ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК511.3

О ВРЕМЕНАХ ПЕРВОГО ВОЗВРАЩЕНИЯ ДЛЯ СДВИГОВ ТОРА

Д. В. Кузнецова, А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе построены примеры областей, для которых время первого возвращения сдвига двумерного тора принимает не более трех значений. Получены приложения к задаче о множествах ограниченного остатка.

Ключевые слова: множества ограниченного остатка, время первого возвращения.

ON THE FIRST RETURN TIMES FOR TORIC ROTATIONS

D. V. Kuznetsova, A. V. Shutov (c. Vladimir)

Abstract

Some examples of domains such that first return time function for two-dimensional torus shift has at most three values are constructed. Some applications to bounded remainder sets problem are obtained.

Key words: bounded remainder sets, first return time.

Данная статья представляет собой изложение доклада, прочитанного авторами на XI Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения."

Рассмотрим сдвиг $R_\alpha : x \to x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^m$ $m-$мерного тора $\mathbb{T}^m$ на вектор α, причем $c_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_m\alpha_m = 0, \quad c_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sum c_i^2 = 0$. Тогда для любого x из области D, такой что $D \subset \mathbb{T}^m$, определено время первого возвращения

$$n_D(x) = \min\{n > 0 : R_\alpha^n(x) \in D\}.$$

Определим множество ограниченного остатка следующим образом

$$\left|\sharp\{i : \{i\alpha\} \in I, 0 \leqslant i < N\} - N|I|\right| = O(1).$$

Рассмотрим одномерный случай, то есть $m = 1$. Тогда область D будет являться интервалом. Существует следующая теорема

Теорема 1. **Three gaps theorem.**

a) *Для любой области D время первого возвращения $n_D(x)$ принимает либо два, либо три значения;*

b) *если время первого возвращения $n_D(x)$ принимает три значения, то одно из них есть сумма двух других.*

Доказательство теоремы можно посмотреть в работе [1].

Наибольший интерес представляют отрезки, для которых время первого возвращения принимает два значения. Рассмотрим соответствующий пример. Разобьем интервал $[0,1)$ на два: $I_1=[0,1-\alpha)$ и $I_2=[1-\alpha,1)$, тогда $n_{I_1}(x)$ и $n_{I_2}(x)$ будут принимать по два значения, отличающихся на единицу. Тогда под действием сдвига R_α они переложатся (рис. 1). Заметим, что n_{I_1} будет принимать значения либо 1, либо 2, а n_{I_2} – $[\frac{1}{\alpha}]$ или $[\frac{1}{\alpha}]+1$ соответственно.

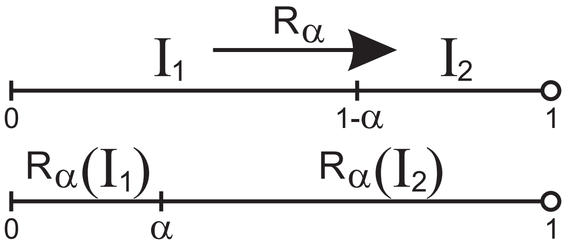

Рис. 2: Разбиение отрезка $[0,1)$ на два отрезка с двумя значениями времени первого возвращения.

Теперь рассмотрим бо́льший интервал I_1. Его можно разбить на два интервала: J_1 и J_2 (рис. 2).

$$J_1=\{x\in I_1, n_I(x)=k_1\};$$
$$J_2=\{x\in I_1, n_I(x)=k_2\}.$$

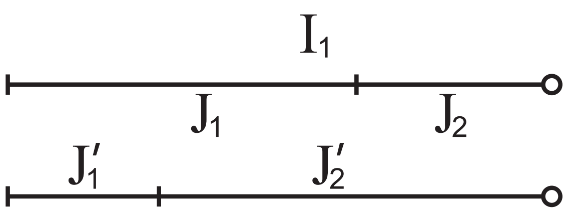

Рис. 3: Итерирование разбиения.

Можно доказать, что функции $n_{J_1}(x)$ и $n_{J_2}(x)$ также принимают по два значения. Легко видеть, что вышеописанную конструкцию можно итерировать [2]. Справедливы следующие теоремы

Теорема 2. *Если $n_I(x)$ принимает два значения, то I получается описанной конструкцией с точностью до сдвига.*

Теорема 3. *Если $n_I(x)$ принимает два значения, то I является множеством ограниченного остатка.*

Теперь перейдем к рассмотрению двумерного случая. Известен лишь один пример, когда $n_I(x)$ при сдвиге на вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ снова принимает два значения.

Такую ситуацию можно получить, если взять интервал I, что $n_I(x)$ принимает два значения для сдвига на вектор α_1. Далее дополним этот интервал до прямоугольника и получим искомый результат (рис. 3). Легко проверить, что время первого возвращения действительно будет принимать два значения, так как двумерный сдвиг попадает в заданную область тогда и только тогда, когда сдвиг на α_1 попадает в интервал I, а там два значения. Также понятно, что α_1 и α_2 можно менять местами.

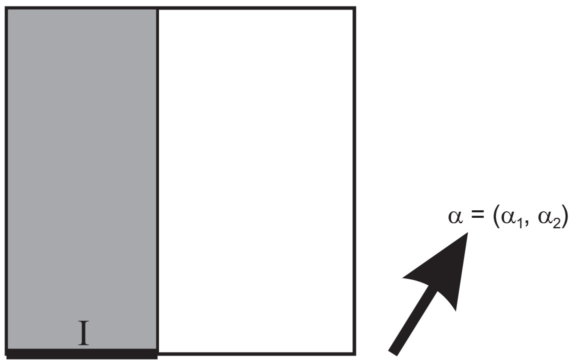

Рис. 4: Разбиение области на две с двумя значениями времени первого возвращения.

Тогда возникает вопрос, а когда $n_I(x)$ принимает три значения? Это просходит в случае, если разбить квадрат, являющийся разверткой тора, на три области следующим образом (рис. 4).

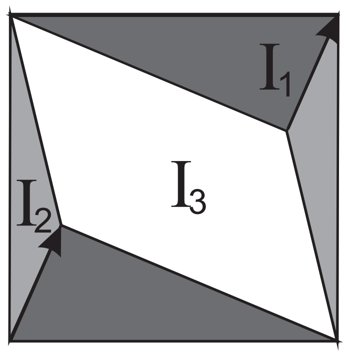

Рис. 5: Разбиение двумерного тора на три области.

Тогда справедливы следующие теоремы

Теорема 4. *Для областей I_1, I_2, I_3, время первого возвращения $n_{I_i}(x)$ принимает ровно три значения, причем они имеют вид $k, k+1, k+2$.*

Теорема 5. *Области I_1, I_2, I_3 являются множествами ограниченного остатка.*

Теперь возникает предположение, что и эту конструкцию можно проитерировать, разбив, например, область I_1 на области соответствующие своему времени первого возвращения. Тогда получим

$$J_{11} = \{x \in I_1, n_{I_1}(x) = n_1\};$$

$$J_{12} = \{x \in I_1, n_{I_1}(x) = n_2\};$$

$$J_{13} = \{x \in I_1, n_{I_1}(x) = n_3\}.$$

Тогда возникает вопрос, а являются ли они множествами ограниченного остатка? В связи с этим доказаны следующие теоремы.

Теорема 6. *Для J_{1i} время первого возвращения $n_{J_{1i}}$ принимает больше трех значений.*

Теорема 7. *Множества J_{11}, J_{12}, J_{13} не являются множествами ограниченного остатка.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 11-01-00578а).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi$mod1 // Coll. Math. Wroclaw. 1951. Vol. 2. P. 323-324.

2. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит, Аналитическая теория чисел и теория функций // Зап. науч. семинара ПОМИ. 2004. С. 272–284.

REFERENCES

1. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi$mod1 // Coll. Math. Wroclaw. 1951. Vol. 2. P. 323-324.

2. Shutov A. V. Derivatives of Circle Rotations and the Similarity of Orbits // Journal of Mathematical Sciences. 3-2006. Vol. 133. P. 1765–1771.

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых.
Поступило 14.09.2013