ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-167-182

Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистан, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

e-mail: shabozov@mail.ru

Саидусайнов Муким Саидусайнович — Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

e-mail: smuqim@list.ru, smuqim@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются экстремальные задачи среднеквадратического приближения функций комплексного переменного, регулярных в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{2,\gamma}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где $\gamma := \gamma(|z|) \geq 0$ — вещественная интегрируемая в области $\mathcal{D}$ функция, а интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma := dx dy$ — элемент площади.

Более подробно исследуется сформулированная задача в случае, когда $\mathcal{D}$ — единичный круг в пространстве $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$, $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha (1 - |z|)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ — вес Якоби. В этом случае доказаны точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие величину наилучшего среднеквадратического полиномиального приближения $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ и $\mathcal{H}$ -функционала Петре. В случае $\gamma_{\alpha,\beta} \equiv 1$ получаем ранее известные результаты.

Ключевые слова: суммы Фурье, среднеквадратическое приближение, верхние грани наилучших приближений, $\mathcal{H}$ -функционал Петре

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов. Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 167–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-167-182

Mean-squared approximation of some classes of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$

M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik National University (Dushanbe).

e-mail: shabozov@mail.ru

Saidusainov Mukim Saidusainovich — Tajik National University (Dushanbe).

e-mail: smuqim@list.ru, smuqim@gmail.com

Abstract

The article considers extremal problems of mean-square approximation of functions of a complex variable, regular in the domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, by Fourier series orthogonal in the system of functions $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ in $\mathcal{D}$ belonging to the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$ with finite norm

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

where $\gamma := \gamma(|z|) \geq 0$ is a real integrable function in the domain $\mathcal{D}$, and the integral is understood in the Lebesgue sense, $d\sigma := dx dy$ is an element of area.

The formulated problem is investigated in more detail in the case when $\mathcal{D}$ is the unit disc in the space $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$, $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha (1 - |z|)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ — Jacobi weight. Sharp Jackson-Stechkin-type inequalities that relate the value of the best mean-squared polynomial approximation of $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ and the Peetre $\mathcal{K}$ -functional were proved. In case when $\gamma_{\alpha,\beta} \equiv 1$ we will obtain the earlier known results.

Keywords: Fourier's sum, mean-squared approximation, upper bound best approximation, Peetre $\mathcal{K}$ -functional.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov, 2022, "Mean-squared approximation of some classes of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 167–182.

1. Введение

Условимся в дальнейшем называть весом неотрицательную интегрируемую по Лебегу в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функцию $\gamma := \gamma(|z|) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что

$$\iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) d\sigma > 0,$$

где $d\sigma = dx dy$ – элемент площади. В этой работе будем рассматривать вопросы среднеквадратичного приближения суммами Фурье комплексных функций f , регулярных в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{2,\gamma} := B_{2,\gamma}(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. В случае $\gamma(|z|) \equiv 1$ пространство $B_{2,\gamma}$ превращается в обычное пространство Бергмана (см., например, [1, стр.259]). Отметим, что в случае приближения в среднем функций комплексной переменной, регулярных в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина в весовом пространстве $B_{2,\gamma}$ изучалась в работах [2, 3].

Хорошо известно [1, стр.262-265], что теория среднеквадратичного приближения по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функций f тесно связана с теорией ортогональных по области $\mathcal{D}$ функций. Поэтому для большей связности изложения мы приведем основные понятия, относящиеся к теории ортогональных с весом в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системы функций. Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ назовем ортогональной с весом γ по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ системой комплексных функций, если

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \gamma(|z|) \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq l, k, l \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{D} \frac{1}{2\pi} \iint \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma := \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2, & \text{при } k = l, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если

$$\|\varphi_k\|_{2,\gamma} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} \gamma(|z|) |\varphi_k(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} = 1,$$

то такая система называется ортонормальной. Очевидно, что если система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной, то система $\{\varphi_k(z) \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормальной.

Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z), \quad (1)$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2} \iint_{\mathcal{D}} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma$$

– коэффициенты Фурье функции f . Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z) \quad (2)$$

– частная сумма n -го порядка ряда, стоящая в правой части равенства (1). Составим линейную комбинацию первых n функций системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(z), \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

и множество всех обобщенных полиномов вида (3) обозначим через $\mathcal{P}_{n-1}$.

Величину

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

назовем наилучшим среднеквадратическим приближением функции $f \in B_{2,\gamma}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Среди всех обобщенных полиномов вида (3) наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in B_{2,\gamma}$ доставляет n -я частичная сумма (2). При этом*

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2. \quad (4)$$

Если система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормальна в $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, то из (4) вытекает равенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}\|_{2,\gamma} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство леммы 1 проводится стандартным путем (см., например, [1, с.202]), а потому мы её опускаем. В условиях леммы 1 имеет место

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ справедливо равенство*

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \|\varphi_k\|_{2,\gamma}^2,$$

причём если система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормальна, то

$$\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2.$$

2. Случай, когда область $\mathcal{D}$ есть единичный круг

Рассмотрим более подробно случай, когда область $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ есть единичный круг $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. В этом случае система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной, но не ортонормальной, поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^k \bar{z}^l d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{k+l+1} e^{i(k-l)t} d\rho dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z} \\ \mathcal{D} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho := \lambda_k > 0, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, система функций

$$\varphi_k^*(z) := \left\{ \left(\sqrt{\lambda_k} \right)^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty}$$

будет ортонормальной системой. Через $\mathcal{A}(U)$ обозначим класс аналитических в круге U функций. Пусть теперь f – произвольная функция, принадлежащая классу $\mathcal{A}(U)$. Ряд Маклорена этой функции внутри U имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (5)$$

Найдем коэффициенты Фурье $a_k(f)$ этой функции. Имеем:

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) f(z) \overline{\varphi_k^*(z)} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} c_l(f) z^l \right\} \cdot (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \bar{z}^k d\sigma = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l(f) \cdot \left\{ (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) z^l \bar{z}^k d\sigma \right\} = c_k(f) \cdot (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |z|^{2k} d\sigma = \\ &= c_k(f) (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = c_k(f) (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot \lambda_k = c_k(f) \cdot \sqrt{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f \in \mathcal{A}(U)$ по ортонормальной системе $\varphi_k^*(z) = (\sqrt{\lambda_k})^{-1} z^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) с учетом (6) приобретает вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} c_k(f) (\sqrt{\lambda_k})^{-1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (7)$$

Этот ряд совпадает с рядом Маклорена (5), т.е. ряд Фурье функции $f(z)$ внутри единичного круга U представляет собой аналитическую функцию (5), для которой имеет место уравнение замкнутости

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |f(z)|^2 d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2k+1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |c_k(f)|^2. \quad (8)$$

В частности, если $\gamma(|z|) \equiv 1$, то из (8) вытекает известное равенство (см., например, [1, с.208-209])

$$\|f\|_{2,1}^2 = \|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Равенство (7) означает, что ряд Фурье функции, аналитической в единичном круге U , одновременно является рядом Маклорена этой функции и, согласно второй теореме Вейерштрасса [4], может быть сколько угодно раз продифференцирована, причем все продифференцированные ряды равномерно сходятся к соответствующей производной, и для любого $r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где, ради краткости, положено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1) = k!/(k-r)!, \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ множество функций $f \in B_{2,\gamma}$, у которых $f^{(r)} \in B_{2,\gamma}$, т.е. $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma} < \infty$. Легко заметить, что при любом $k \geq n > r$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(r)}(z) - S_{n-1}^{(r)}(f, z) = f^{(r)}(z) - S_{n-r-1}(f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

в силу чего имеем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} &:= \inf \left\{ \|f^{(r)} - p_{n-1}^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho, \end{aligned} \quad (9)$$

а также имеет место равенство

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^{2(k-r)+1} d\rho. \quad (10)$$

Всюду далее через

$$\mu_s(\gamma) = \int_0^1 \gamma(\rho) \rho^s d\rho, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

обозначим момент порядка s весовой функции $\gamma(\rho)$ на отрезке $[0, 1]$. В силу обозначения (11) равенства (9) и (10) запишем в виде

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\gamma} := \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}, \quad (12)$$

$$\|f^{(r)}\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}. \quad (13)$$

Из равенств (12) и (13) при $\gamma(\rho) \equiv 1$ вытекают соответствующие равенства из работы [5]:

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,1} := E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1},$$

$$\|f^{(r)}\|_{2,1}^2 := \|f^{(r)}\|_2^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}.$$

При изложении дальнейших результатов мы предполагаем, что имеет место следующая

Гипотеза. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r$, $\gamma(\rho)$ – непрерывная весовая функция. Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma)}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma)} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma)}. \quad (14)$$

Доказать равенство (14) в такой общности для всех непрерывных весов нам не удалось. Остановимся на случае веса Якоби

$$\gamma(\rho) := \gamma_{\alpha,\beta}(\rho) = \rho^\alpha (1-\rho)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Очевидно, что $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho)$ непрерывна при $\alpha, \beta \geq 0$. В этом случае, легко доказать, что равенство (14) имеет место. Более того равенство (14) выполняется даже при любых $\alpha \geq 0, \beta > -1$. Имеет место следующая

ЛЕММА 2. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда

$$\max_{k \geq n > r} \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нахождение точной области параметров α , β , r для которых верно (15), это техническая сложная задача. Покажем, что (15) имеет место для $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$, $r \geq 1$. Положим

$$\psi(k, r) = \frac{1}{\alpha_{k,r}} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}.$$

Легко вычислить, что при всех $k \geq n > r \geq 1$,

$$\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(2k+2+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)}, \quad \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)},$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера. Пользуясь формулой [6, с.754]

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)\Gamma(a)$$

функция $\psi(k, r)$ представим в виде

$$\psi(k, r) = \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\Gamma(2k+2+\alpha)}{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)}{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)}.$$

Проверим, что

$$\frac{\psi(k+1, r)}{\psi(k, r)} \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \beta > -1, k \geq r+1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(k+1, r)}{\psi(k, r)} &= \left(\frac{k+1-r}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2k+4+\alpha)}{\Gamma(2k+2+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(2k+3+\alpha+\beta)}{\Gamma(2k+5+\alpha+\beta)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2(k-r)+3+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(2(k-r)+2+\alpha)}{\Gamma(2(k-r)+4+\alpha)} = \\ &= \left(\frac{k+1-r}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{(2k+2+\alpha)(2k+3+\alpha)(2(k-r)+3+\alpha+\beta)(2(k-r)+4+\alpha+\beta)}{(2k+3+\alpha+\beta)(2k+4+\alpha+\beta)(2(k-r)+2+\alpha)(2(k-r)+3+\alpha)} = \\ &= \left(1 - \frac{r}{k+1} \right)^2 \left(1 + \frac{2r}{2k+2+\alpha-2r} \right) \left(1 + \frac{2r}{2k+3+\alpha-2r} \right) \cdot \\ &\quad \left(1 - \frac{2r}{2k+3+\alpha+\beta} \right) \left(1 - \frac{2r}{2k+4+\alpha+\beta} \right) \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{r}{k+1} \right)^2 \left(1 + \frac{r}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right)^2 \left(1 - \frac{r}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)^2 = f^2(k, r). \end{aligned}$$

Проверим условие $f(k, r) - 1 < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} g(k, r) := f(k, r) - 1 &= \left(1 - \frac{r}{k+1} \right) \left(1 + \frac{r}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right) \left(1 - \frac{r}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} \right) - 1 = \\ &= -r \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{1}{k+1+\frac{\alpha}{2}-r} \right) - \end{aligned}$$

$$-r^2 \left(\frac{1}{(k+1)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)} + \frac{1}{\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)} - \frac{1}{(k+1)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \right) +$$

$$+ \frac{r^3}{(k+1)(k+1+\frac{\alpha}{2}-r)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Далее

$$(k+1)\left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \frac{g(k,r)}{r} =$$

$$= - \left(\left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + (k+1)\left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right) - (k+1)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right) -$$

$$-r \left(k+1+k+2+\frac{\alpha+\beta}{2} - \left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right) \right) + r^2 =$$

$$= - \left(k+1+\frac{\alpha}{2}-r\right) \left(2k+3+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + (k+1)\left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - r \left(k+2+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= -(k+1)^2 + (r-\alpha)k + r \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha(3+\alpha+\beta)}{4} \leq$$

$$\leq -(r+2)^2 + (r-\alpha)(r+1) + r \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha(3+\alpha+\beta)}{4} =$$

$$= - \left(2+\frac{\alpha}{2}\right)r - \frac{\alpha(7+\alpha+\beta)}{4} - 4 < 0.$$

Условие $f(k,r) < 1$ выполнено и $\psi(k,r) < \psi(n,r)$ при $k \geq n \geq r+1$. Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Одной интегрируемости веса Якоби на отрезке $[0,1]$, то есть выполнения условий $\alpha, \beta > -1$ для справедливости гипотезы недостаточно.

Покажем, что для любого $r \geq 1$, $k = n = r+1$ существует $\alpha \in (-1,0)$, $\beta > 0$ такие, что

$$\psi(r+2,r) = \psi(n+1,r) > \psi(n,r) = \psi(r+1,r)$$

или что то же

$$\frac{\psi(r+2,r)}{\psi(r+1,r)} = \left(\frac{2}{r+2}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(2r+6+\alpha)}{\Gamma(2r+4+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(4+\alpha)}{\Gamma(6+\alpha)} =$$

$$= \frac{4}{(r+2)^2} \cdot \frac{(\alpha+2r+5)(\alpha+2r+4)}{(\alpha+5)(\alpha+4)} \cdot \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} > 1.$$

Так как

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2r+5+\alpha+\beta)}{\Gamma(2r+7+\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(7+\alpha+\beta)}{\Gamma(5+\alpha+\beta)} = 1,$$

то достаточно показать, что для любого $r \geq 1$ существует $\alpha \in (-1,0)$ такое, что

$$\frac{4}{(r+2)^2} \cdot \frac{(\alpha+2r+5)(\alpha+2r+4)}{(\alpha+5)(\alpha+4)} > 1. \quad (16)$$

Положим $\alpha = -1/2$. Тогда (16) эквивалентно очевидному неравенству

$$4r^2 + 16r + \frac{63}{4} > \frac{63}{16}(r^2 + 4r + 4) \Rightarrow 4(r^2 + 4r) > \frac{63}{16}(r^2 + 4r) \Rightarrow 4 > \frac{63}{16},$$

и таким образом в этом случае равенство (15) не имеет места.

Пользуясь леммой 2 сформулируем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. При всех $k \geq n > r \geq 1$ и $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}$, то для величины наилучшего приближения

$$E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} = \sum_{k=n}^{\infty} \mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) |c_k(f)|^2 \quad (18)$$

этой функции, пользуясь утверждением леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right\} \leq \\ &\leq \max_{k \geq n > r} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2k+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \mu_{2(k-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}) = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})} \cdot E_{n-r+1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как неравенство (19) верно для любой функции $f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}$, то из (19) получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (17)

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}. \quad (20)$$

Для получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Для этой функции из равенств (12) и (18) сразу следует, что

$$E_{n-1}^2(f_0)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} = \mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta}), \quad (21)$$

$$E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}} = \alpha_{n,r}^2 \cdot \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta}). \quad (22)$$

Учитывая равенства (21) и (22), получаем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}}{E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} \geq \frac{E_{n-1}^2(f_0)_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}}{E_{n-r-1}^2(f_0^{(r)})_{2, \gamma_{\alpha, \beta}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha, \beta})}. \quad (23)$$

Сопоставляя оценку сверху (20) с оценкой снизу (23), получаем требуемое равенство (17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. ([5, с.621]) В условиях теоремы 1, при $\alpha = \beta = 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}. \quad (24)$$

В самом деле, равенство (24) вытекает из (21) и (22) при $\alpha = \beta = 0$, т.е., когда $\gamma_{\alpha, \beta}(\rho) \equiv 1$, поскольку

$$\mu_{2n+1}(1) = \frac{1}{n+1}, \quad \mu_{2(n-r)+1}(1) = \frac{1}{n-r+1},$$

а потому

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(1)}{\mu_{2(n-r)+1}(1)}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}.$$

Пусть $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ ($\alpha \geq 0, \beta > -1$) – множество функций $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1$. Требуется найти величину

$$E_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n > r, \alpha \geq 0, \beta > -1$. Тогда

$$E_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \|f^{(r)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq 1$, то для произвольной функции $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ из равенства (17) следует, что

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}} \cdot E_{n-r-1} \left(f^{(r)} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}},$$

откуда переходя к верхней грани по всем функциям $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ запишем

$$E_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (26)$$

С другой стороны, для функции

$$f_1(z) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{z^n}{\sqrt{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}},$$

$$E_{n-1}(f_1)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}, \quad (27)$$

и в силу (12) имеем

$$E_{n-r-1} \left(f_1^{(r)} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = 1.$$

Последнее равенство означает, что $f_1 \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, а потому, учитывая (27), запишем оценку снизу

$$E_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) \geq E_{n-1}(f_1)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (28)$$

Требуемое равенство (25) получаем из сопоставления оценки сверху (26) с оценкой снизу (28). Теорема 2 доказана.

При решении экстремальных задач теории приближения часто требуется найти точные верхние грани модулей коэффициентов Фурье на различных классах 2π -периодических функций (см., например, [7, 8, 9]). Аналогичные задачи рассматриваются также для коэффициентов Тейлора аналитических функций [10, 11]. Несомненно представляет интерес получить решение сформулированной задачи для класса $\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда справедливо равенство

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая ортонормальность системы функций $\varphi_k^*(z) = (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot z^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) в единичном круге U , для произвольной функции $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ запишем

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \left| \iint_{(U)} \gamma_{\alpha,\beta}(|z|) f(z) \bar{z}^n d\sigma \right| = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \left| \iint_{(U)} \gamma(|z|) [f(z) - S_{n-1}(f, z)] \cdot \bar{z}^n d\sigma \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \iint_{(U)} \gamma_{\alpha,\beta}(|z|) |f(z) - S_{n-1}(f, z)| \cdot |\bar{z}^n| d\sigma, \end{aligned} \quad (30)$$

где $S_{n-1}(f, z)$ – частная сумма n -го порядка ряда Маклорена функции $f \in \mathcal{A}(U)$. Применяя неравенства Коши-Буняковского к интегралу в правой части (30), будем иметь

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \|f(z) - S_{n-1}(f, z)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} \cdot \|\bar{z}^n\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \|f(z) - S_{n-1}(f, z)\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}. \quad (31)$$

Учитывая соотношения (26), из (31) получаем

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma}^{(r)} \right\} \leq E_{n-1} \left(\mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (32)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (32), рассмотрим снова функцию $f_1(z) \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, введенную нами в конце теоремы 2 и для которой

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in \mathcal{W}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \right\} \geq |c_n(f_1)| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}}. \quad (33)$$

Требуемое равенство (29) вытекает из сравнения неравенств (32) и (33), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

3. Точные оценки приближения посредством $\mathcal{H}$ -функционала

В этом пункте докажем некоторые точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$ посредством $\mathcal{H}$ -функционала Петре. Определение и основные свойства $\mathcal{H}$ -функционала Петре приведены в монографиях [12, 13]. В статье [14] доказаны прямые и обратные теоремы приближения функций посредством $\mathcal{H}$ -функционала Петре. В нашем случае мы определим $\mathcal{H}$ -функционал, построенный по пространствам $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}$ и $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$ следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m(f; t^m)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &:= \mathcal{H} \left(f; t^m; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}; B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} + t^m \|g^{(m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} : g \in B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(m)} \right\}, \quad 0 < t < 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Представляет несомненный интерес получить точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения (18) и $\mathcal{H}$ -функционала (34).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие что $n \geq r + m$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma\alpha,\beta} \left(\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta) / \mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{H}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma\alpha,\beta) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma\alpha,\beta}} = 1. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (19), для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma\alpha,\beta}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\gamma\alpha,\beta} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma\alpha,\beta}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $S_{n-r-1}(g)$ частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции $g \in B_{2,\gamma\alpha,\beta}^{(m)}$. В силу равенства (9) и неравенства (20) запишем

$$\|g - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma\alpha,\beta} = E_{n-r-1}(g)_{2,\gamma\alpha,\beta} \leq \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left(\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|g^{(m)}\|_{2,\gamma\alpha,\beta}. \quad (37)$$

Теперь из неравенств (36) и (37) следует, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\gamma\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\gamma\alpha,\beta} + \|g - S_{n-r-1}(g)\|_{2,\gamma\alpha,\beta} \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\gamma\alpha,\beta} + \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left(\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \|g^{(m)}\|_{2,\gamma\alpha,\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Так как левая часть неравенства (38) не зависит от функции $g \in B_{2,\gamma\alpha,\beta}^{(m)}$, то, переходя к нижней грани по всем таким функциям в обеих частях (38), с учетом определения $\mathcal{H}$ -функционала (34), получим

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma\alpha,\beta} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{\mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{H}_m \left(f^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta)}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma\alpha,\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma\alpha,\beta}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины стоящей в левой части равенства (37):

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma\alpha,\beta}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma\alpha,\beta} \left(\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta) / \mu_{2n+1}(\gamma\alpha,\beta) \right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{H}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} \left[\mu_{2(n-r)+1}(\gamma\alpha,\beta) / \mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma\alpha,\beta) \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma\alpha,\beta}} \leq 1. \quad (39)$$

С целью получения оценки снизу той же величины, воспользуемся тем, что для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство (см., напр. [15, 16])

$$\mathcal{H}_m(p_n, t^m)_{2,\gamma\alpha,\beta} \leq \min \left\{ \|p_n\|_{2,\gamma\alpha,\beta}, t^m \|p_n^{(m)}\|_{2,\gamma\alpha,\beta} \right\}. \quad (40)$$

Рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n$. Так как для этой функции

$$f_0^{(r+m)}(z) = n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots(n-r-m+1)z^{n-r-m} = \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} z^{n-(r+m)},$$

то в силу неравенства (40) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m \left(f_0^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \|f_0^{(r+m)}\|_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \left[\frac{\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} \right]^{\frac{1}{2}} \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} [\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}} = \alpha_{n,r} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим также, что

$$E_{n-1}(f_0)_2 = [\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Пользуясь соотношениями (41) и (42), имеем:

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} (\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})/\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}))^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{H}_m \left(f^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})/\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \geq \\ &\geq \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} (\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})/\mu_{2n+1}(\gamma_{\alpha,\beta}))^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{H}_m \left(f_0^{(r)}, \alpha_{n-r,m}^{-1} [\mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})/\mu_{2(n-r-m)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})]^{\frac{1}{2}} \right)_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}} \geq \\ &\geq \frac{\alpha_{n,r} \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})}{\alpha_{n,r} \mu_{2(n-r)+1}(\gamma_{\alpha,\beta})} = 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Требуемое равенство (35) получаем из сравнения оценки сверху (39) с оценкой снизу (43). Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. ([17, с. 76]) *Если в условиях теоремы 4 положить $\gamma_{\alpha,\beta}(\rho) \equiv 1$, то для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r + m$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{H}_m \left(f^{(r)}, \mathcal{D} \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1.$$

4. Заключение

В работе рассматривается задача наилучшего среднеквадратического полиномиального приближения функций комплексного переменного регулярных в односвязной области $\mathcal{D}$ суммами Фурье по ортогональной системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}(\mathcal{D})$, где $\gamma_{\alpha,\beta} = |z|^\alpha (1-|z|)^\beta$, $\alpha \geq 0, \beta > -1, z \in \mathcal{D}$. В случае ортонормальной системы $\varphi_k^*(z) := \left\{ (\sqrt{\lambda_k})^{-1} \cdot z^k \right\}_{k=0}^{\infty}$ и $B_{2,\gamma_{\alpha,\beta}} := U = \{z : |z| \leq 1\}$ решен ряд экстремальных задач среднеквадратического полиномиального приближения функций $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$. Найдено точное неравенство между наилучшим среднеквадратическим полиномиальным приближением функций $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma_{\alpha,\beta}}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и соответствующим $\mathcal{H}$ -функционалом Петре.

Авторы благодарят профессора В.И. Иванова, который способствовал улучшению этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л.: Наука, 1964. 440 с.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // ЖВММФ. 2010. Т.50, № 6. С. 999 – 1004.
3. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журн. 2018. Т.20, № 1. С. 86 – 97.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
5. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников // Матем. заметки. 2018. Т.103, вып.4. С. 617 – 631.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. М.: Наука, 1970. 800 с.
7. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, вып.1. С. 11 – 19.
8. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Vol.38, no.2. P. 147 – 159.
9. Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol.206, no.1. P. 97-114.
10. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Математический сборник. 2010. Т.201, № 8. С. 3 – 22.
11. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ // Сибирский математический журнал. 2016. Т.57, № 2(336). С. 469 – 480.
12. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М. Мир, 1980
13. Mhaskar N.H. Weighted polynomial Approximation // J. Approx. Theory. 1986. Vol.46, no. 1. P. 100 – 110.
14. Ditzian Z., Totik V. $\mathcal{H}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory. 1986. Vol.46, no. 1. P. 38 – 41.
15. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014. Т.95, вып.5. С. 666 – 684.
16. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т.25, № 2. С. 351 – 364.

17. Saidusaynov M.S. $\mathcal{H}$ -functionals and exact values of n -widths in the Bergman space // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol.3, №2(5). P. 74 – 81.

REFERENCES

1. Smirnov V. I., Lebedev N. A., 1964, “Functions of a Complex Variable: Constructive Theory”, *Moscow: Nauka*, 440 p.
2. Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K., 2010, “Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in $L_2(D, p(z))$ ”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 50, no. 6, pp. 946 – 950.
3. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S., 2018, “Mean-square approximation of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space”, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, vol. 20, no. 1. pp. 86 – 97.
4. Bitsadze A. V., 1984, “Osnovy Teorii Analiticheskikh Funktsij Kompleksnogo Peremennogo”, *Moscow: Nauka*, 320 p.
5. Fikhtengol'ts G. M. “Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya, t.2”, *Moscow: Nauka*, 800 p.
6. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S., 2019, “Upper Bounds for the Approximation of Certain Classes of Functions of a Complex Variable by Fourier Series in the Space L_2 and n -Widths”, *Mathematical Notes*, vol. 103, no. 4, pp. 656–668.
7. Vakarchuk S. B., 2006, “Jackson-type inequalities and widths of function classes in L_2 ”, *Mathematical Notes*, vol. 80, no. 1, pp. 11–18.
8. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., 2012, “On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of function classes in L_2 ”, *Analysis Mathematica*, vol. 38, no. 2, pp. 147–159.
9. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I. 2015, “Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 206, no. 1., pp. 97 – 114.
10. Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh., 2010 “The widths of classes of analytic functions in a disc”, vol. 201, no. 8, 1091–1110.
11. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A. 2016, “Best approximation methods and widths for some classes of functions in $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ ”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 57, no. 2, pp. 369–376.
12. Bergh J., Lofstrom J., 1976, “Interpolation Spaces”, *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York*, 220 p.
13. Mhaskar N. H., 1986, “Weighted polynomial Approximation”, *J. Approx. Theory*, vol. 46, no. 1, pp. 100 – 110.
14. Ditzian Z., Totik V., 1986, “ $\mathcal{H}$ -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ ”, *J. Approx. Theory*, vol. 46, no. 1, pp. 38 – 41.

15. Vakarchuk S. B., 2014, “Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev-Hermite weight and widths of function classes”, *Mathematical Notes*, vol. 95, no. 5, pp. 599–614.
16. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S., 2019, “Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no 2, pp. 351 – 364.
17. Saidusaynov M.S., 2017, “ $\mathcal{H}$ -functionals and exact values of n -widths in the Bergman space”, *Ural Mathematical Journal*, vol. 3, no. 2(5), pp. 74 – 81.

Получено 16.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.