

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-209-222

О теореме Пуанкаре — Биркгофа как важнейшем результате теории динамических систем¹

Р. Р. Мухин

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова, филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: mukhin@mail.ru

Аннотация

Целью работы является изучение истории теоремы Пуанкаре — Биркгофа, которая является не только одним из результатов, лежащих в основе теории динамических систем, но имеет важное значение для приложений. До настоящего времени теорема Пуанкаре — Биркгофа рассматривалась в историческом плане лишь фрагментарно и не являлась предметом последовательного исторического исследования. Исследование основано на анализе оригинальных работ, историко-научной литературы с привлечением воспоминаний участников описываемых событий. Идея Пуанкаре заключалась в установлении периодических движений динамических систем с помощью предложенной им геометрической теоремы. Периодические движения, в свою очередь, должны были послужить основой для изучения других, сложных движений. Поиски доказательства явились мощным импульсом для Биркгофа в построении теории динамических систем, который вместе с Пуанкаре является основателем этой области математики. Теорема Пуанкаре — Биркгофа имеет ключевое значение в понимании механизма возникновения хаотического движения в гамильтоновых системах. История теоремы Пуанкаре — Биркгофа не закончена, она играет значительную роль в современной теории динамических систем и ее приложениях. Продолжаются поиски доказательства многомерного аналога теоремы, ее различных обобщений и дальнейших приложений.

Ключевые слова: интегрирование дифференциальных уравнений, проблема трех тел, динамическая система, периодические движения, хаотические движения.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:

Р. Р. Мухин. О теореме Пуанкаре — Биркгофа как важнейшем результате теории динамических систем // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 209–222.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-011-00402 А)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-209-222

On the Poincaré-Birkhoff theorem as the important result of the theory of dynamical systems²

R. R. Mukhin

Mukhin Raviľ Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Sary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISiS” (Sary Oskol).

e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The aim of this work is to study the history of the Poincaré-Birkhoff theorem, which is not only one of the results underlying the theory of dynamical systems, but is important for applications. Until now, the Poincaré-Birkhoff theorem has been considered historically only fragmentarily and has not been the subject of consistent historical research. The research is based on the analysis of original works, historical and scientific literature, involving the recollections of participants in the described events. Poincaré’s idea was to establish the periodic motions of dynamical systems using the geometric theorem he proposed. Periodic movements, in turn, were supposed to serve as a basis for studying other, complex movements. The search for a proof was a powerful impetus for Birkhoff in the construction of the theory of dynamical systems, who, together with Poincaré, is the founder of this area of mathematics. Poincaré-Birkhoff theorem is of key importance in understanding the mechanism of the onset of chaotic motion in Hamiltonian systems. The history of the Poincaré-Birkhoff theorem is not complete; it plays a significant role in the modern theory of dynamical systems and its applications. The search continues for a proof of a multidimensional analogue of the theorem, its various generalizations, and further applications.

Keywords: integration of differential equations, three-body problem, dynamical system, periodic motions, chaotic motions.

Bibliography: 38 titles.

For citation:

R. R. Mukhin, 2022, “On the Poincaré-Birkhoff theorem as the important result of the theory of dynamical systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 209–222.

В 1912 г., незадолго до смерти, А. Пуанкаре направил в редакцию *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (Отчеты математического общества Палермо) статью под названием *Об одной геометрической теореме*. В письме редактору журнала Дж.Б. Гучча Пуанкаре с беспокойством писал:

«Мой дорогой друг, во время вашего последнего посещения я говорил вам о работе, которая удерживает меня вот уже два года. Я не продвинулся дальше и решаюсь пока оставить ее, чтобы дать ей время созреть. Было бы хорошо, если бы я был уверен, что смогу снова взяться за нее. Но в моем возрасте я не могу за это поручиться, а полученные результаты могут

²The work was supported by the RFBR, project No. 20-011-00402 A

направить исследователей на новые и неизведанные пути и кажутся мне слишком много обещающими, несмотря на причиненные мне ими разочарования, чтобы я ими пожертвовал. В таких условиях сочтете ли вы подходящим опубликовать незаконченный мемуар, где я изложил бы цель, которую преследовал, задачу, которую себе поставил, и результаты моих усилий ее решить?» [1, Т. 2. С. 984].

Вся математическая деятельность Пуанкаре была направлена главным образом на решение одной задачи – интегрирование дифференциальных уравнений. Здесь у него целая россыпь идей, созданы новые области и направления, которые в значительной степени определяют современный облик математики. Указанная работа является в некотором смысле итогом деятельности Пуанкаре, его «прощальным поклоном» и стоит в ряду его главных достижений.

Решение дифференциальных уравнений представляет важнейшую задачу с самого начала создания теории бесконечно малых. Главной областью приложений в первые два столетия являлась небесная механика – проблема n тел. Даже в самом простом случае при $n = 3$ задача обладает неисчерпаемым содержанием. Впервые проблема трех тел была сформулирована И. Ньютоном в его «Началах» [2, С. 548–558], изучавшего движение Луны и Земли вокруг Солнца. Ньютон прекрасно осознавал крайнюю трудность задачи. Полученное им решение по лунной вариации очень близко к современным результатам и представляет один из первых и глубоких триумфов небесной механики [3, С. 237]. Результаты Ньютона по проблеме трех тел имеют еще более важное значение – ему принадлежит первый *общий подход* к решению дифференциальных уравнений. В проблеме трех тел мы имеем систему с 9-ю степенями свободы, описываемую 9-ю уравнениями движения второго порядка или 18-ю уравнениями первого порядка. С помощью редукции эту систему можно свести к 12 уравнениям, т.е. имеем систему в 12-мерном пространстве. Для построения интегральной кривой от исходной точки в этом пространстве находится последующая точка, и вся кривая строится с помощью последовательных малых элементов. Такой метод является очень общим, но его практическая реализация требует огромного объема вычислений. Лишь с появлением ЭВМ метод Ньютона нашел широкое применение. Можно сказать, что все численные методы представляют собой развитие и модернизацию идей Ньютона.

До самого конца XIX в. общим методом решения задач небесной механики оставались различные варианты теории возмущений, когда в изучаемой системе имеется малый параметр. Так, в рассматривавшейся еще Ньютоном задаче о движении Луны и Земли вокруг Солнца таким параметром является отношение масс Луны и Земли $M_L/M_Z \approx 0.0123$. Несмотря на успехи небесной механики, методы теории возмущений оставались ограниченными. Все это время не прекращались поиски новых подходов к главной задаче – интегрированию дифференциальных уравнений. Требовались новые идеи. Пуанкаре сам внес значительный вклад в методы теории возмущений, и как никто другой видел их ограниченность. Он предложил принципиально иной подход к решению задачи, взяв за основу периодические движения. Идея заключалась в том, что, если такие решения плотно заполняют какую-то область, то с их помощью можно будет изучить свойства других решений и периодические решения тогда приобретают большое теоретическое значение. Все было ясно для случая предельного поведения (при $t \rightarrow \pm\infty$) систем с двумя степенями свободы, который уже был изучен Пуанкаре в его мемуарах по качественной теории дифференциальных уравнений [4]. Там положениям равновесия и периодическим решениям принадлежит центральное место. Но в более сложных случаях вопрос остается открытым и все устремления Пуанкаре были направлены на его разрешение. Периодические решения рассматривались задолго до Пуанкаре. В упомянутой теории Луны Ньютон указал на периодические решения в проблеме трех тел в системе вращающихся осей. Метод вращающихся осей получил систематическое развитие у Л. Эйлера, который нашел периодическое решение проблемы трех тел (1767) [5, С. 334–350], когда они находятся на одной прямой, вращающейся вокруг их центра масс. Другой класс периодических движений, когда три тела находятся в вершинах равностороннего треугольника, был найден Ж.Л. Лагранжем

в его знаменитом мемуаре о проблеме трех тел (1772) [6]. Периодические решения играют очень важную роль в классических исследованиях движения Луны Дж. Хилла (1878) [7]. Но только у Пуанкаре периодические решения заняли центральное место.

Выделенность периодических решений определяется тем, что, как только они становятся известны на протяжении одного периода, они становятся известными на всей временной оси, и на их основе можно изучать все множество решений. Кроме того, периодические решения можно довольно просто изучать современными численными методами. По словам Пуанкаре: «Особая ценность периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной» [1, Т. 1. С. 75].

Периодические решения привлекали пристальное внимание Пуанкаре в течение всей его научной деятельности. К ним он впервые обратился в 1883 г. в небольшой заметке о проблеме трех тел [8] и продолжил их изучение в работе [9], в которой высказал идеи, легшие в основу его знаменитого конкурсного мемуара 1890 г. [10]. Наиболее полное развитие все это получило в «Новых методах небесной механики» [1]. Периодические решения сыграли ключевую роль в установлении неинтегрируемости проблемы трех тел.

Пуанкаре формулирует как основную задачу динамики изучение канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (1)$$

в предположении, что функция F может быть разложена по степеням малого параметра μ

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots \quad (2)$$

В III главе своего труда Пуанкаре переходит к подробному изучению периодических решений, исходя из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

где X – данные однозначные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть

$$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_3 = \phi_3(t) \quad (4)$$

является периодическим решением системы (3). Пуанкаре ставит следующую задачу: если в уравнениях (3) функции X зависят от некоторого μ и при $\mu = 0$ существуют периодические решения, то при каких условиях существуют решения для малых значений μ [1, Т. I. С. 34, 73-75]?

Здесь надо подчеркнуть, что вся идеология «Новых методов» проникнута идеями качественного подхода. «Новые методы небесной механики» являются органическим продолжением трудов Пуанкаре «*Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle*» («О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями») [4] и конкурсного мемуара «*Sur le problème des trois corps et les équations dynamique*» [10]. Количественные методы, аналитические или численные, дают вполне точную информацию о поведении системы. Однако это обычно ограничивается данным решением и его малой окрестностью, причем в большинстве случаев точность уменьшается или исчезает вовсе с увеличением времени. Качественные методы основываются на строго доказанных утверждениях. Они устанавливают классификацию, существование и единственность решений, интегралы движения, особенности, асимптотические свойства. Если речь идет об уравнениях динамики, сюда можно добавить периодические решения, устойчивость, финальные движения, теорию КАМ, эргодическую теорию, структуру множества решений [11, С. 318].

С самого начала Пуанкаре столкнулся с двумя существенными ограничениями, сужающих область применимости развиваемых им методов. Во-первых, параметр μ должен быть малым, чтобы ряд (2) сходился. И второе, при изменении μ в каком-либо промежутке $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ характер решения в качественном отношении должен сохраняться. Говоря современным языком, система не должна быть структурно неустойчивой. Например, периодическое решение может перейти в решение с бесконечно большим периодом. Не отказываясь от своей идеи, что произвольное движение динамической системы может быть аппроксимировано периодическими движениями при условии их всюду плотного распределения среди всех возможных движений, Пуанкаре искал способы выйти за пределы указанных ограничений. Этот путь в конечном итоге привел его к геометрической теореме.

В 1896 г. Пуанкаре в небольшой заметке [12] предложил искать периодические решения с помощью вариационного принципа. Для случая ньютоновского потенциала, обратно пропорционального расстоянию, Пуанкаре не удалось преодолеть встретившиеся трудности, поэтому он рассмотрел задачу для «потенциала сильного взаимодействия», обратно пропорционального квадрату расстояния (подробно об этом обсуждается в работе А. Шенсине [13]). В поисках периодических решений уравнений небесной механики Пуанкаре помимо трудностей по существу задачи столкнулся с трудностями, обусловленными спецификой уравнений. Постепенно он пришел к выводу, что надо рассмотреть самую простую динамическую задачу, свободную от второстепенных трудностей. Такой задачей является задача о геодезических линиях на поверхности. В этом случае имеются всего две степени свободы и можно выбрать поверхность без особых точек. Геодезический поток представляет собой обобщение математической модели движения материальной точки на гладкой поверхности и не подверженной действию внешних сил. Задачу о геодезических потоках на поверхностях отрицательной кривизны решил Ж. Адамар (1898) [14]. Эта работа Адамара примечательна в том отношении, что в ней впервые была обнаружена важнейшая характеристика хаотического движения динамических систем, известная как чувствительная зависимость от начальных условий. Пуанкаре же через несколько лет после Адамара изучал задачу о геодезических потоках на выпуклых поверхностях (1905) [15], поскольку, как он отмечал: «Траектории задачи трех тел сопоставимы не с геодезическими линиями отрицательной кривизны, а, наоборот, с геодезическими линиями на выпуклых поверхностях» [15, С. 735]. Может создаться впечатление, что здесь Пуанкаре вроде бы не воспринял ключевую идею Адамара о чувствительной зависимости от начальных условий. Это кажется противоречащим описанию Пуанкаре гомоклинической сети в III томе «Новых методов небесной механики» (1897) [1, Т. 2. С. 339]. Кроме того, в своем труде «Наука и метод» Пуанкаре отмечает: «Небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем» [16, С. 323]. Возможное объяснение заключается в нацеленности Пуанкаре на главную задачу, а все связанное с хаотической динамикой выглядело в его глазах второстепенным и отошло на задний план. Замкнутые геодезические играют ту же роль, что периодические решения в проблеме трех тел. Хотя предложенный Пуанкаре метод не привел к поставленной им цели — выйти за пределы указанных ограничений в поисках периодических решений — новые идеи, с обычной для Пуанкаре щедростью представленные в работе [15], привели к важным результатам, полученными последующими поколениями математиков (Дж. Биркгофом, Л.А. Люстерником, Л.Г. Шнирельманом, М. Морсом и др.).

Перейдем к геометрической теореме Пуанкаре [17]. Она утверждает следующее (формулировка Биркгофа):

Пусть дано кольцо $0 < a \leq r \leq b$ в плоскости, определяемой полярными координатами r , θ и некоторое взаимно однозначное, непрерывное, сохраняющее площадь преобразование T этого кольца в себя и p при этом такое, что точки окружности $r = a$ передвигаются при этом преобразовании вперед (т.е. в направлении возрастающих θ), а точки окружности $r = b$ передвигаются назад (в направлении убывающих θ). Тогда в кольце будут существовать по

меньшей мере две точки, инвариантные при преобразовании T [18, С. 172].

После пояснений к формулировке теоремы Пуанкаре показал, как ее можно использовать в задачах динамики. Сначала он рассмотрел простейшую задачу с двумя степенями свободы – проблему геодезических линий на выпуклой поверхности. Более важным является применение теоремы для ограниченной проблемы трех тел. Пуанкаре показал, что, если его теорема верна и существует периодическое решение, то существует бесконечно много периодических решений. Мемуар Пуанкаре [17] остался незаконченным, он не дал полного доказательства. Но здесь он предвосхитил основные положения теории Морса. Надо заметить, что в то время Пуанкаре уже был тяжело болен, и медицина того времени была бессильна ему помочь. Он успел рассмотреть большое количество частных случаев, и во всех из них теорема оказалась верной.

Через несколько месяцев после смерти Пуанкаре доказательство его теоремы было дано Джорджем Биркгофом [19]. С работ Биркгофа начинается новый этап в развитии качественной теории. Большое влияние на Биркгофа оказало его знакомство с известным геометром Оскаром Вебленом, когда Биркгоф недолго (1909–1912) работал в Принстонском университете – центре геометрических исследований в то время в США. У Веблена он изучал только что родившуюся топологию, что оказало глубокое воздействие на последующую научную деятельность Биркгофа. Биркгоф, не будучи непосредственным учеником Пуанкаре, был его главным последователем. Веблен вспоминал, что Биркгоф в беседах на математические темы часто ссылался на «Новые методы небесной механики» [20, Р. 6].

Найденное Биркгофом доказательство является очень простым и при том в духе Пуанкаре. Биркгоф доказал существование одной неподвижной точки, но его аргументация о существование второй оказалась не совсем верной. Эту ошибку Биркгоф исправил в другой своей работе (1926) [21]. Однако данное доказательство не для всех явилось убедительным, полностью логически безупречным, и поиски строго доказательства продолжались несколько десятилетий. Лишь в 1977 г. оно было дано М. Брауном и У. Нойманом [22]. Полная драматизма история доказательства геометрической теоремы Пуанкаре приведена в докладе А.Н. Кириллова [23].

Геометрическая теорема Пуанкаре дала мощные импульсы для развития исследований в нескольких направлениях математики и физики. В первую очередь следует назвать исследования самого Биркгофа, стимулированные поисками доказательства теоремы Пуанкаре. Биркгоф был математиком с широким кругом интересов, куда входили и такие области, как теория чисел и линейные дифференциальные уравнения. Но главный вклад он внес в теорию динамических систем. Исследования Биркгофа по динамическим системам проходили в трех направлениях. Он исходил из проблемы трех тел, от нее перешел к специальной задаче динамики систем с двумя степенями свободы и затем к общей теории динамических систем. Важным рубежом явился коллоквиум математиков в университете Чикаго в сентябре 1920 г., организованного Американским математическим обществом [24]. На коллоквиуме присутствовало 90 математиков и было прочитано два цикла лекций: Дж. Биркгофом «Динамические системы» и Ф.Р. Мултоном «О теории функций с бесконечным числом переменных» (так в то время назывался рождающийся функциональный анализ). Сам выбор тем весьма примечателен, это был передний край математической науки: приложения топологии и функциональный анализ. В лекциях Биркгофа принципиальное значение имело применение для исследования динамических систем топологических методов. Как сказано в одной работе, Биркгоф вместе с Пуанкаре (который является создателем этой области математики) повенчал топологию и анализ. Первая лекция была вводной и касалась традиционных подходов. А вот во второй лекции Биркгоф рассматривает периодические движения и методы их нахождения, геометрическую теорему Пуанкаре, гиперболические периодические движения и их асимптотики, устойчивые и неустойчивые эллиптические движения вместе с их асимптотиками, другие типы движений, в том числе обобщения периодических движений – рекуррентные движения. Различию гиперболических и эллиптических движений Биркгоф придает принципиальное значе-

ние. Заканчивается лекция рассмотрением общей теории динамических систем. Следующая лекция посвящена понятиям транзитивности и интранзитивности, то, что составляет предмет эргодической теории, и связанной с этими понятиями другого фундаментального понятия — неинтегрируемости. Четвертая лекция отведена приложению изложенных в предыдущих лекциях основ теории динамических систем к конкретной фундаментальной задаче — проблеме трех тел и ее обобщений. Весь материал этих четырех лекций составил ядро основного труда Биркгофа *Динамические системы*, который вышел в 1927 г. [18]. Этот труд явился итогом его исследований более, чем за полтора десятилетия.

Периодические движения находятся в центре внимания Биркгофа и в его последующих исследованиях [25]–[28]. Биркгоф развивает идею Пуанкаре об аппроксимации любого движения динамических систем периодическими движениями. Он показал, что в системе с двумя степенями свободы при наличии устойчивой периодической траектории в ее окрестности существует бесконечное множество устойчивых периодических движений, но вопрос плотности этого множества остается открытым. Особенно примечателен, написанный на французском языке, большой мемуар Биркгофа 1935 г. [28]. По непонятным причинам он незаслуженно менее известен, чем *Динамические системы* [18], и значительно меньше цитируется. Между тем, у этого мемуара богатое содержание. Биркгоф дает общую классификацию периодических движений; систематически исследует гиперболические и эллиптические случаи, отличая их фундаментальные различия; устанавливает плотность асимптотических решений. Очень важным является следующий результат: при итерациях отображения T_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) всегда существует бесконечное множество гиперболических неподвижных точек; из наличия одной эллиптической неподвижной точки следует существование бесконечного множества таких точек. Здесь упомянуто только главное из богатства этого мемуара. Более или менее подробный разбор потребует не одной статьи.

Теорема Пуанкаре–Бирхгофа нашла широкое применение в изучении сложного поведения динамических систем (см., например, [29, 30]). В интегрируемых гамильтоновых системах с N степенями свободы движение является условно-периодическим с N частотами ω_i и траектории лежат на N -мерном торе. При наложении возмущения система становится неинтегрируемой. Решающее значение здесь имеют резонансы. Для двух степеней свободы с частотами ω_1 и ω_2 резонансы имеют место при условии $l\omega_1 + m\omega_2 = 0$, где l и m — целые числа, т.е. отношение частот (число вращения) $\rho = \omega_1/\omega_2$ является рациональным и движение периодическое. При иррациональном отношении частот имеем квазипериодическое движение, плотно заполняющее поверхность тора. Резонансы являются основной причиной неинтегрируемости, что было установлено еще Пуанкаре, и приводят к расходимости рядов теории возмущений. Согласно теории КАМ при наложении возмущения большинство (в смысле меры) нерезонансных торов сохраняется и лишь деформируется, резонансные торы, мера которых $\delta\Gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$, когда параметр возмущения $\varepsilon \rightarrow 0$, являются структурно неустойчивыми и они разрушаются.

Именно теорема Пуанкаре — Биркгофа лежит в основе понимания механизма разрушения резонансных торов, в возникновении сложного поведения системы. Как уже говорилось, характер неподвижных точек при отображении кольца бывают двух типов, качественно отличных друг от друга: гиперболические и эллиптические точки [18, 28]. В. И. Арнольд провел подробное исследование эллиптической точки общего вида и доказал ее устойчивость [31]. На современном языке все это можно представить следующим образом. Рассмотрение динамики системы упрощается при использовании сечения Пуанкаре, когда движение описывается рекуррентными соотношениями с дискретным временем. Для двумерных систем картина становится совершенно наглядной. Теореме Пуанкаре — Биркгофа для данного случая можно сформулировать следующим образом: в возмущенной системе с числом вращения $\rho = \omega_1/\omega_2$ при итерациях отображения в сечении Пуанкаре имеется $2k$ неподвижных точек. Половину из них составляют устойчивые эллиптические точки, другую половину — неустойчивые гиперболические точки. В окрестности гиперболической точки имеется четыре инвариантных

направления (ветви сепаратрисы), два из которых устойчивы и входят в гиперболическую точку, а два неустойчивы и выходят из нее (Рис. 1, 2). Пуанкаре показал, что пересечение ветвей сепаратрисы приводит к крайне сложной картине поведения системы [1, Т. 2. С. 339].

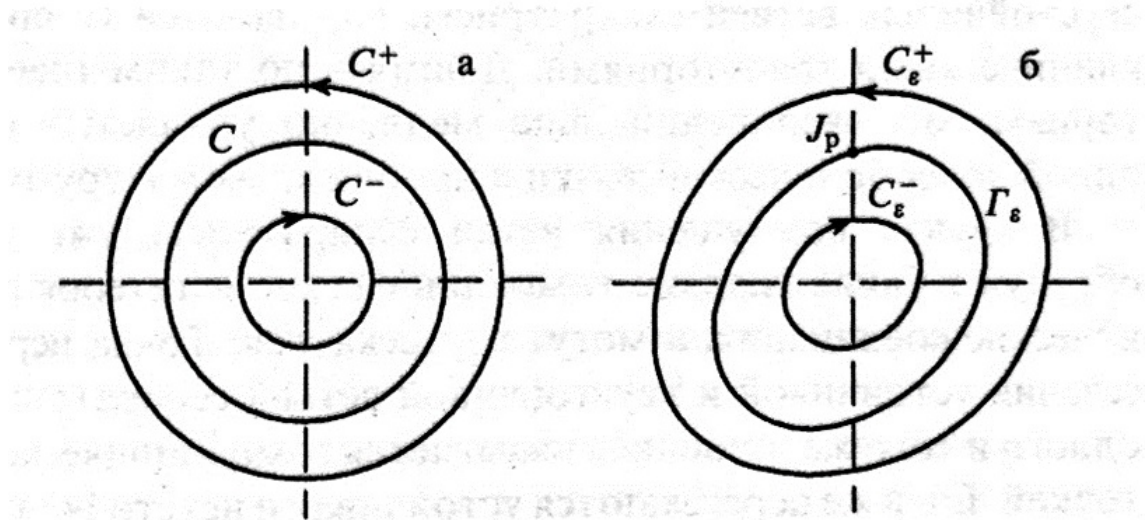


Рис. 1: (а) C, C^+, C^- невозмущенные отображения P_0 при $\rho = l/m$, $\rho > l/m$ и $\rho < l/m$ соответственно, (б) – результат действия возмущения P_ϵ [32].

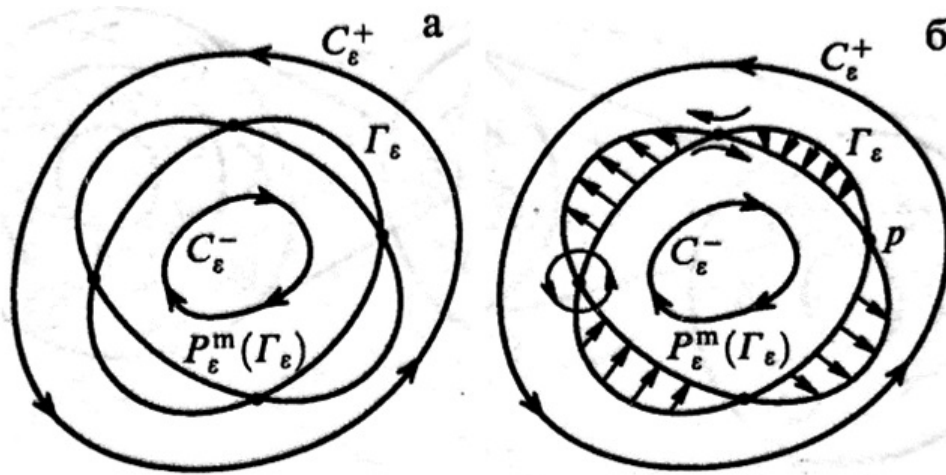


Рис. 2: Преобразование кривой Γ_ϵ в кривую $P_\epsilon(\Gamma_\epsilon)$ при действии отображения P_ϵ (а) и возникновение при этом гиперболической и эллиптической точки (б) [32]

Каждая эллиптическая точка окружена инвариантными относительно m -кратной последовательности итераций отображения P_ϵ^m замкнутыми траекториями, которые образуют островки устойчивости. Такая ситуация характерна для нелинейных систем в окрестности резонанса при малом возмущении. Каждый островок окружен вторичной цепочкой эллиптических и гиперболических точек и т.д., и он в миниатюре воспроизводит всю структуру в целом (Рис. 3). Насколько известно автору, картину в такой форме впервые представил Арнольд в своих лекциях в 1965 г. [33].

В реальных системах тоже присутствует бесконечное число эллиптических точек, окруженных островками инвариантных кривых. Наличие этих островков влияет на близлежащие траектории, что приводит к изменению структуры фазового пространства. Особую проблему

составляет граничная область вблизи островков. Вокруг выбранного островка существует цепочка вторичных островков, которые в свою очередь окружены цепочками следующего уровня и т.д. Таким образом, имеется сложная самоподобная иерархическая структура (Рис. 4).

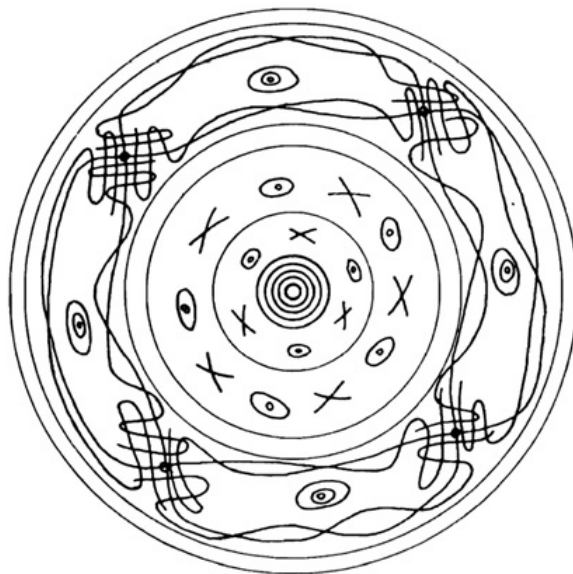


Рис. 3: Неподвижные точки отображения и регулярные и хаотические траектории [33]

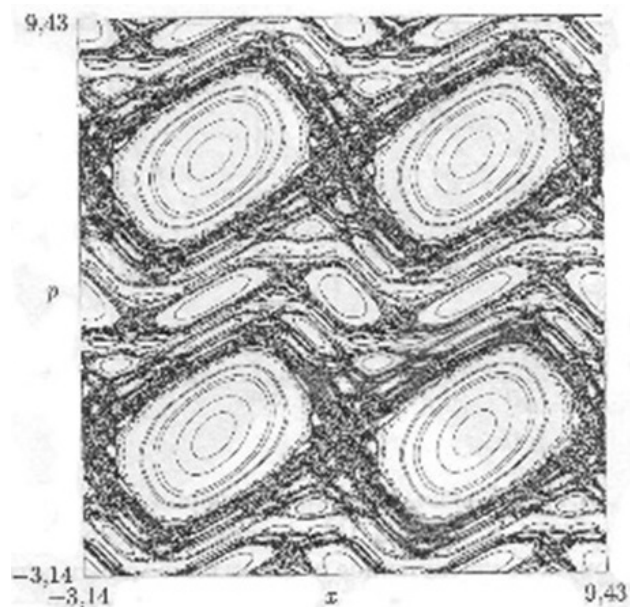


Рис. 4: Стохастическое “море” и островки устойчивости в разделенном фазовом пространстве [34]

Представленную математическую модель можно применить к конкретным физическим системам. Пуанкаре принадлежит глубокое замечание, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой [18, С. 255], и рассмотрим тот случай, который относят к сильной неинтегрируемости. При величине параметра стохастичности $K \gg 1$ по Заславскому и Чирикову система становится локально неустойчивой почти всюду [29]. Под почти всюду понимается не исключение областей нулевой меры, как принято в эр-

голической теории, а относится к областям малой, но конечной меры. Это незначительное, на первый взгляд, различие приводит к очень важным последствиям. Эргодическая теория дает статистическое описание динамических систем, когда сложное поведение, хаотичность присутствует, так сказать, в “чистом виде”. Простая картина движения, когда отдельно существуют области регулярности и хаоса с более или менее четко выраженной границей, является сильно идеализированным представлением. Реальные системы являются неоднородными, в них всегда имеются области устойчивого движения малой меры.

Разделенное фазовое пространство, другими словами, сосуществование областей с регулярным и хаотическим движением представляет одну из самых удивительных особенностей хаоса и одновременно является главным препятствием для математически строгого описания. Последнее казалось бы, можно осуществить выделением областей с регулярным движением, что относится к случаю интегрируемых систем, а для нерегулярного движения использовать статистическое описание. Однако простое исключение из области неустойчивости “вкрапленных” с регулярным движением не приводит к упрощению ситуации, поскольку эргодическая компонента заполняет область фазового пространства очень сложной формы. Часть фазового пространства с хаотической динамикой получила название стохастического моря (Рис. 4). Если вспомнить, что островок в стохастическом море соответствует области начальных условий, при которых движение является регулярным, то становится ясным условность понятия интегрируемости в системах с разделенным фазовым пространством. Эта условность представляет отражение того факта, что регулярная и хаотическая компонента переплетены, обладают очень сложной топологией, которая трансформируется при изменении параметров системы.

История теоремы Пуанкаре — Биркгофа далеко не закончена. До сих пор рассматривался простейший вариант теоремы. Но она допускает глубокие обобщения и позволяет установить нетривиальные связи с различными разделами математики. Рассмотрение таких обобщений — это уже отдельная история, поэтому ограничимся только несколькими замечаниями. Теорема Пуанкаре — Биркгофа тесно связана с симплектической геометрией [35]–[37]. В этом случае круговое кольцо заменяется компактным замкнутым симплектическим многообразием. Было установлено, что гомологичный тождественному симплектический диффеоморфизм компактного симплектического многообразия $M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ имеет по меньшей мере столько критических точек, сколько критических точек у гладкой функции на этом многообразии. При применении к двумерному тору $M^2 = T^2$ этот результат дает на торе 4 неподвижные точки, а в кольце — две [35]–[38]. Очень вероятно, что периодические траектории гамильтоновых систем общего положения всюду плотны, но это еще не доказано. По поводу обобщений можно сказать, что «развивающие эту тему работы Хофера, Флоера, Громова, Элиашберга, Витербо, Вейнстана, Гивенталья и др. уже могли бы составить целую книгу» [36, С. 393]. Современная математика в значительной степени развивается в освоении наследия Пуанкаре, которое еще далеко не исчерпано. Геометрическая теорема в этом процессе занимает важнейшее место.

Выражаю благодарность участникам XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия» (Тула, 2021) за обсуждение доклада, который положен в основу данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // А. Пуанкаре. Избранные труды. М.: Наука. Т. I. 1971. 772 с.; Т. II. 1972. 998 с.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 690 с.
3. Идельсон Н.И. Закон всемирного тяготения и теория движения Луны // Н.И. Идельсон. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука, 1975. С. 205–272.

4. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équation differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. pp. 375–422; 1882. V. 8. pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. pp. 167–244; 1886. V. 2. pp. 151–217 / Рус. пер.: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
5. Субботин М.Ф. Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. Сб. в честь 250-летия со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 268–376.
6. Lagrange J.L. Essai sur le Problème des trois Corps // Oeuvres de Lagrange. T. VI. Paris, 1873. pp. 229–234.
7. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. V. 1. pp. 5–2, 129–147, 245–260.
8. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Comp. Rend. 1883. T. 97. pp. 251–252.
9. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Bull. astronom. 1884. T. 1. pp. 65–74.
10. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique // Acta Math. 1890. V. 13. pp. 1–270.
11. Маршал К. Задача трех тел. Москва-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2004. 640 с.
12. Poincaré H. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action // Comp. Rend. 1896. T. 123. pp. 915–918.
13. Шенсине А. Об одной заметке Пуанкаре // Нелин. динамика. 2005. Т. 1. № 1. С. 143–154.
14. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. V. 4. pp. 27–73.
15. Poincaré H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes // Trans. AMS. 1905. V. 6. pp. 237–274. / Рус пер.: А.Пуанкаре. Избр. труды: Т. 2. -М.: Наука, 1972. С. 735–774.
16. Пуанкаре А. Наука и метод // А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1983. С. 284–403.
17. Poincaré H. Sur un théorème de géometrie // Rendicont. Circolo mat. Palermo. 1912. V. 33. pp. 375–407. / Рус. пер.: Об одной геометрической теореме / Последние работы А. Пуанкаре. Ижевск: РХД, 2001. С. 112–150.
18. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / Рус. пер.: Дж. Биркгоф Динамические системы / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
19. Birkhoff G.D. Proof of Poincare's geometric theorem // Trans. AMS. 1913. V.14. pp. 14–22.
20. Veblen O. George David Berkhoff // Biograph. Memoirs. The National Academy Press, 2001. V. 80. pp. 2–14.
21. Birkhoff G.D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta. Math. 1926. V. 47. pp. 297–311.
22. Brown M., Neumann W.D. Proof of Poincare-Birkhoff fixed point theorem // Michigan Math. J. 1977. V. 24. pp. 21–31.

23. Кириллов А.Н. Последняя геометрическая теорема Пуанкаре: история и драма идей / Семинар по истории математики. 7 сентября 2017 г. СПб., ПОМИ, Фонтанка 27.
24. Hurvitz W.A. The Chicago Colloquium // Bull. AMS. 1920. V. 27. pp. 65–71.
25. Birkhoff G.D. On the periodic motions of dynamical systems // Acta Math. 1927. V. 50. pp. 359–379.
26. Birkhoff G.D. A remark on the dynamical rule of Poincaré's last geometric theorem // Acta litt. ac Scientiarum, sect. Scientiarum math. Szeged, 15 Aug. 1928. V. 4. pp. 6–11.
27. Birkhoff G.D., Smith P. Structure Analysis of Surface Transformations // J. Math. Pures Appl. 1928. V. 9. pp. 345–379.
28. Birkhoff G.D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques // Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei. 1935. P. 3. V.1. pp. 85–216.
29. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физ. наук. 1971. Т.105. В. 1. С. 3–39.
30. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
31. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // ДАН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
32. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 9. С. 989–1015.
33. Arnold V.I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1968. 286 p.
34. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2004. 288 с.
35. Арнольд В.И. Первые шаги симплектической топологии // УМН. 1986. Т. 41. В. 6. С. 3–18.
36. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
37. Арнольд В.И. Недооцененный Пуанкаре // УМН. 2006. Т. 61. В. 1. С. 3–24.
38. Cohnley C.C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold // Invent. Math. 1983. V. 73. pp. 33–49.

REFERENCES

1. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1892. Tome 1. 408 p. 1893. Tome II. 500 p. 1899. Tome III. 429 p.
2. Newton I. Mathematical Principles of Natural Philosophy. N.Y.: Daniel Adee, 1846. 575 p.
3. Idelson N.I. The law of universal gravitation and the theory of the motion of the moon // N.I. Idelson. Studies on the history of celestial mechanics. Moscow: Nauka, 1975. pp. 205–272 (in Russian).

4. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équation differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. pp. 375–422; 1882. V. 8. pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. pp. 167–244; 1886. V. 2. pp. 151–217
5. Subbotin M.F. Astronomical works of Leonard Euler // Leonard Euler. Collection in honor of the 250th birthday anniversary. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1958, pp. 268–376 (in Russian).
6. Lagrange J.L. Essai sur le Problème des trois Corps // Oeuvres de Lagrange. T. VI. Paris, 1873. pp. 229–234.
7. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. V. 1. pp. 5–26, 129–147, 245–260.
8. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Comp. Rend. 1883. T. 97. pp. 251–252.
9. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps // Bull. astronom. 1884. T. 1. pp. 65–74.
10. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique // Acta Math. 1890. V. 13. pp. 1–270.
11. Marshal C. The there-body problem. Amsterdam: Elsevier, 1990. 575 p.
12. Poincaré H. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action // Comp. Rend. 1896. T. 123. pp. 915–918.
13. Chenciner A. A note by Poincaré // Nonlin. dyn. 2005. V. 1. N. 1. pp. 143–154 (in Russian).
14. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. V. 4. pp. 27–73.
15. Poincaré H. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes // Trans. AMS. 1905. V. 6. pp. 237–274.
16. Poincaré A. Science and Method. London : T. Nelson, 1914. 296 p.
17. Poincaré H. Sur un théorème de géometrie // Rendicont. Circolo mat. Palermo. 1912. V. 33. pp. 375–407.
18. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. Providence, Rhod Island: AMS, 1927. IX - 295 p.
19. Birkhoff G.D. Proof of Poincare's geometric theorem // Trans. AMS. 1913. V.14. pp. 14–22.
20. Veblen O. George David Berkhoff // Biograph. Memoirs. The National Academy Press, 2001. V. 80. pp. 2–14.
21. Birkhoff G.D. An extension of Poincare's last geometric theorem // Acta. Math. 1926. V. 47. pp. 297–311.
22. Brown M., Neumann W.D. Proof of Poincare-Birkhoff fixed point theorem // Michigan Math. J. 1977. V. 24. pp. 21–31.
23. Kirillov A.N. Poincaré's last geometric theorem: history and drama of ideas / Seminar on the history of mathematics. September 7, 2017 St. Petersburg, POMI, Fontanka 27 (in Russian).

24. Hurvitz W.A. The Chicago Colloquium // Bull. AMS. 1920. V. 27. pp. 65–71.
25. Birkhoff G.D. On the periodic motions of dynamical systems // Acta Math. 1927. V. 50. pp. 359–379.
26. Birkhoff G.D. A remark on the dynamical rule of Poincare's last geometric theorem // Acta litt. ac Scientiarum, sect Sciantiarum math. Szeged, 15 Aug. 1928. V. 4. pp. 6–11.
27. Birkhoff G.D., Smith P. Structure Analysis of Surface Transformations // J. Math. Pures Appl. 1928. V. 9. pp. 345–379.
28. Birkhoff G.D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques // Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei. 1935. S. 3. V.1. pp. 85–216.
29. Zaslavsky G.M., Chirikov B.V. Stochastic instability of nonlinear oscillations // Soviet Physics. Uspekhi. 1971. V. 105. Issue 1. pp. 3–39.
30. Likhtenberg A., Liberman M. Regular and stochastic dynamics. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 692 p.
31. Arnold V.I. On the stability of equilibrium positions of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1961. T. 137. No. 2. pp. 255–257 (in Russian).
32. Loskutov A.Yu. Dynamic chaos. Systems of classical mechanics // Soviet Physics. Uspekhi. 2007. T. 177. No. 9. P. 989–1015 (in Russian).
33. Arnold V.I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1968. 286 p.
34. Zaslavsky G.M. Physics of chaos in Hamiltonian systems. L.: Imperial College Press, 1998. 315 p.
35. Arnold V.I. First steps of symplectic topology // Russian Math. Survey. 1986. V. 41. Issue 6. pp. 3–18 (in Russian).
36. Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 464 p.
37. Arnold V.I. Underestimated Poincaré // Russian Math. Survey. 2006. V. 61. Issue 1. pp. 3–24 (in Russian).
38. Cohnley C.C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold // Invent. Math. 1983. V. 73. pp. 33–49.

Получено 16.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.