ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 1.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-153-166

Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Элементы θ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых p-адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1, \ldots, \theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1+\ldots+h_mx_m$ с целыми коэффициентами $h_1, \ldots, h_m$ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)} + \ldots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0.$$

Вместе с тем, представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное множество.

Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого — целые числа, сходящийся во всех полях p-адических чисел, представляет собой целое полиадическое число. Будем называть полиадическое число θ полиадическим числом Лиувилля(или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$,выполнено неравенство

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

Здесь будет доказана бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n.$$

с ограничениями на множество ппостых чисел в совокупности арифметических прогрессий.

Важным аппаратом получения этого результата являются построенные в работе Ю.В. Нестеренко [4] аппроксимации Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций. Использован подход из работы Эрнвалл-Хитонен, Матала-Ахо, Сеппела [5].

Ключевые слова: полиадические числа Лиувилля, бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел .

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. Г. Чирский. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 153–166.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 1.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-153-166

Infinite linear independence with constraints on a subset of prime numbers of values of Eulerian-type series with polyadic Liouville parameter

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

A ring of polyadic integers is a direct product of rings of integer p-adic numbers over all primes p. The elements θ of this ring can thus be considered as infinite-dimensional vectors whose coordinates in the corresponding ring of integer p-adic numbers are denoted by $\theta^{(p)}$. The infinite linear independence of polyadic numbers $\theta_1, \ldots, \theta_m$ means that for any nonzero linear form $h_1x_1 + \ldots + h_mx_m$ with integer coefficients $h_1, \ldots, h_m$ there is an infinite set of primes p such that in the field Q_p the inequality

$$h_1\theta_1^{(p)} + \ldots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0$$

holds. At the same time, problems in which primes are considered only from some proper subsets of the set of primes are of interest. In this case, we will talk about infinite linear independence with restrictions on the specified set. Canonical representation of the element θ of the ring of polyadic integers has the form of a series

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Of course, a series whose members are integers converging in all fields of p-adic numbers is a polyadic integer. We will call a polyadic number θ a polyadic Liouville number (or a Liouville polyadic number) if for any numbers n and P there exists a natural number A such that for all primes p satisfying the inequality $p \leq P$ the inequality

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

This work continues the development of the basic idea embedded in [15]. Here the infinite linear independence with restrictions on the set of prime numbers in the aggregate of arithmetic progressions. of polyadic numbers

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n.$$

will be proved. An important apparatus for obtaining this result are Hermite–Pade approximations of generalized hypergeometric functions constructed in the work of Yu.V. Nesterenko [4]. The approach from the work of Ernvall-Hytonen, Matala-Aho, Seppela [5] was used.

Keywords: polyadic Liouville number, infinite linear independence with restrictions on the subset of prime numbers.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. G. Chirskii, 2022, "Infinite linear independence with constraints on a subset of prime numbers of values of Eulerian-type series with polyadic Liouville parameter" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 153–166.

1. Введение

Работа продолжает исследования, начатые в [1]-[3]. Во введении работы [3] приведена краткая история исследований арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических рядов. Предлагаемая работа касается более широкого класса, чем F-ряды. В ней соединены подходы, использованные в статье автора [2] и в работе [5].

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Элементы θ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых п соответствующем кольце целых p-адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1, \ldots, \theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1 + \ldots + h_mx_m$ с целыми коэффициентами $h_1, \ldots, h_m$ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле Q_p выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)} + \ldots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0.$$

Вместе с тем, представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное множество. Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях p-адических чисел, представляет собой целое полиадическое число. Будем называть полиадическое число θ полиадическим числом Лиувилля(или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

Настоящая работа продолжает развитие заложенной в [2] основной идеи.

Здесь будет доказана бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n.$$

с ограничениями на множество простых чисел в совокупности арифметических прогрессий.

Важным аппаратом получения этого результата являются построенные в работе Ю.В. Нестеренко [4] аппроксимации Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций.

2. Формулировка основного результата

Пусть $\lambda_0 = 0$, пусть μ_0 -произвольное натуральное число. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0, s_1 = \exp(\lambda_1)$$

Пусть μ_1 -произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \le s_1 + \lambda_1 + 1$ выполняется неравенство

$$ord_p \mu_1 \ge 2 s_1 \ln s_1$$

При $k \ge 2$ положим

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1}, s_k = \exp \lambda_k \tag{1}$$

и пусть натуральное число μ_k выбрано так, что для любого простого $p \le s_k + \lambda_k + 1$ выполняется неравенство

$$ord_p \mu_k \ge 2 s_k \ln s_k. \tag{2}$$

Пусть

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \tag{3}$$

Ряд (3) сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$ согласно (1), (2) и его сумма в этом поле представляет собой целое $p-$адическое число. Более того, этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля, так как

$$|\lambda - \lambda_k|_p < p^{-2 s_k \ln s_k} < \lambda_k^{-2 s_k}.$$

для любого простого числа $p \le s_k + \lambda_k + 1$.

Будем рассматривать ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, \tag{4}$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n, \tag{5}$$

где λ определено равенством (3). Ряды (4) и (5) сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$ при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$.

Нам потребуются вспомогательные ряды. При всех k положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_k)_n z^n, \tag{6}$$

$$f_{1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_k + 1)_n z^n. \tag{7}$$

Коэффициенты этих рядов - натуральные числа, поэтому в любом поле $\mathbb{Q}_p$ они сходятся при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$.

Пусть M — натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $mod(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ — функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны r различных элементов $a_1, \ldots, a_r$ этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1$,…,$\mathbf{a}_r$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i + Mk, k \in \mathbb{Z}$. Используя стандартное обозначение P для множества простых чисел, будем обозначать $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1 ,\ldots,\mathbf{a}_r)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1$,…,$\mathbf{a}_r$.

Теорема. *Пусть $M \geq 3$, $r > \frac{\varphi(M)}{2}$. Тогда для любых целых чисел h_0, h_1, не равных нулю одновременно, существует бесконечное множество простых чисел p из множества* $\mathrm{P}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ *таких, что в поле* Q_p *выполняется неравенство*

$$|L(\lambda)|_p = |h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda)|_p > 0. \tag{8}$$

Отличие от теоремы от теоремы из [2] состоит в том, что в этой статье рассматриваются не все простые числа, а только числа из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)$. В свою очередь, отличие от теоремы 3 из [5] состоит в том, что в работе [5] параметр λ не является полиадическим числом Лиувилля, а равен числу 1.

3. Доказательство теоремы

Следуя работе Ю.В. Нестеренко [4], обозначим

$$\alpha_{1,k} = \lambda_k, \alpha_{2,k} = 1$$

и для $N = 2s + r$, где $r = 1$ или $r = 2$ полагаем $\alpha_{N,k} = \alpha_{r,k} + s$, иными словами,

$$\alpha_{2s+1,k} = \lambda_k + s, \alpha_{2s+2,k} = 1 + s. \tag{9}$$

Используя обычное обозначение

$$F(\alpha, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!} z^n \tag{10}$$

положим

$$f_{N,k}(z) = F(\alpha_{N+1,k}, \alpha_{N+2,k} z).$$

Обозначим, далее,

$$u_{0,k}(z) = f_{0,k}(z), u_{1,k}(z) = \alpha_{1,k} f_{1,k}(z) \tag{11}$$

и для любого N положим

$$u_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} \ldots \alpha_{N,k} z^{N-1} f_{N,k}(z).$$

Таким образом,

$$u_{2s+1,k}(z) = (\lambda_k)_{s+1} s! z^{2s} F(s+1, \lambda_k + s + 1, z), \tag{12}$$

$$u_{2s+2,k}(z) = (\lambda_k)_{s+1} (s+1)! z^{2s+1} F(\lambda_k + s + 1, s + 2, z). \tag{13}$$

В упомянутой выше статье Ю.В. Нестеренко [4] установлено, что для любого N существуют многочлены $P_{N,i,k}(z), i = 0, 1$ такие, что выполняется равенство

$$u_{N,k}(z) = P_{N,0,k}(z) u_{0,k}(z) + P_{N,1,k}(z) u_{1,k}(z). \tag{14}$$

При этом

$$P_{0,0,k}(z) = 1, P_{0,1,k}(z) = 0, P_{1,0,k}(z) = 0, P_{1,1,k}(z) = 1. \tag{15}$$

В той же работе установлено, что при всех N справедливо равенство

$$u_{N+2,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z u_{N,k}(z)$$

и вытекающие из него соотношения

$$P_{N+2,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z P_{N,i,k}(z), i = 0, 1. \tag{16}$$

Пусть

$$\Delta_{N,k}(z) = \begin{vmatrix} P_{N,0,k}(z) & P_{N,1,k}(z) \\ P_{N+1,0,k}(z) & P_{N+1,1,k}(z) \end{vmatrix} \tag{17}$$

Из равенств (15) получаем, что $\Delta_{0,k}(1) \equiv 1$, а равенства (16) дают рекуррентное соотношение

$$\Delta_{N+1,k}(z) = \alpha_{N+1,k} z \Delta_{N,k}(z),$$

откуда

$$\Delta_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} z^N.$$

Пусть $K_i, i = 1, 2, \dots$ обозначают натуральные числа. Пусть $C_i, i = 1, 2, \dots$ обозначают положительные постоянные. Символом $[a]$ обозначаем целую часть числа a.

По индукции, используя (9) и (16), доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Существует $K_1 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $k \in \mathbb{N}, k \geq K_1$, при $s = [s_k] + 1$ для многочленов $P_{N,i,k}(z), N = 2s+1$ или $N = 2s+2, i = 0, 1$ выполняются неравенства*

$$|P_{N,i,k}(\lambda_k)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k})$$

и эти неравенства останутся верными при замене числа N числом $N+1$.

Лемма 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq K_2$,где K_2 — эффективная постоянная, $s \in \mathbb{N}$, причем $s = [s_k] + 1$. Тогда для $N = 2s+1$ или $N = 2s+2$ справедливы неравенства*

$$\prod_p |u_{N,k}(\lambda_k)|_p \leq \exp(-2\frac{r}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_2 s_k \sqrt{\ln s_k},) \tag{18}$$

где произведение в левой части этого неравенство взято по всем простым числам p из множества $\mathrm{P}(\boldsymbol{a}_1\ ,\dots,\boldsymbol{a}_r)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\exp(\sqrt{\ln s_k}) \leq p \leq s_k + \lambda_k + 1. \tag{19}$$

Доказательство. Так как для любого простого числа p , согласно (10), величины

$$F(s+1, \lambda_k + s + 1, 1), F(\lambda_k + s + 1, s + 2, 1)$$

представляют собой целые p-адические числа, из равенств (12),(13) следует, что как для $N = 2s+1$, так и для $N = 2s+2$ имеем

$$|u_{N,k}(1)|_p \leq |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p$$

и, следовательно,

$$\prod_p |u_{N,k}(1)|_p \leq \prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p\,, \tag{20}$$

где произведения взяты по любому множеству простых чисел p. В разложение величины $(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!$ на простые множители входят только простые числа p с условием $p \leq s_k + \lambda_k + 1$.

Рассмотрим

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!|_p\,,$$

где произведение взято по всем простым числам p из любого множества $\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, r$. Так как

$$(\lambda_k)_{s_k+1} = \frac{(\lambda_k + s_k)!}{(\lambda_k - 1)!}$$

p-адическая норма этого числа равна

$$p^{-(\frac{\lambda_k+s_k-S_{\lambda_k+s_k}}{p-1}-\frac{\lambda_k-1-S_{\lambda_k-1}}{p-1})}=\exp(-\frac{\ln p}{p-1}(s_k+1+S_{\lambda_k-1}-S_{\lambda_k+s_k})).$$

p-адическая норма числа $(s_k+1)!$ равна

$$p^{-\frac{s_k+1-S_{s_k+1}}{p-1}}=\exp(-\frac{\ln p}{p-1}(s_k+1-S_{s_k+1})).$$

В этих формулах S_N обозначает сумму цифр p-ичного разложения числа N. Очевидны неравенства

$$1\le S_N\le(p-1)(\log_p N)+1.$$

В итоге произведение $(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!$ имеет p-адическую норму, равную

$$\exp(-\frac{\ln p}{p-1}(2(s_k+1)+S_{\lambda_k-1}-S_{\lambda_k+s_k}-S_{s_k+1}))$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$|(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!|_p\le\exp(-\frac{\ln p}{p-1}(2s_k-C_3\ln s_k)). \tag{21}$$

Из (21)следует, что

$$\prod_p|(\lambda_k)_{s_k+1}(s_k+1)!|_p\le\exp(-\sum_p\frac{\ln p}{p-1}(2s_k-C_3\ln s_k)), \tag{22}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r)$, удовлетворяющим неравенствам (19).

Используем равенство

$$\sum_p\frac{\ln p}{p-1}=\sum_p\frac{\ln p}{p}+\sum_p\ln p(\frac{1}{p(p-1)})=\sum_p\frac{\ln p}{p}+C_4,$$

а также известную оценку (см.[6] стр. 129)

$$\sum_{p\le x}(\frac{\ln p}{p})=\frac{1}{\varphi(M)}\ln x+O(1),x\to\infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам $p\le x$, принадлежащим множеству $\mathbf{a}_i$ значений любой из рассматриваемых арифметических прогрессий.

Поэтому, согласно (22),

$$\prod_p|(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p\le\exp(-2\frac{r}{\varphi(M)}s_k\ln s_k+C_5s_k) \tag{23}$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r)$, удовлетворяющим неравенствам (19).

Оценим снизу произведение

$$\prod_p|(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \tag{24}$$

взятое по всем простым числам p , удовлетворяющим неравенству

$$p\le\exp\sqrt{\ln s_k}. \tag{25}$$

Простое число p входит в разложение $(s+1)!$ в степени

$$\frac{s+1-S_p(s+1)}{p-1},$$

где символ $S_p(s+1)$ обозначает сумму цифр $p-$ичного разложения числа $s+1$. Очевидно, что $S_p(s+1) \leq (p-1)(\log_p(s+1)+1)$. В произведение

$$(\lambda_k)_{s+1} = \lambda_k(\lambda_k+1)\dots(\lambda_k+s) = \frac{(\lambda_k+s)!}{(\lambda_k-1)!}$$

это простое число p входит в степени

$$\frac{\lambda_k+s-S_p(\lambda_k+s)}{p-1} - \frac{\lambda_k-1-S_p(\lambda_k-1)}{p-1} \leq \frac{s_k}{p-1} + C_6\log_p s_k.$$

Это означает, что в произведение $(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!$ это простое число p входит в степени, не превышающей

$$\frac{2s_k}{p-1} + C_7\log_p s_k.$$

Поэтому для произведения (24) имеем оценку снизу

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \geq \exp(-\sum_p \ln p(\frac{2s_k}{p-1} + C_7\log_p s_k)), \tag{26}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p, удовлетворяющим неравенству (25). Используя равенство

$$\sum_p \frac{\ln p}{p-1} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + \sum_p \ln p(\frac{1}{p(p-1)}) = \sum_p \frac{\ln p}{p} + C_8,$$

и следующую из (25) оценку

$$C_7\sum_p \ln s_k \leq C_7\sqrt{\ln s_k}\exp\sqrt{\ln s_k},$$

оценим сумму

$$\sum_p \ln p(\frac{2s_k}{p-1} + C_7\log_p s_k) \leq 2s_k\sum_p(\frac{\ln p}{p}) + 2C_8 s_k + C_7\exp(\sqrt{\ln s_k})\ln s_k. \tag{27}$$

Известно, что

$$\sum_{p\leq x}(\frac{\ln p}{p}) = \ln x + O(1), x\to\infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам $p \leq x$. Поэтому при $k \geq K_4$ выполнено неравенство

$$2s_k\sum_p \frac{\ln p}{p} \leq 2s_k\ln(\exp\sqrt{\ln s_k}) + C_9 s_k = 2s_k\sqrt{\ln s_k} + C_9 s_k \tag{28}$$

Поэтому, ввиду неравенств (25)(27),(28), при $k \geq K_5$ имеем

$$\sum_p \ln p(\frac{2s_k}{p-1} + C_7\ln s_k) \leq 2s_k\sqrt{\ln s_k} + C_{10}s_k. \tag{29}$$

Из неравенств (26) и (29) сразу следует, что

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \geq \exp -(2s_k\sqrt{\ln s_k} + C_{10}s_k) \tag{30}$$

где произведение взято по всем простым числам p, удовлетворяющим неравенству (25). Неравенства (23) и (30) дают справедливое при $k \geq K_6$ неравенство

$$\prod_p |(\lambda_k)_{s+1}(s+1)!|_p \leq \exp(-2s_k\frac{r}{\varphi(M)}\ln s_k + C_5 s_k + 2s_k\sqrt{\ln s_k} + C_{10}s_k) \leq$$

$$\leq \exp(-2s_k\frac{r}{\varphi(M)}\ln s_k + C_{11}s_k\sqrt{s_k})),$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1 ,\ldots,\mathbf{a}_r)$, удовлетворяющим неравенствам (19). Но тогда из неравенства (20) следует, что при условиях, что K_2 — наибольшее из чисел $K_1, K_3, \ldots, K_6$ и $k \geq K_2$, а $C_2 = C_{11}$,

$$\prod_p |u_{N,k}(1)|_p \leq \exp(-2s_k\frac{r}{\varphi(M)}\ln s_k + C_3 s_k\sqrt{\ln s_k}).$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1 ,\ldots,\mathbf{a}_r)$, удовлетворяющим неравенствам (19). Неравенство (18) и лемма доказаны.

Вместе с линейной формой

$$L_k = h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1) \tag{31}$$

с целыми коэффициентами $h_0, h_1, \max(|h_0|, |h_1|) = h$ рассмотрим линейную форму вида

$$l_k = \lambda_k L_k = \lambda_k(h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1))$$

и приведем ее к удобному для дальнейшего виду

$$\lambda_k h_0 u_{0,k}(1) + h_1 u_{1,k}(1),$$

используя равенства (11) и равенство $\alpha_{1,k} = \lambda_k$. Таким образом, рассматриваем линейную форму

$$l_k = H_0 u_{0,k}(1) + H_1 u_{1,k}(1), \max(|H_0|, |H_1|) = h\lambda_k = H(k). \tag{32}$$

Из равенств (15) и (17) следует, что $\Delta_{N,k}(1) \neq 0$. Поскольку форма l_k ненулевая, хотя бы один из определителей

$$\delta_{N+1,k} = \begin{vmatrix} H_0 & H_1 \\ P_{N+1,0,k}(1) & P_{N+1,1,k}(1) \end{vmatrix}$$

$$\delta_{N,k} = \begin{vmatrix} H_0 & H_1 \\ P_{N,0,k}(1) & P_{N,1,k}(1), \end{vmatrix} \tag{33}$$

отличен от 0. Без ограничения общности считаем, что определитель (33), $\delta_{N,k} \neq 0$. Ввиду следствия леммы 1, этот выбор N не повлияет на оценку

$$|\delta_{N,k}| \leq 2H(k)\exp(s_k \ln s_k + C_1 s_k\sqrt{\ln s_k}).$$

Так как $H(k) = h\lambda_k$, ввиду равенств (1) и (2) при $k \geq K_7 = K_7(h)$ получаем оценку

$$|\delta_{N,k}| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_{12}s_k\sqrt{\ln s_k}) \tag{34}$$

Заметим, что все выбираемые далее постоянные K_i будут, тем самым, зависеть от h . Это не будет специально отмечаться. Далее проделаем с определителем $\delta_{N,k}$ такие преобразования: умножим его первый столбец на величину $u_{0,k}(1)$ и прибавим к первому столбцу полученного определителя его второй столбец, умноженный на $u_{1,k}(1)$. С учетом равенств (32) и (14) получаем

$$\delta_{N,k}u_{0,k}(1) = \begin{vmatrix} l_k & H_1 \\ u_{N,k}(1) & P_{N,1,k}(1), \end{vmatrix} \tag{35}$$

Иными словами,

$$\delta_{N,k}u_{0,k}(1) = l_kP_{N,1,k}(1) - u_{N,k}(1)H_1 \tag{36}$$

По аналогии с (35) и (36) получаем равенство

$$\delta_{N,k}u_{1,k}(1) = -l_kP_{N,0,k}(1) + u_{N,k}(1)H_0 \tag{37}$$

Из равенств (6),(7) и (11) следует, что при всех k

$$u_{0,k}(z) = 1 + zu_{1,k}(z),$$

следовательно, $u_{0,k}(1) - u_{1,k}(1) = 1$, откуда, с учетом (36), (37) получаем

$$\delta_{N,k} = l_k(P_{N,1,k}(1) + P_{N,0,k}(1)) - u_{N,k}(1)(H_0 + H_1). \tag{38}$$

Лемма 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq K_8$. Тогда существует простое число p_k из множества* $\mathrm{P}(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r)$*, удовлетворяющее неравенствам* (19)*, для которого справедливы оценки*

$$|l_k|_{p_k} \geq \exp(-s_k\ln s_k - C_{12}s_k\sqrt{\ln s_k}) \tag{39}$$

$$|L_k|_{p_k} \geq \exp(-s_k\ln s_k - C_{13}s_k\sqrt{\ln s_k}) \tag{40}$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. что для всех простых чисел p из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r)$, удовлетворяющих неравенствам (19), имеем неравенство

$$|l_k|_p < \exp(-s_k\ln s_k - C_{12}s_k\sqrt{\ln s_k})$$

Из отличия от нуля определителя (33), того факта, что коэффициент при форме l_k — целое число и известного для отличных от нуля целых чисел A неравенства

$$|A|_p \geq \frac{1}{|A|}$$

следует, что для всех рассматриваемых простых чисел p выполнено неравенство

$$|l_k|_p < |\delta_{N,k}|_p\,.$$

Тогда равенство (38) означает, согласно известным свойствам p-адического нормирования, что для всех рассматриваемых простых чисел p выполнено равенство

$$|\delta_{N,k}|_p = |u_{N,k}(1)(H_0 + H_1)|_p\,.$$

Так как число $H_0 + H_1$ — целое,получаем справедливые для всех рассматриваемых простых чисел p неравенства

$$|\delta_{N,k}|_p \leq |u_{N,k}(1)|_p\,.$$

Поэтому, так как $\delta_{N,k}$ — целое число, произведение по всем рассматриваемым простым числам p величин $|\delta_{N,k}|_p$ не меньше, чем произведение этих величин по всем простым числам p, а так как этот определитель - отличное от нуля целое число, и, значит,можно использовать равенство $|A|_p = \frac{1}{|A|}$, получаем, согласно (34),

$$\prod_p |\delta_{N,k}|_p \geq \exp -(s_k \ln s_k + C_{12}\sqrt{\ln s_k}).$$

С другой стороны, по лемме 2 имеет место неравенство

$$\prod_p |u_{N,k}(1)|_p \leq \exp(-2s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Полученные оценки противоречат друг другу при $k \geq K_8$, что опровергает сделанное предположение и доказывает справедливость неравенства (39) при некотором p_k из множества $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r)$, удовлетворяющем неравенствам (19). Поскольку l_k, определенная равенством (32), отличается от L_k, определенной равенством (31), лишь множителем $\lambda_k = \ln s_k$, из неравенства (39) следует неравенство (40) и лемма 3 доказана.

В лемме 3 доказано, что для любого $k \geq K_8$ существует простое число p_k, удовлетворяющее неравенствам

$$\exp\sqrt{\ln s_k} \leq p_k \leq s_k + \ln s_k + 1$$

такое, что выполнено неравенство (40), т.е.

$$|L_k|_{p_k} = |h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1)|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Рассмотрим линейную форму

$$L = h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое p_k-адическое число, поэтому разность форм

$$L - L_k = h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1) - (h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1))$$

тоже представляет собой целое p_k-адическое число. Согласно равенствам (4), (5), (7), (8)

$$f_0(1) - f_{0,k}(1) = \sum_{n=0}^{\infty}((\lambda)_n - (\lambda_k)_n)$$

$$f_1(1) - f_{1,k}(1) = \sum_{n=0}^{\infty}((\lambda+1)_n - (\lambda_k+1)_n).$$

При $n = 0$ обе разности $(\lambda)_n - (\lambda_k)_n, (\lambda+1)_n - (\lambda_k+1)_n$ равны 0. Обозначим $\Lambda_k = \lambda - \lambda_k$. При $n \geq 1$ обе эти разности являются целыми p_k-адическими числами, членами сходящегося в Q_{p_k} ряда. Каждое из этих чисел можно представить в виде произведения Λ_k на целое p_k-адическое число, член сходящегося в Q_{p_k} ряда. Из равенств (1),(3) и неравенства (2) вытекает,что

$$|\Lambda_k|_{p_k} = |\mu_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Это означает, что

$$|f_0(1) - f_{0,k}(1)|_{p_k} \leq |\Lambda_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}$$

и

$$|f_1(1) - f_{1,k}(1)|_{p_k} \leq |\Lambda_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Следовательно,

$$|L - L_k|_{p_k} = |h_0(f_0(1) - f_{0,k}(1)) + h_1(f_1(1) - f_{1,k}(1))|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k} \tag{41}$$

Неравенства (40),(41) означают, что при $k \geq K_9$ получаем:

$$|L - L_k|_{p_k} < |L_k|_{p_k}.$$

Поэтому

$$|L|_{p_k} = |L_k|_{p_k},$$

то есть

$$|h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)|_{p_k} = |h_0 f_{0,k}(1) + h_1 f_{1,k}(1)|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что при $k \geq K_{10}$ справедливо неравенство $p_k < p_{k+1}$. Для этого, ввиду (19), достаточно доказать, что при $k \geq K_{14}$ выполняется неравенство

$$s_k + \ln s_k + 1 < \exp \sqrt{\ln s_{k+1}}.$$

Согласно (1) и (2) $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \mu_k > \mu_k$ и

$$\mu_k \geq \prod_{p \leq s_k + \ln s_k + 1} \exp \ln p(2 s_k \ln s_k) = \exp \sum_{p \leq s_k + \ln s_k + 1} \ln p(2 s_k \ln s_k) \geq \exp s_k^2.$$

(Здесь была использована грубая оценка

$$\sum_{p \leq s_k + \ln s_k + 1} \ln p \geq \frac{s_k}{2 \ln s_k}.)$$

Таким образом,

$$s_{k+1} = \exp \lambda_{k+1} \geq \exp \mu_k,$$

$$\ln s_{k+1} \geq \mu_k \geq \exp s_k^2, \sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp \frac{1}{2} s_k^2,$$

следовательно,

$$\exp \sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp(\exp \frac{1}{2} s_k^2) > s_k + \ln s_k + 1,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, доказано, что для любой линейной формы $L = h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)$. существует бесконечное множество чисел k и простых чисел p_k , для которых $|L|_{p_k} \neq 0$, что и утверждалось в теореме.

4. Заключение

Дальнейшим развитием этой работы будут результаты о бесконечной линейной независимости с ограничениями на множество простых чисел значений гипергеометрических рядов более общего вида. Кроме того, планируется модифицировать обобщённый метод Зигеля-Шидловского и использовать его для более широкого класса, чем $F-$ряды, теория которых(а также теория полиадических чисел Лиувилля) изложена в работах [7]-[15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.т.494, с. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)

2. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter.//Russ.J.Math.Phys.2021.- v.28, no.3, pp.294-302.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром.//Чебышевский сборник,том 22, выпуск 3,с. 156 – 167

4. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций.//Матем.сб.-1994.-т.185.-no.3.-с.39-72.(Англий перевод Nesterenko Yu. V.. Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions.//Russ.Acad.Sci.Sb.Math. -1995.-83.-189-219)

5. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T.,Seppela L. Euler's divergent series in arithmetic progressions//J.Integer Sequences,v.22.-2019.-Article 19.2.2,10pp.

6. Прахар К. Распределение простых чисел. М.-"Мир".-1967.-512с.

7. Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.. Effective estimates for global relations on Euler-type series.//Ann. Fac. Sci. Toulouse, v.13,no.2,2004,pp.241-260.

8. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод: Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. // Доклады Академии наук, сер. матем.т.459, no. 6, 677-678.(Английский перевод Chirskii V. G., Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. Dokl. Math. 90(3), pp. 766–768(2014))

10. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F-рядов.// Доклады Академии наук, сер. матем.т.483, no. 3, 257-258.(Английский перевод V.G. Chirskii, Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series. Dokl. Math. 98:3, 589–591 (2018).)

11. Matala-aho T., Zudilin W., Euler factorial series and global relations, J. Number Theory 186 (2018), 202-210.

12. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.

13. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.

14. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля.//Чебышевский сборник,том 22, выпуск 3,с. 245 – 255

15. Чирский В. Г. О полиадических числах Лиувилля.//Чебышевский сборник,том 22, выпуск 5,с. 243 – 251

REFERENCES

1. Chirskii V. G., 2020"Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter", *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp.412-413.

2. Chirskii V. G. 2021, "Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter", *Russ.J.Math.Phys.*, Vol.28, no.3, pp.294-302.

3. Chirskii V. G. 2021," Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouvilleanan Point of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.156-167.

4. Nesterenko Yu. V. 1995. "Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions", *Russ.Acad.Sci.Sb.Math.*,Vol83. pp.189-219.

5. Ernvall-Hytonen A-M., Matala-aho T.,Seppela L.,2019. " Euler's divergent series in arithmetic progressions", *J.Integer Sequences,v.22.-2019.-Article 19.2.2,10pp*

6. Prachar K. 1957 "Primzahlverteilung", *Springer-Verlag.-Berlin.-Gottingen.-Heidelberg* , 512 pp..

7. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004. " Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol.13,no.2, pp.241-260.

8. Shidlovskii, A. B.1989." Transcendental Numbers", *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*.467pp. Matveev V. Yu. 2018 " Algebraic independence of certain almost polyadic series", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, no.3, pp.156-167.

9. Chirskii V. G. 2014. " Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Dokl. Math.* Vol. 90, no.3, pp. 766–768.

10. Chirskii V. G. 2018. " Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series", *Dokl. Math.* Vol. 98, no.3, pp.589–591.

11. Matala-aho T. , Zudilin W. V.2018. "Euler factorial series and global relations", *J. Number Theory* Vol. 186, pp. 202-210.

12. Chirskii V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers", *Russ. J. Math. Phys.* , Vol.26, no.3, pp.286-305.

13. Chirskii V. G.2020. " Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175-184.

14. Chirskii V. G.2020. "Polyadic Liouville numbers$F-$ series", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245-255.

15. Chirskii V. G.2020. "On Polyadic Liouville numbers" , *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.5, pp.243-251.

Получено 7.12.2021 г.
Принято в печать 27.02.2022 г.