

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-142-152

Интегральные многообразия первого фундаментального распределения $lcAC_S$ -структуры

А. Р. Рустанов, Е. А. Полькина, Г. В. Теплякова

Рустанов Алигаджи Рустанов — кандидат физико-математических наук, Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (г. Москва).

e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Полькина Елена Александровна — кандидат физико-математических наук, Институт физики, технологии и информационных систем; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: polkina.ea@mail.ru

Теплякова Галина Васильевна — кандидат педагогических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: galinka-78@list.ru

Аннотация

В статье рассмотрены аспекты эрмитовой геометрии $lcAC_S$ -структур. Исследовано влияние обращения в нуль тензора Нейенхейса и связанных с ним тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ на класс почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -структур. Доказано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения: $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса $W_2 \oplus W_4$, причем она будет почти келеровой тогда и только тогда, когда $grad \sigma \subset L(\xi)$; интегрируемого $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса W_4 ; нормального $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой; $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(2)}(X, Y) = 0$, или $N^{(3)}(X) = 0$, или $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

Ключевые слова: почти контактные структуры, почти эрмитовы структуры, интегрируемость структур, тензор Нейенхейса, нормальные структуры.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

А. Р. Рустанов, Е. А. Полькина, Г. В. Теплякова. Интегральные многообразия первого фундаментального распределения $lcAC_S$ -структур // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 142–152.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-142-152

Integral manifolds of the first fundamental distribution $lcAC_S$ -structure

A. R. Rustanov, E. A. Polkina, G. V. Teplyakova

Rustanov Aligaji Rustanov — candidate of physical and mathematical sciences, Institut of Digital Technolitics and Modeling in Construction, National Research Moscow State University of Civil Engineering (Moscow).

e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Polkina Elena Aleksandrovna — candidate of physical and mathematical sciences; Institute of Physics, Technology and Informational Systems; Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: polkina.ea@mail.ru

Teplyakova Galina Vasilyevna — candidate of pedagogical sciences, Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: galinka-78@list.ru

Abstract

In paper we consider aspects of the Hermitian geometry of $lcAC_S$ structures. The effect of the vanishing of the Neyenhuis tensor and the associated tensors $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ on the class of almost Hermitian structure induced on the first fundamental distribution of $lcAC_S$ structures is investigated. It is proved that the almost Hermitian structure induced on integral manifolds of the first fundamental distribution: $lcAC_S$ -manifolds is a structure of the class $W_2 \oplus W_4$, and it will be almost Kähler if and only if $grad \sigma \subset L(\xi)$; an integrable $lcAC_S$ -manifold is a structure of the class W_4 ; a normal $lcAC_S$ -manifold is a Kähler structure; a $lcAC_S$ -manifold for which $N^{(2)}(X, Y) = 0$, or $N^{(3)}(X) = 0$, or $N^{(4)}(X) = 0$, is an almost Kähler structure in the Gray-Hervell classification of almost Hermitian structures.

Keywords: almost contact structures, almost Hermitian structures, integrability of structures, Neyenhuis tensor, normal structures.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

A. R. Rustanov, E. A. Polkina, G. V. Teplyakova, 2022, “Integral manifolds of the first fundamental distribution $lcAC_S$ - structures”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 142–152.

1. Введение

Контактная и эрмитова геометрия довольно тесно взаимосвязаны. Ряд работ посвящен изучению почти контактных структур, индуцируемых на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. В данной работе мы изучаем почти эрмитовы структуры, индуцируемые на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Одним из наиболее интересных тензоров почти контактных метрических многообразий, с геометрической точки зрения, является тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма. Как

известно, обращение в нуль тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма почти контактной метрической структуры равносильно интегрируемости структуры. С тензором Нейенхейса естественным образом связаны еще четыре тензора. Исследуем обращение этих тензоров в нуль, а именно, каким образом обращение каждого из этих тензоров влияет на почти эрмитову структуру, индуцируемую на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = 2n + 1$; $\mathcal{X}(M) = C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на многообразии M ; $\otimes$ — тензорное произведение, $\wedge$ — внешнее умножение, d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . В данной работе будем полагать, что индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения от 0 до $2n$, а индексы $a, b, c, \dots$ — значения от 1 до n , и будем считать, что $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1, 3]. *Почти контактной метрической (короче, АС-) структурой на нечетномерном ориентируемом многообразии M называется четверка (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова структура на M . При этом*

$$\begin{aligned} &1) \eta(\xi) = 1; \quad 2) \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \Phi(\xi) = 0; \quad 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \\ &5) \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется, **почти контактным метрическим** (короче, АС-) многообразием.

Задание почти контактной метрической структуры на многообразии внутренним образом порождает присоединенную G -структуру, тотальное пространство расслоения которой состоит из, так называемых, A -реперов. Матрицы компонент тензоров Φ и g в A -репере имеют вид соответственно

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n — единичная матрица порядка n . Структурной группой такой G -структуры является группа $\{1\} \times U(n)$ [2]–[4].

В модуле $\mathcal{X}(M)$ АС-структуры (η, ξ, Φ, g) многообразия M^{2n+1} внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = id - m = -\Phi^2$ на подмодули M и L соответственно [2]–[4]. Таким образом, $\mathcal{X}(M) = L \oplus M$, где $L = Iml = Im(\Phi) = \ker \eta$ — так называемое первое фундаментальное распределение, $M = Imm = L(\xi)$ — второе фундаментальное распределение (линейная оболочка структурного вектора). Распределения M и L инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Более того, если ввести в рассмотрение $\mathcal{X}(M)^C = C \oplus \mathcal{X}(M)$ — комплексификацию модуля $\mathcal{X}(M)$, то $\mathcal{X}(M)^C = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0$, где $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$, $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$, D_Φ^0 — собственные распределения структурного эндоморфизма Φ , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно. Причем, проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$, $\bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$, $m = \eta \otimes \xi$ [3], [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. *Конформным преобразованием АС-структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от S к АС-структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, где $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$, $\tilde{\xi} = e^\sigma\xi$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma}g$, где σ — произвольная гладкая функция на M , называемая определяющей функцией преобразования.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [6]. Почти контактная метрическая структура (ξ, η, Φ, g) на многообразии M называется локально конформно почти косимплектической (короче, $lcAC_S$ -структурой), если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру.

Многообразие, снабженное локально конформно почти косимплектической структурой, называется **локально конформно почти косимплектическим** (короче, $lcAC_S$) многообразием.

Первая группа структурных уравнений $lcAC_S$ -многообразий на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega &= -\sigma_a \omega \wedge \omega^a - \sigma^a \omega \wedge \omega_a; \\ 2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ 3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b; \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$1) \quad B^{[abc]} = B_{[abc]} = 0; \quad 2) \quad B^{[ab]} = B_{[ab]} = 0.$$

2. Интегральные многообразия первого фундаментального распределения

Рассмотрим дифференциальную 1-форму $\omega = \eta \circ \pi_*$, где π — естественная проекция в главном расслоении реперов над многообразием M , π_* — порожденное ей увлечение Φ -связанных векторных полей на многообразии M . Очевидно, эта форма является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, то есть базисом кораспределения ассоциированного с первым фундаментальным распределением L [7].

По классической теореме Фробениуса вполне интегрируемость первого фундаментального распределения равносильна условию существования такой формы θ , что $d\omega = \theta \wedge \omega$, т.е. внешний дифференциал формы ω должен принадлежать идеалу алгебры Грассмана многообразия M [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. Распределение на многообразии M называется инволютивным, если через каждую точку многообразия проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Первое фундаментальное распределение $lcAC_S$ -многообразия является вполне интегрируемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2:1) следует, что первое фундаментальное распределение L $lcAC_S$ -многообразия инволютивно, а значит, в силу теоремы Фробениуса [4] вполне интегрируемо.

Пусть $N \subset M$ — интегральное многообразие максимальной размерности первого фундаментального распределения $lcAC_S$ -многообразия M . Тогда на нем канонически индуцируется почти эрмитова структура $\langle J, \tilde{g} \rangle$, где $J = \Phi|_L$, $\tilde{g} = g|_L$. Поскольку форма ω является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры на N имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ 2) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно классификации Грея — Хервеллы почти эрмитовых структур ([4], стр. 450) это уравнения почти эрмитовой структуры класса $W_2 \oplus W_4$.

Заметим, что если в этих уравнениях положить $\sigma_a = \sigma^a = 0$, то они примут вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

Это уравнения почти келеровой структуры. Выясним, когда выполняется условие $\sigma_a = \sigma^a = 0$. Очевидно, последнее можно записать в виде $d\sigma \parallel \eta$. Это условие равносильно тому, что $\text{grad } \sigma \subset L(\xi)$, что в свою очередь, равносильно нормальности $lcAC_S$ -структуры. Таким образом, можем сформулировать вывод.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M — $lcAC_S$ -многообразие, тогда на интегральных многообразиях максимальной размерности его контактного распределения индуцируется структура класса $W_2 \oplus W_4$ почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы. Она будет почти келеровой тогда и только тогда, когда $\text{grad } \sigma \subset L(\xi)$.

Напомним, что компоненты ковариантного дифференциала структурного оператора Φ в римановой связности ∇ для $lcAC_S$ -многообразий на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} 1) \Phi_{0,b}^a &= -\Phi_{\hat{a},b}^0 = -\sqrt{-1}\delta_b^a \sigma_0; & 2) \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,\hat{b}}^0 = \sqrt{-1}\delta_a^{\hat{b}} \sigma_0; \\ 3) \Phi_{0,0}^a &= -\Phi_{\hat{a},0}^0 = \sqrt{-1}\sigma^a; & 4) \Phi_{0,0}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1}\sigma_a; \\ 5) \Phi_{b,c}^a &= 4\sqrt{-1}\sigma^{[a}\delta_c^{b]}; & 6) \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} &= -4\sqrt{-1}\sigma_{[a}\delta_{\hat{b}}^{\hat{c}}]; \\ 7) \Phi_{b,\hat{c}}^a &= 4\sqrt{-1}B^{cab} & 8) \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} &= -4\sqrt{-1}B_{cab}; \\ 9) \Phi_{a,b}^0 &= -\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}B_{ab}; & 10) \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 &= -\Phi_{0,\hat{b}}^a = \sqrt{-1}B^{ab}; \\ 11) \Phi_{\hat{b},0}^a &= \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тензором Нейенхейса [1, 8, 9] эндоморфизма Φ называется тензор N типа $(2,1)$, определяемый формой

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

В терминах ковариантного дифференцирования тензор Нейенхейса AC -структуры можно определить так

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \Phi\nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi\nabla_Y(\Phi)X\}.$$

На пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензора N определяются тождествами

$$\begin{aligned} 1) N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[a,b]}^0; & 2) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= -N_{b\hat{a}}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{(\hat{a},b)}^0; \\ 3) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0; & 4) N_{\hat{b}0}^a &= -N_{0\hat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{\hat{b},0}^a - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,\hat{b}}^a; \\ 5) N_{b\hat{c}}^a &= \sqrt{-1}\Phi_{[b,\hat{c}]}^a; & 6) N_{bc}^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}; \\ 7) N_{b0}^{\hat{a}} &= -N_{0b}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю [3, 4].

Тогда согласно (4) и (5) ненулевые компоненты тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма $lcAC_S$ -структуры задаются равенствами:

$$\begin{aligned} 1) N_{b0}^a &= -N_{0b}^a = -\frac{1}{2}B^{ab}; & 2) N_{b0}^{\hat{a}} &= -N_{0b}^{\hat{a}} = -\frac{1}{2}B_{ab}; \\ 3) N_{b\hat{c}}^a &= 2B^{abc}; & 4) N_{bc}^{\hat{a}} &= 2B_{abc}. \end{aligned} \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [4, 8]. *AC-структура на многообразии называется интегрируемой, если AC-многообразие локально эквивалентно произведению комплексного многообразия на гладкое многообразие без дополнительной структуры.*

Обращение тензора Нейенхейса в нуль равносильно интегрируемости AC-структуры [4, 8].

Пусть $lcAC_S$ -структура интегрируема, тогда из (6) следует, что $B^{abc} = B_{abc} = 0$, $B_{ab} = B^{ab} = 0$. Тогда первая группа структурных уравнений (2) примет вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega &= \sigma_b \omega \wedge \omega^b + \sigma^b \omega \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + \sigma_0 \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \\ 3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

А первая группа структурных уравнений (3) почти эрмитовой структуры интегральных многообразий распределения L интегрируемой $lcAC_S$ -структуры запишется в виде

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Т.е. в классификации Грея-Хервеллы [4] эта структура является структурой класса W_4 .

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения интегрируемого $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса W_4 в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.*

Известно [9], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, а именно:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi; \\ N^{(2)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X); \\ N^{(3)}(X) &= (\mathcal{L}_{\xi}\Phi)(X); \\ N^{(4)}(X) &= (\mathcal{L}_{\xi}\eta)(X); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X .

В [10, 11] приводится аналитическое выражение тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$:

$$\begin{aligned} 1) \quad N^{(2)}(X, Y) &= \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}; \\ 2) \quad N^{(3)}(X) &= \nabla_{\xi}(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi(\nabla_X\xi); \\ 3) \quad N^{(4)}(X) &= \nabla_{\xi}(\eta)(X); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \tag{7}$$

Для получения компонент этих тензоров на пространстве присоединенной G -структуры $lcAC_S$ -многообразия, проведем предварительные вычисления. Пусть M — $lcAC_S$ -многообразие, тензорные компоненты формы римановой связности имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} 1) \quad \theta_b^a &= -2\sigma^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c - 2B^{cab} \omega_c; \quad 2) \quad \theta_b^{\hat{a}} = -2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c \omega_c - 2B_{cab} \omega^c; \\ 3) \quad \theta_0^a &= \sigma_0 \omega^a + B^{ab} \omega_b - \sigma^a \omega; \quad 4) \quad \theta_0^{\hat{a}} = \sigma_0 \omega_a + B_{ab} \omega^b - \sigma_a \omega; \\ 5) \quad \theta_a^0 &= -\sigma_0 \omega_a - B_{ab} \omega^b + \sigma_a \omega; \quad 6) \quad \theta_a^{\hat{0}} = -\sigma_0 \omega^a - B^{ab} \omega_b + \sigma^a \omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим характеристический вектор $lcAC_S$ -многообразия. Поскольку ξ — тензор типа $(0,1)$, его компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям $d\xi^i + \xi^j \theta_j^i = \xi^i, j\omega^j$, где $\xi^i_{,j}$ — компоненты тензора $\nabla\xi$. Расписывая эти

соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (8) и того обстоятельства, что на этом пространстве $\xi^a = 0$, $\xi^{\hat{a}} = 0$, $\xi^0 = 1$, получаем для $lcAC_S$ -многообразий:

$$\begin{aligned} 1) \xi^0_{,j} &= 0; \quad 2) \xi^a_{,0} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,0} = -\sigma^a; \\ 3) \xi^a_{,b} &= \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b} = \sigma_0\delta^a_b; \quad 4) \xi^a_{,\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}} = B^{ab}; \\ 5) \xi^{\hat{a}}_{,0} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,0} = -\sigma_a; \quad 6) \xi^{\hat{a}}_{,b} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = B_{ab}; \\ 7) \xi^{\hat{a}}_{,\hat{b}} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \sigma_0\delta^b_a. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для контактной формы η $lcAC_S$ -многообразия получим компоненты ковариантной производной:

$$\begin{aligned} 1) \eta_{0,i} &= 0; \quad 2) \eta_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,0} = -\sigma^a; \\ 3) \eta_{\hat{a},b} &= \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b} = \sigma_0\delta^a_b; \quad 4) \eta_{\hat{a},\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}} = B^{ab}; \\ 5) \eta_{a,0} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,0} = -\sigma_a; \quad 6) \eta_{a,b} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = B_{ab}; \\ 7) \eta_{a,\hat{b}} &= -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \sigma_0\delta^b_a. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на $lcAC_S$ -многообразие M , находим, что на этом пространстве тензор $N^{(1)}$ имеет компоненты:

$$\begin{aligned} 1) (N^{(1)})^0_{a0} &= -(N^{(1)})^0_{0a} = \sigma_a; \quad 2) (N^{(1)})^0_{\hat{a}0} = -(N^{(1)})^0_{0\hat{a}} = \sigma^a; \\ 3) (N^{(1)})^a_{\hat{b}0} &= -(N^{(1)})^a_{0\hat{b}} = -\frac{1}{2}B^{ab}; \quad 4) (N^{(1)})^a_{\hat{b}\hat{c}} = 2B^{abc}; \\ 5) (N^{(1)})^{\hat{a}}_{bc} &= 2B_{abc}, \quad 6) (N^{(1)})^{\hat{a}}_{b0} = -(N^{(1)})^{\hat{a}}_{0b} = -\frac{1}{2}B_{ab}. \end{aligned} \quad (11)$$

Остальные компоненты нулевые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [1, 9]. *Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$.*

Понятие нормальности было введено Сасаки С. и Хатакеямой Дж. [9] и является одним из фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанных с понятием интегрируемости структуры.

Пусть M — нормальное $lcAC_S$ -многообразие. Тогда из (11) и Определения 6 следует, что $\sigma_a = \sigma^a = 0$, $B^{ab} = B_{ab} = 0$, $B^{abc} = B_{abc} = 0$.

Первая группа структурных уравнений нормального $lcAC_S$ -многообразия запишется в виде:

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= 0; \\ 2) d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + \sigma_0\delta^a_b \omega \wedge \omega^b; \\ 3) d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + \sigma_0\delta^b_a \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

А первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении такого многообразия, примет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b; \\ 2) d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Т.е. в классификации Грея-Хервеллы [4] эта структура является келеровой структурой.

А значит, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения нормального $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой.*

На пространстве присоединенной G -структуры тождество (7:1) примет вид:

$$N_{ij}^{(2)} = \eta_{j,k} \Phi_i^k - \eta_{i,k} \Phi_j^k + \eta_k \Phi_{i,j}^k - \eta_k \Phi_{j,i}^k.$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0$, $\eta_0 = 1$, (1), (4) и (10), из последнего выражения получим:

$$\begin{aligned} 1) N_{0a}^{(2)} &= -N_{a0}^{(2)} = -\eta_0 \Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1} \sigma_a; \\ 2) N_{0\hat{a}}^{(2)} &= -N_{\hat{a}0}^{(2)} = -\eta_0 \Phi_{\hat{a},0}^0 = \sqrt{-1} \sigma^a, \end{aligned} \quad (12)$$

остальные компоненты нулевые.

Пусть на $lcAC_S$ -многообразии $N^{(2)}(X, Y) = 0$ тогда, из (12) следует, что $\sigma_a = \sigma^a = 0$. Первая группа структурных уравнений такого $lcAC_S$ -многообразия примет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= 0; \\ 2) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0 \delta_b^a \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ 3) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Тогда первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении данного $lcAC_S$ -многообразия, имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ 2) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

В классификации Грея-Хервеллы [4] эта структура является почти келеровой структурой. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(2)}(X, Y) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.*

На пространстве присоединенной G -структуры тождество (7:2) равносильно соотношениям: $(N^{(3)})_k^i = \Phi_{k,j}^i \xi^j - \xi^i_{,j} \Phi_k^j + \Phi_j^i \xi^j_{,k}$.

А значит, с учетом (1), (4) и (9) ненулевые компоненты $N^{(3)}$ для $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) (N^{(3)})_a^0 &= \Phi_{a,0}^0 = \sqrt{-1} \sigma_a; \\ 2) (N^{(3)})_{\hat{a}}^0 &= \Phi_{\hat{a},0}^0 = -\sqrt{-1} \sigma^a; \\ 4) (N^{(3)})_{\hat{b}}^a &= 2\sqrt{-1} \xi^a_{,\hat{b}} = -2\Phi_{0,\hat{b}}^a = 2\sqrt{-1} B^{ab}; \\ 5) (N^{(3)})_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= -2\sqrt{-1} \xi^{\hat{a}}_{,\hat{b}} = -2\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = -2\sqrt{-1} B_{ab}. \end{aligned} \quad (13)$$

Обращение в нуль тензора $N^{(3)}(X)$ на $lcAC_S$ -многообразии влечет, согласно (13), выполнение равенств $\sigma_a = \sigma^a = 0$, $B^{ab} = B_{ab} = 0$. И первая группа структурных уравнений $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} 1) d\omega &= 0; \\ 2) d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0 \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \\ 3) d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0 \delta_a^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Следовательно, почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(3)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

Наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X)$; $\forall X \in \mathcal{X}(M)$. На пространстве присоединенной G -структуры это равенство запишется в виде $(N^{(4)})_i = \eta_{i,0}$, последнее равносильно соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) & (N^{(4)})_0 = \eta_{0,0} = 0; \\ 2) & (N^{(4)})_a = \eta_{a,0} = -\sqrt{-1}\Phi_{0,0}^{\hat{a}} = -\sigma_a; \\ 3) & (N^{(4)})_{\hat{a}} = \eta_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\Phi_{0,0}^a = -\sigma^a. \end{aligned} \quad (14)$$

Равенство нулю тензора $N^{(4)}(X)$, согласно (14) равносильно соотношениям $\sigma_a = \sigma^a = 0$. И в этом случае первая группа структурных уравнений $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$\begin{aligned} 1) & d\omega = 0; \\ 2) & d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \sigma_0\delta_b^a\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b; \\ 3) & d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \sigma_0\delta_a^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

А значит, почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -многообразия, для которой $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

Как промежуточный факт можно отметить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для $lcAC_S$ -многообразия обращение тензора $N^{(2)}$ в нуль равносильно обращению в нуль тензора $N^{(4)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнивая полученные для $lcAC_S$ -многообразия компоненты тензора $N^{(2)}$ и тензора $N^{(4)}$ на пространстве присоединенной G -структуры, а именно соотношения (12) и (14), получим то, что и требуется доказать.

3. Заключение

Обобщая вышеизложенное, сформулируем следующий результат

ТЕОРЕМА. Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения:

- а) $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса $W_2 \oplus W_4$, причем она будет почти келеровой тогда и только тогда, когда $grad \sigma \subset L(\xi)$.
- б) интегрируемого $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса W_4 ;
- в) нормального $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой;
- г) $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(2)}(X, Y) = 0$, или $N^{(3)}(X) = 0$, или $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blair D.E. Contact manifolds in Riemannian geometry // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1976. Vol. 509. P. 1-146.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М. ВИНТИ. 1986. Т. 18. С. 25-71.

3. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 8. С. 71-100. <https://doi.org/10.4213/sm675>.
4. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный дом». 2013.
5. Vaisman I. Conformal changes of almost contact metric manifolds // Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New-York. 1980. Vol. 792. P. 435-443.
6. Харитоновна С. В. О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий // Математические заметки. 2009. Т. 86, № 1. С. 126–138. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5249>.
7. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли: пер. с англ. М.: Мир. 1987.
8. Кобаяши Ш., Номидзу К. М. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука. 1981.
9. Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J. 1961. Vol. 13, № 2. P. 281-294.
10. Рустанов А. Р. Свойства интегрируемости NC_{10} -многообразий // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 5. С. 32-38. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.4>.
11. Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитоновна С. В. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу // Владикавказский математический журнал. 2018. Т. 20, № 3. С. 4–20 DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2018.3.17829>.

REFERENCES

1. Blair, D. E. 1976, “Contact manifolds in Riemannian geometry”, *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*, vol. 509. pp. 1-146.
2. Kirichenko, V. F. 1988, “Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost-contact manifolds”, *J. Math. Sci.*, vol. 42. pp. 1885–1919 <https://doi.org/10.1007/BF01094419>.
3. Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R., 2002, “Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds”, *Sbornik: Mathematics*, vol.193(8). pp. 1173–1201. <http://dx.doi.org/10.1070/SM2002v193n08ABEH000675>.
4. Kirichenko, V. F., 2013, “Differential-geometric structures on manifolds”, Odessa: Printing House.
5. Vaisman, I., 1980, “Conformal changes of almost contact metric manifolds”, *Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New-York*, vol. 792. pp. 435-443.
6. Kharitonova, S. V., 2009, “On the geometry of locally conformally almost cosymplectic manifolds”, *Mathematical Notes*, vol. 86, pp. 121–131. <https://doi.org/10.1134/S0001434609070116>.
7. Warner, F., 1987, “Fundamentals of smooth manifolds and Lie group”, М.: Mir.
8. Kobayashi, S., Nomidzu, K. M., 1981, “Fundamentals of differential geometry”, М.: Nauka.

9. Sasaki, S., Hatakeyama, J., 1961, "On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II", *Tohoku Math. J.*, vol. 13 (2), pp. 281-294.
10. Rustanov, A. R., 2017, "Integrability properties of NC_{10} -manifolds", *Mathematical physics and computer modeling*, vol. 20(5), pp. 32-38. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.5.4>.
11. Abu-Saleem, A., Rustanov, A. R., Kharitonova, S. V., 2018, "Integrability Properties of Generalized Kenmotsu Manifolds", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 20(3). pp.4-20, DOI 10.23671/VNC.2018.3.17829.

Получено 04.08.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.