаты становится понятным, как ее использовать для возбуждения резонансного режима: «приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент».

На том же примере маятника можно более детально проиллюстрировать простейшие примеры авторезонанса, которые проясняют суть данного термина. Так, с практической точки зрения большой интерес представляет разгон математического маятника при помощи скачкообразного изменения длины нити в среднем и крайнем положениях, который имитирует раскачивание качелей самим качающимся на них человеком. В самом деле, хорошо известно, что человек стремится раскачать качели при помощи ритмичного сгибания и выпрямления тела, а именно, человек выпрямляется (поднимая свой центр тяжести) при прохождении качелей через вертикальное положение и приседает (опуская свой центр тяжести) при максимальном отклонении. В этом случае длина маятника может быть выражена через переменные состояния, причем анализ показывает, что будет происходить нарастание полной энергии, поэтому имеет место именно авторезонанс [53]. Отметим, что не стоит отождествлять это явление с тем вариантом, когда длина нити скачкообразно меняется через равные интервалы времени, т. е. в виде заданной программы. В такой ситуации мы будем иметь дело с описанным выше параметрическим резонансом, т. к. длина нити здесь меняется периодически с заранее заданной частотой, так что изменения длины будут зависеть не от движения маятника, а происходят согласно конкретному закону во времени. Естественно, при рассмотрении нелинейной задачи это не обязательно приведет к искомой цели – раскачать качели до любого желаемого уровня энергии, ибо при этом не будет по умолчанию выполнено условие нарастания энергии.

Нетрудно осуществить разгон математического маятника постоянной длины и с помощью управляющего момента в шарнире, который строится по принципу обратной связи и пропорционален его угловой скорости (или, что то же самое в данном случае, кинетическому моменту). Мощность этого момента пропорциональна квадрату угловой скорости и потому будет всегда величиной неотрицательной, так что полная механическая энергия начнет увеличиваться, а значит будут нарастать и колебания маятника [54]. Отметим, что при превышении энергией уровня, отвечающего верхнему положению равновесия маятника, движение из колебательного перейдет в круговращательное. При этом указанное управление допускает различные модификации. Например, можно сделать коэффициент усиления функцией переменных состояния и постепенно понижать его с увеличением энергии. В этом случае можно добиться выхода

колебаний на некоторый заданный уровень, что зачастую и является целью управления [55]. Конечно, можно использовать и другие виды управления, например, релейное, которое также приводит к неотрицательной мощности, пропорциональной модулю угловой скорости.

В то же время начавшаяся эпоха роботизации поставила множество задач рационального управления колебательными системами со многими степенями свободы, и, соответственно, с несколькими собственными частотами. И вблизи каждой из них может возникать собственный резонансный режим, требующий определения собственной формы колебаний. Казалось бы, построение авторезонансного режима в такой кибернетической системе, когда все механические элементы конструкции движутся с одной частотой, причем осуществляется ее разгон, должна иметь довольно сложное и многоступенчатое решение. Однако выяснилось, что можно без особых трудностей построить такое решение, используя метод «*коллинеарного управления*». Этот подход к управлению движением многомерных механических систем основан на стремлении в максимальной степени использовать ее собственные динамические свойства, т. е. ее кинетику, учитывающую динамическое взаимодействие различных каналов управления (точнее, различных степеней свободы объекта управления) [56]. Коллинеарное управление имитирует обобщенные силы инерции, возникающие при разгоне системы, а условие коллинеарности математически трактуется как требование пропорциональности столбца управляющих воздействий столбцу обобщенных импульсов системы [57]. Первоначально эта идея была применена к задаче о разгоне свободного твердого тела до определенного уровня угловой скорости посредством внешнего крутящего момента (например, при помощи газореактивных двигателей, укрепленных на корпусе несущего тела), построенного по принципу коллинеарного управления. Учитывая, что для твердого тела обобщенный импульс есть непосредственно вектор кинетического момента, то крутящий момент здесь формируется пропорционально кинетическому моменту [56]. Данный режим оказался крайне полезным, и, кроме того, оптимальным по таким критериям, как расход рабочего вещества или быстродействие. Поэтому впоследствии он был использован для управления движением различных манипуляторов, где также продемонстрировал свою эффективность [57].

Все это побудило использовать данный метод для авторезонансного возбуждения и в многомерных колебательных системах, которые функционируют в различных силовых полях. Именно в таких системах наиболее явно и раскрываются основные свойства авторезонанса. Наиболее простым примером здесь может служить коллинеарный разгон двойного маятника в гравитационном поле. Было показано, что с его помощью можно разогнать двойной маятник по каждой из его форм колебаний вплоть до значительных амплитуд [58]. При этом форма колебаний постепенно дрейфует вместе с частотой при переходе из линейной зоны в нелинейную, однако при усложнении своего качественного характера она сохраняет свою регулярную структуру и характеризуется периодичностью [2]. Сохранение топологической структуры формы нелинейных колебаний приобретает чрезвычайно важное значение для беговых форм движения живых организмов. Поэтому фактически именно коллинеарное управление позволяет построить авторезонансный режим при амплитудах раскачивания конечностей, достигающих вплоть до достаточно больших значений. Это чрезвычайно важно в задачах биомеханики и робототехники, где переход от шаговых к беговым амплитудам возможен только в режиме авторезонанса, причем и при ходьбе, и при беге движение остается одночастотным, хотя частота постепенно изменяется, а вместе с ней происходит и изменение формы колебаний. Это означает, что применительно к биомеханике метод коллинеарного управления можно назвать методом «*биоморфного управления*», а для самого резонанса вполне уместно ввести также термин «*биорезонанс*». В результате такой резонансный режим становится управляемым как по амплитуде, так и по частоте. Таким образом, представленные заключения крайне важны для биомеханики и могут найти применение при беге андроидов и звероидов, где построение нелинейного резонансного режима играет первостепенную роль [59].

Учитывая вышесказанное, детальное определение авторезонанса для систем со многими

степенями свободы следовало бы дать так: *авторезонанс* – это такой режим вынужденного движения динамической системы, когда локальные движения по всем ее степеням свободы происходят с одной частотой, которая может дрейфовать при изменении амплитуд колебаний, при этом вынуждающие силы, действующие по всем степеням свободы благодаря контуру обратной связи, постепенно увеличивают уровень механической энергии системы [58]. Подчеркнем еще раз, что главное отличие авторезонанса от гармонического резонанса заключается в том, что он может существовать при гораздо больших амплитудах. Поэтому гармонический резонанс правильнее было бы называть «*квазирезонансом*», а авторезонанс – *истинным резонансом*. Авторезонанс адекватно характеризует режим колебаний не только при малых, но и при больших амплитудах, осуществляя плавный переход от линейной области в нелинейную. Это и означает, что данный термин описывает подлинный резонанс, что обуславливает его важное практическое значение. Именно авторезонанс выявляет важнейшие свойства многочисленных резонансных эффектов в технике [60]. Примеры же, взятые из робототехники и биомеханики, также иллюстрируют суть данного понятия. Таким образом, обобщая понятие «авторезонанс» на системы с несколькими степенями свободы, мы по существу неразрывно связываем его с понятием «коллинеарного управления».

7. Заключение

Завершая свое путешествие от первоначальных исследований резонанса до авторезонанса, остается резюмировать отличительные свойства и области существования различных резонансов. Наиболее часто встречающимися являются орбитальные резонансы, которые характерны для различных природно-географических и эволюционных процессов, свойственных неживой природе. Такое же происхождение имеют и гармонические резонансы в машиностроении, мостостроении и т. п. Авторезонансы свойственны именно живой природе и системам автоматического управления, поэтому авторезонансные режимы движения постепенно начинают занимать важное место в робототехнике и биодинамике. Особенно эффективным авторезонансным управлением является коллинеарное управление, основанное на использовании управляющего воздействия пропорционально обобщенному импульсу системы и обладающее оптимальными характеристиками. Остается отметить, что резонанс является настолько многогранным явлением, что охватить все его проявления в рамках одной статьи не представляется возможным, так что внимание было уделено лишь наиболее известным из них, которые чаще всего встречаются в практических приложениях. И, как видно из настоящей статьи, наиболее просто резонансные эффекты можно наблюдать именно при исследовании маятниковых систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown E. W. Elements of the theory of resonance. Cambridge: at the University press, 1932. 60 p.
2. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2016–2017 гг. 2018. С. 23–39.
3. Смольников Б. А., Смирнов А. С. История резонанса – от простого резонанса до авторезонанса // IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. 2021. 9-12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. С. 457–459.
4. Frova A., Marenzana M. Thus spoke Galileo: the great scientist's ideas and their relevance to the present day. Oxford University Press. 2006. 493 p.

5. Jones M. D., Flaxman L. The Resonance Key New Page Books: Exploring the Links Between Vibration, Consciousness, and the Zero Point Grid. New Page Books, 2009. 256 p.
6. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
7. Галилей Г. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1964. 572 с.
8. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
9. Oeuvres complètes de Christiaan Hugen. T. 17. Amsterdam: Swets & Zeitlinger N. V., 1967. 552 p.
10. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
11. Альвен Х., Аррениус Г. Эволюция солнечной системы. М.: Мир, 1979. 512 с.
12. Смольников Б. А. Механика в истории науки и общества. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2014. 608 с.
13. Рой А. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
14. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1960. 487 с.
15. Стояновский С. М., Смирнов А. С. Эволюционная динамика маятниковых систем с несколькими степенями свободы // Неделя науки СПбПУ. Материалы научной конференции с международным участием. Лучшие доклады. 2018. С. 224–229.
16. Bernoulli D. Commentatio physico-mechanica specialior de motibus reciprocis compositis. Multifariis nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius observari possint in confirmationem principii sui de coexistentia vibrationum simpliciorum // Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. T. 19. 1774. Pp. 260–284.
17. Смирнов А. С., Смольников Б. А. История исследований двойного маятника // История науки и техники. 2020. № 12. С. 3–12.
18. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика. Ч. 3. Динамика несвободной системы и теория колебаний. М., Л.: ОНТИ, 1934. 625 с.
19. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Механика сферического маятника. СПб.: Политех-пресс, 2019. 266 с.
20. Puiseux V. A. Sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère // Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1842. S. 1. V. 7. P. 517–520.
21. Крылов А. Н. Собрание трудов. В 12 т. Т. 3. Ч. 1. М., Л.: изд-во АН СССР, 1949. 350 с.
22. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
23. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. Физика для поступающих в вузы. М.: Наука, 1982. 608 с.
24. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
25. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

26. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
27. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т. 3. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
28. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
29. Крупенин В. Л. Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний // Вестник научно-технического развития. № 4 (68), 2013. С. 14–19.
30. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. М.: изд-во Московского ун-та, 1974. 569 с.
31. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
32. Чечурин С. Л. Параметрический резонанс – боль и радость. СПб: изд-во СПбГПУ, 2014. 67 с.
33. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
34. Hill G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon // Acta Mathematica. 1886. Vol. 8. Pp. 1-36.
35. Kovacic I., Rand R., Sah S. M. Mathieu's Equation and its Generalizations: Overview of Stability Charts and their Features // Applied Mechanics Reviews. 2018. Vol. 7. No. 2. 020802.
36. Ince E. Research Into the Characteristic Numbers of Mathieu Equation // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1927. 46. Pp. 20–29.
37. Strutt M. J. O. Zur Wellenmechanik des Atomgitters // Annalen der Physik. 1928. 391 (10). Pp. 319–324.
38. Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. СПб.: Политех-пресс, 2021. 246 с.
39. Раус Дж. Э. Динамика системы твердых тел. В 2 томах. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
40. Taylor R., Phillips R. Fall of the Broughton suspension bridge, near Manchester // The Philosophical Magazine, Or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History, and General Science. 1831. Vol. 9. No. 53. Pp. 384–389.
41. Rapport de la commission d'enquête nommée par arrêté de M. le préfet de Maine-et-Loire, en date du 20 avril 1850, pour rechercher les causes et les circonstances qui ont amené la chute du pont suspendu de la Basse-Chaine. № 237. // Annales des ponts et chaussées. 1850. Tome XX. Pp. 394–411.
42. Бунин М. С. Мосты Ленинграда. Очерки истории и архитектуры мостов Петербурга – Петрограда – Ленинграда. Л.: Стройиздат, 1986. 280 с.
43. Крылов А. Н. Вибрация судов. Л., М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 442 с.
44. Кочедамов В. И. Мосты Ленинграда. Л., М.: Искусство, 1958. 60 с.
45. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.

46. Бишоп Р. Колебания. М.: Наука, 1986. 192 с.
47. Billah K. Y., Scanlan R. H. Resonance, Tacoma Narrows Bridge failure, and undergraduate physics textbooks // *American Journal of Physics*. 1991. 59 (2). Pp. 118–124.
48. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.
49. Динамика машин и управление машинами. Справочник. / Под ред. Г. В. Крейнина. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
50. Асташев В. К. О новых направлениях использования явления резонанса в машинах // *Вестник научно-технического развития*. № 8 (48), 2011. С. 10–15.
51. Фрадков А. Л. Исследование физических систем при помощи обратных связей // *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 3. С. 213–230.
52. Fradkov A. L. Exploring nonlinearity by feedback // *Physica D*. 1999, V. 128, № 2–4. Pp. 159–168.
53. Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
54. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление процессом раскачивания качелей // *Неделя науки СПбПУ. Материалы научного форума с международным участием. Институт прикладной математики и механики*. 2016. С. 106–109.
55. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Коллинеарное управление движением однозвенного манипулятора с переменным усилением // *Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы IV Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 12-16 апреля 2021 г. Ч. 2*. 2021. С. 70-73.
56. Меркин Д. Р., Смольников Б. А. Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. 534 с.
57. Смольников Б. А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
58. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // *Машиностроение и инженерное образование*. 2017. № 4 (53). С. 11–19.
59. Усвицкий И. Механика, удобная механизмам // *Знание-сила*. 1986. №. 6.
60. Долгинов А. И. Резонанс в электрических цепях и системах. М., Л.: Гос. энерг. изд-во, 1957. 328 с.

REFERENCES

1. Brown, E. W. 1932, *Elements of the theory of resonance*, Cambridge, at the University press, 60 p.
2. Smirnov, A.S. and Smolnikov, B.A. 2018, “Resonance oscillations control in the nonlinear mechanical systems”, *Transactions of seminar “Computer Methods in Continuum Mechanics” 2016-2017*, pp. 23-39.

3. Smolnikov, B. A. and Smirnov, A. S. 2021, “The history of resonance – from simple resonance to autoresonance”, *The Ninth Polyakhov’s Reading, Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics, March 9-12, 2021, Saint-Petersburg, Russia*, pp. 457-459.
4. Frova, A. and Marenzana, M. 2006, *Thus spoke Galileo: the great scientist’s ideas and their relevance to the present day*, Oxford University Press, 493 p.
5. Jones, M. D. and Flaxman, L. 2009, *The Resonance Key New Page Books: Exploring the Links Between Vibration, Consciousness, and the Zero Point Grid*, New Page Books, 2009, 256 p.
6. Fradkov, A. L. 2003, *Cybernetical Physics*, St. Petersburg, Nauka, 208 p.
7. Galilei, G. 1964, *Selected Works, V. 2*, Moscow, Nauka, 572 p.
8. Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J. 2001, *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge, Cambridge University Press, 411 p.
9. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, T. 17*. 1967, Amsterdam, Swets & Zeitlinger N. V., 552 p.
10. Blekhman, I. I., 1981, *Synchronization in nature and technology*, Moscow, Nauka, 352 p.
11. Alfvén, H. and Arrhenius, G. 1976, *Evolution of the solar system*, Washington D. C., Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration, 599 p.
12. Smolnikov, B. A. 2014, *Mechanics in the history of science and society*, Moscow, Izhevsk, RCD, 608 p.
13. Roy, A. 1978, *Orbital motion*, New York, Wiley, 489 p.
14. Appel, P. 1960, *Theoretical Mechanics, V. 2, Dynamics of the system, Analytical mechanics*, Moscow, Fizmatlit, 487 p.
15. Stoyanovskiy, S. M. and Smirnov, A. S. 2018, “Evolutionary dynamics of pendulum systems with several degrees of freedom”, *Week of Science SPbPU, The best reports*, pp. 224-229.
16. Bernoulli, D. 1774, “Commentatio physico-mechanica specialior de motibus reciprocis compositis. Multifariis nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius observari possint in confirmationem principii sui de coexistentia vibrationum simpliciorum”, *Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, T. 19, 260-284 pp.
17. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2020, “Double pendulum research history”, *History of Science and Engineering*, no. 12, pp. 3-12.
18. Loitsyansky, L. G. and Lurie, A. I. 1934, *Theoretical mechanics, V. 3, Dynamics of a non-free system and the theory of oscillations*, Moscow, Leningrad, ONTI, 625 p.
19. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2019, *Spherical pendulum mechanics*, St. Petersburg, Polytech-press, 266 p.
20. Puisseux, V. A. 1842, “Sur le mouvement d’un point matériel pesant sur une sphère”, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, s. 1, v. 7, pp. 517–520.
21. Krylov, A. N. 1949, *Collection of works, In 12 vol., Vol. 3, P. 1*, Moscow, Leningrad, publ. house of Academy of Sciences of the USSR, 350 p.

22. Timoshenko, S.P. 1937, *Vibration Problems in Engineering*, New York, D. Van Nostrand Company, 470 p.
23. Butikov, E.I., Bykov, A.A. and Kondratiev, A.S. 1982, *Physics for university applicants*, Moscow, Nauka, 608 p.
24. Merkin, D.R. 1987, *Introduction to the theory of stability of motion*, Moscow, Nauka, 304 p.
25. Biderman, V.L. 1980, *The theory of mechanical oscillations*, Moscow, Vyshaya shkola, 480 p.
26. Panovko, Ya. G. and Gubanov, I.I. 1979, *Stability and oscillations of elastic systems*, Moscow, Nauka, 384 p.
27. *Strength, stability, oscillations. Handbook in three volumes, V. 3*, 1968, ed. by Birger, I. A. and Panovko, Ya. G, Moscow, Mashinostroenie, 567 p.
28. Panovko, Ya. G. 1991, *Introduction to the theory of mechanical oscillations*, Moscow, Nauka, 256 p.
29. Krupenin, V.L. 2013, “On the number of periodic modes of motion of nonlinear vibration systems with periodic polyharmonic oscillations”, *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya*, no. 4 (68), pp. 14-19.
30. Olkhovsky, I.I. 1974, *Theoretical mechanics course for physicists*, Moscow, Moscow University, 569 p.
31. Panovko, Ya. G. 1976, *Foundations of the applied theory of oscillations and impact*, Leningrad, Mashinostroenie, 320 p.
32. Chechurin, S.L. 2014, *Parametric resonance – pain and joy*, St. Petersburg, izd-vo SPbGPU, 67 p.
33. Mandelstam, L.I. 1972, *Lectures on the theory of oscillations*, Moscow, Nauka, 470 p.
34. Hill, G.W. 1886, “On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon”, *Acta Mathematica*, vol. 8, pp. 1-36.
35. Kovacic, I., Rand, R. and Sah, S.M. 2018. “Mathieu’s Equation and its Generalizations: Overview of Stability Charts and their Features”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 7. no. 2, 020802.
36. Ince, E. 1927, “Research Into the Characteristic Numbers of Mathieu Equation”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 46, pp. 20–29.
37. Strutt, M.J.O. 1928, “Zur Wellenmechanik des Atomgitters”, *Annalen der Physik*, 391 (10), pp. 319–324.
38. Smirnov, A.S. and Degilevich, E. A. 2021, *Oscillations of chain systems*, St. Petersburg, Polytech-press, 246 p.
39. Routh, E.J. 1892, *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, P. 2*, London, New York, Macmillan, 431 p.
40. Taylor, R. and Phillips, R. 1831, “Fall of the Broughton suspension bridge, near Manchester”, *The Philosophical Magazine, Or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History, and General Science*, vol. 9. no. 53, pp. 384–389.

41. “Rapport de la commission d’enquête nommée par arrêté de M. le préfet de Maine-et-Loire, en date du 20 avril 1850, pour rechercher les causes et les circonstances qui ont amené la chute du pont suspendu de la Basse-Chaine”, 1850, *Annales des ponts et chaussées*, no. 237, tome XX, pp. 394–411.
42. Bunin, M. S. 1986, *The Bridges of Leningrad. Essays on the history and architecture of the bridges of St. Petersburg – Petrograd – Leningrad*, Leningrad, Stroyizdat, 280 p.
43. Krylov, A. N. 1936, *Vibration of ships*, Leningrad, Moscow, ONTI NKTP USSR, 442 p.
44. Kochedamov, V. I. 1958, *The Bridges of Leningrad*, Leningrad, Moscow, Iskusstvo, 60 p.
45. Ziegler, H. 1968, *Principles of Structural Stability*, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company, 150 p.
46. Bishop, R. *Vibration*, Cambridge, at the University press, 1965, 120 p.
47. Billah, K. Y. and Scanlan, R. H. 1991, “Resonance, Tacoma Narrows Bridge failure, and undergraduate physics textbooks”, *American Journal of Physics*, 59 (2), pp. 118–124.
48. Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaikin, S. E. 1981, *The Theory of Oscillations*, Moscow, Nauka, 918 p.
49. *Machine dynamics and control, Directory*, 1988, ed. by Kreinin, G. V., Moscow, Mashinostroenie, 240 p.
50. Astashev, V. K. 2011, “On new directions of using the resonance phenomenon in machines”, *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya*, no. 8 (48), pp. 10-15.
51. Fradkov, A. L. 1999, “Analysis of physical systems by means of feedback”, *Automation and Remote Control*, no. 3, pp. 213–230.
52. Fradkov, A. L. 1999, “Exploring nonlinearity by feedback”, *Physica D.*, vol. 128, no. 2–4, pp. 159–168.
53. Magnus, K. 1982, *Oscillations: an introduction to the study of oscillatory systems*, Moscow, Mir, 304 p.
54. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2016, “Controlling the sway process of the swing”, *Week of Science SPbPU, Materials of the scientific forum with international participation, Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, pp. 106-109.
55. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2021, “Collinear control of single-link manipulator motion with variable gain”, *Youth and Science: actual problems of fundamental and applied research, Materials of the IV All-Russian scientific conference of students, postgraduates and young scientists, Komsomolsk-on-Amur, April 12-16 2021*, vol. 2, pp. 70-73.
56. Merkin, D. R. and Smolnikov, B. A. 2003, *Applied problems of rigid body dynamics*, St. Petersburg, SPbSU publ., 534 p.
57. Smolnikov, B. A. 1991, *The problems of mechanics and robotoptimization*, Moscow, Nauka, 232 p.
58. Smirnov, A. S. and Smolnikov, B. A. 2017, “Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics”, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, no. 4, pp. 11-19.

59. Usvitsky, I. 1986, "Mechanics convenient to Mechanisms", *Znanie – sila*, no. 6.
60. Dolginov, A.I. 1957, *Resonance in electrical circuits and systems*, Moscow, Leningrad, Gos. energ. izd-vo, 328 p.

Получено 19.07.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.