

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-130-141

**Большая система осцилляторов с ультралокальным
воздействием случайного стационарного внешнего поля**

М. В. Меликян

Меликян Маргарита Врежовна — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: mv.melikian@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается влияние на поведение больших гамильтоновых систем частиц внешней силы, которая представлена стационарным случайным процессом. Сама система предполагается имеющей квадратичное взаимодействие, а возмущение системы внешней силой предполагается локальным. Точнее, только одна фиксированная частица подвержена влиянию внешнего поля. Такие системы исследовались ранее, дается краткий обзор предыдущих работ. В нашем случае, когда внешнее воздействие является стационарным в широком смысле процессом, исследуется поведение средней энергии системы для больших времен. Основной результат состоит в выделении 4 различных случаев соотношения спектра матрицы гамильтоновой системы и спектральной плотности корреляционной функции стационарного процесса, дающих разное асимптотическое поведение траекторий и средней энергии. Типичным поведением является либо ограниченность, либо квадратичный рост средней энергии.

Ключевые слова: стационарные случайные процессы, линейные Гамильтоновы системы, локальное внешнее влияние, резонанс, асимптотика средней энергии.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

М. В. Меликян. Большая система осцилляторов с ультралокальным воздействием случайного стационарного внешнего поля // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 130–141.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-130-141

Large system of oscillators with ultralocal stochastic stationary external field influence

M. V. Melikian

Melikian Margarita Vrezhovna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: mv.melikian@gmail.com

Abstract

In this paper influence of external force, assumed to be random stationary process, on the behavior of large Hamiltonian particle systems is studied. The Hamiltonian system is assumed to have quadratic interaction, and the external influence is assumed to be local. More exactly, the external force acts on only one fixed particle. Such systems were studied earlier, it is given short review of the previous papers. In our case, when the external force is a stationary random process in the wider sense, large time asymptotics of the mean energy of the system is studied. Main result is the characterization of 4 different cases for the spectrum of the matrix of quadratic interaction and the spectral density of the correlation function of the stationary random process, which give different asymptotic behaviour of the trajectories and of the mean energy. Typical behaviour appears to be either uniform boundedness or quadratic growth of the mean energies.

Keywords: stationary random processes, linear Hamiltonian systems, local external influence, resonance, asymptotics of mean energies.

Bibliography: 28 titles.

For citation:

M. V. Melikian, 2022, “Large system of oscillators with ultralocal stochastic stationary external field influence”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 130–141.

1. Введение

В настоящей статье исследуется многочастичная система с квадратичным взаимодействием между частицами и локальным случайным внешним воздействием. При этом взаимодействие между частицами рассматривается только в рамках классических законов Ньютона (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]). Отличием от статьи [3] является то, что в настоящей статье вопрос столкновений частиц (свойство регулярности) не рассматривается.

В описание поведения систем большого числа частиц случайность вводили многие авторы. Причем вводилась она разными способами. Здесь нельзя не отметить цикл работ [8, 9, 10, 11], в которых исследуются цепочки гармонических осцилляторов с различными случайными начальными условиями (у этой же группы авторов есть и более ранние работы, однако приведенные выше видятся основными). Интерес к подобным моделям не угас до сих пор, см., например, [12].

Также, например, в ряде работ, где исследуется поток тепла в конечной неупорядоченной цепочке осцилляторов, случайными могут предполагаться массы частиц. Первым такую модель рассмотрел Дайсон [13]. Позднее результаты были получены Матсудом и Ишии [14], Лейбовицем (см. [15, 16]).

Случайными также могут быть начальные условия или же внешнее воздействие. Здесь хочется отметить работы Дудниковой Т.В., например, [17, 18, 19], статью Лыкова А.А. [20], а также цикл физических работ (выполненных скорее в математическом духе) [21, 22, 23, 24].

Большинство указанных работ рассматривают системы связанных гармонических осцилляторов и их обобщения, что не случайно – это классический объект изучения в математической физике, как и в самой физике. Дело в том, что в физике модель гармонического осциллятора играет важную роль, особенно при исследовании малых колебаний систем около положения устойчивого равновесия. Существование решений и их эргодические свойства были изучены в [25]. Также было проведено обширное исследование сходимости к равновесию счетной гармонической цепочки, находящейся в контакте с термостатом [9, 19, 26, 27]. Свойство равномерной ограниченности траекторий частиц системы (по времени t и номеру частицы k) особо важно для некоторых приложений. Например, равномерная ограниченность траекторий частиц в конечной гармонической цепи позволяет вывести уравнения Эйлера и газ Чаплыгина (уже упомянутая статья [1]). Равномерная ограниченность траекторий частиц в односторонней несимметричной гармонической цепочке играет важную роль в некоторых моделях транспортного потока [5].

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук проф. Малышеву В.А. за постановку задачи и ценные обсуждения в ходе работы.

Работа посвящается профессору механико-математического факультета МГУ Владимиру Николаевичу Чубарикову в связи с его семидесятилетием с пожеланиями крепкого здоровья.

2. Модель

В настоящей работе рассматривается конечная система точечных частиц единичных масс в случайном поле на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с координатами $\{x_k\}_{k=1}^N$ и скоростями $\{v_k\}_{k=1}^N$.

Определим гамильтониан (общую энергию системы) посредством формулы:

$$H(x(t), v(t)) = \sum_{k=1}^N \frac{v_k^2}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{a_{kk}}{2} (x_k(t) - ka)^2 + \sum_{\substack{k, j=1 \\ k \neq j}}^N \frac{a_{kj}}{2} (x_k(t) - x_j(t) - (k-j)a)^2,$$

где параметры $a > 0$, $a_{kk} \geq 0$. При этом первая сумма отвечает кинетической энергии системы, а оставшееся – потенциальной. А именно, вторая сумма в гамильтониане означает, что частица с номером k , где $a_{kk} > 0$, является гармоническим осциллятором (осцилляция происходит около положения ka), последняя же сумма отвечает за взаимодействие между частицами с номерами k и j , где $a_{kj} \neq 0$, причем в зависимости от знака $a_{kj}(x_k(t) - x_j(t) - (k-j)a)$ имеют место притяжение или отталкивание между соответствующими частицами (расстояние $(k-j)a$ здесь является тем расстоянием, к которому эти частицы «стремятся»).

Положением равновесия системы (состояние, где достигается минимум энергии) будет:

$$x_k = ka, \quad v_k = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Это означает, что если начальные условия находятся в положении равновесия, то частицы не будут двигаться, т.е. будем иметь $x_k(t) = ka$, $v_k(t) = 0$ для всех $t \geq 0$. В таком случае будет удобно перейти к новым переменным – отклонениям:

$$q_k(t) = x_k - ka, \quad p_k(t) = \dot{q}_k(t) = v_k(t).$$

Выразим гамильтониан в новых переменных и запишем его в виде:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^N a(k-j)q_k q_j,$$

где потребуем, чтобы функция $a(k)$ удовлетворяет двум условиям:

1. симметрия: $a(k) = a(-k)$;
2. матрица V положительно определена, где $V_{k,j} = a(k-j) = a(j-k)$.

Мы будем рассматривать нулевые начальные условия

$$q_k(0) = 0, p_k(0) = 0, k = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Тогда движение системы описывается следующей системой ОДУ:

$$\ddot{q}_j = - \sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}, j = 1, \dots, N,$$

где $f(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером n , $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем в гамильтоновом виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = p_j, \\ \dot{p}_j = - \sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}. \end{cases} \quad (2)$$

Введем вектор $\psi(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$. Тогда система перепишется в виде:

$$\dot{\psi} = A\psi + f(t)g, g = (0, e_n)^T, e_n(j) = \delta_{j,n}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда $f(t)$ – стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с ортогональной мерой $Z(dx)$, спектральной мерой $\mu(dx)$, носитель которой отделим от спектра оператора V , и непрерывной ковариационной функцией $B(s)$, то есть:

$$B(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} \mu(dx), f(s) \stackrel{\text{a.s.}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{isx} Z(dx). \quad (4)$$

Будем говорить, что последовательности случайных процессов $\{q_k(t)\}_k, \{p_k(t)\}_k$ решают систему уравнений (2), если они непрерывно дифференцируемы в среднеквадратичном и при их подстановке правая и левая часть равны по соответствующей мере. Начальные условия, лежащие в соответствующем гильбертовом пространстве, гарантируют существование и единственность решений уравнения, принадлежащему этому пространству при каждом t .

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\psi \in \mathbb{R}^{2N}$ существует и единственно (п.н.) решение $\psi(t)$ системы (3) с начальным условием ψ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно следует из существования и единственности решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, см., например, [28]. $\square$

2.1. Результаты

Ввиду того, что матрица V положительно определена и, значит, все ее собственные значения строго положительны, удобно далее обозначать их $a_k = \nu_k^2, k = 1, \dots, N$, причем удобно считать, что все ν_k положительны. Соответствующую им систему собственных векторов обозначим через $\{u_k, k = 1, \dots, N\}$. Далее всегда считаем эту систему ортонормированной.

ТЕОРЕМА 2. Пусть мера μ такова, что корреляционную функцию рассматриваемого случайного процесса можно представить в виде:

$$B(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} b(x) dx, \quad (5)$$

тогда средняя энергия системы выражается как:

$$E(H(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \frac{(x^2 + \nu_k^2)(1 - \cos(tx) \cos(\nu_k t)) - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2} dx,$$

при этом

1. если носитель $b(x)$ не пересекается со спектром корня из матрицы V (т.е. множеством $\{\nu_k, k = 1, \dots, N\}$), то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

2. если для всех j , таких что ν_j лежит в $\text{supp } b(x)$, $(u_j, e_n)^2 = 0$, то вновь имеет место ограниченность по времени средней энергии;

3. если есть точка спектра ν_j , лежащая в $\text{supp } b(x)$, такая что $(u_j, e_n)^2 \neq 0$, то

3.1. если $\nu_j = 0$ и выполнено

$$b(0) = b'(0) = 0, \quad (6)$$

то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

3.2. иначе (т.е. для тех индексов $j \in \{1, \dots, N\}$, для которых либо $\nu_j \neq 0$, либо $\nu_j = 0$, но не выполнено (6)) средняя энергия будет расти по времени, причем существует положительная постоянная C , такая что:

$$E(H(t)) \sim Ct^2.$$

2.2. Доказательство Теоремы 2

$$\ddot{q}_j = - \sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда решение системы выражается известной формулой (см., например, [28]):

$$q(t) = \int_0^t f(s)(\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t-s))e_n ds + \cos(\sqrt{V}t)q(0) + (\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}t)p(0), \quad (7)$$

$$p(t) = \int_0^t f(s) \cos(\sqrt{V}(t-s))e_n ds - \sqrt{V} \sin(\sqrt{V}t)q(0) + \cos(\sqrt{V}t)p(0), \quad (8)$$

Учтем (1):

$$q(t) = \int_0^t f(s)(\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t-s))e_n ds,$$

$$p(t) = \int_0^t f(s) \cos(\sqrt{V}(t-s))e_n ds.$$

Выразим средние кинетическую и потенциальную энергии. Начнем с кинетической:

$$2E(E_{kin}(t)) = E(p(t), p(t)) = E \int_0^t \int_0^t f(s_1)e_n^T \cos^T(\sqrt{V}(t-s_1))f(s_2) \cos(\sqrt{V}(t-s_2))e_n ds_1 ds_2.$$

Можно рассмотреть разложение вектора из $\mathbb{R}^N$ по системе собственных векторов $\{u_k, k = 1, \dots, N\}$:

$$e_n = \sum_{k=1}^N (u_k, e_n) u_k. \quad (9)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} E(p(t), p(t)) &= \int_0^t \int_0^t B(s_1 - s_2) (\cos(\sqrt{V}(t - s_1)) e_n, \cos(\sqrt{V}(t - s_2)) e_n) ds_1 ds_2 = \\ &= \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_0^t \int_0^t B(s_1 - s_2) \cos(\nu_k(t - s_1)) \cos(\nu_k(t - s_2)) ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

Воспользуемся (5), тогда

$$\begin{aligned} E(p(t), p(t)) &= \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(u-v)x} b(x) \cos(\nu_k u) \cos(\nu_k v) dx du dv = \\ &= \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \int_0^t e^{iux} \cos(\nu_k u) du \int_0^t e^{-ivx} \cos(\nu_k v) dv dx. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} h_k(t, x) &= \int_0^t e^{ivx} \cos(\nu_k v) dv = \int_0^t e^{ivx} d \frac{\sin(\nu_k v)}{\nu_k} = e^{ivx} \frac{\sin(\nu_k v)}{\nu_k} \Big|_{v=0}^{v=t} - \\ &- ix \int_0^t \frac{\sin(\nu_k v)}{\nu_k} e^{ivx} dv = e^{itx} \frac{\sin(\nu_k t)}{\nu_k} + \frac{ix}{\nu_k^2} (e^{itx} \cos(\nu_k t) - 1) + \frac{x^2}{\nu_k^2} h_k(t, x), \end{aligned}$$

откуда:

$$h_k(t, x) = \frac{\nu_k e^{itx} \sin(\nu_k t) + ix(e^{itx} \cos(\nu_k t) - 1)}{\nu_k^2 - x^2}.$$

Нам понадобятся

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h_k(t, x)) &= \frac{\nu_k \sin(\nu_k t) \cos(tx) - x \sin(tx) \cos(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2}, \\ \operatorname{Im}(h_k(t, x)) &= \frac{\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) - x + x \cos(tx) \cos(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$|h_k(t, x)|^2 = \frac{\nu_k^2 \sin^2(\nu_k t) + x^2 \cos^2(\nu_k t) + x^2 - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) - 2x^2 \cos(tx) \cos(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2}. \quad (10)$$

Итого,

$$E(E_{kin}(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) |h_k(t, x)|^2 dx,$$

где $|h_k(t, x)|^2$ найдено в (10).

Далее средняя потенциальная энергия:

$$\begin{aligned} 2E(E_{pot}(t)) &= E(q(t), Vq(t)) = \\ &= E \int_0^t \int_0^t f(s_1) f(s_2) ((\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t - s_1)) e_n, V(\sqrt{V})^{-1} \sin(\sqrt{V}(t - s_2)) e_n) ds_1 ds_2 = \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \int_0^t B(s_1 - s_2) (\sin(\sqrt{V}(t - s_1)) e_n, \sin(\sqrt{V}(t - s_2)) e_n) ds_1 ds_2,$$

вновь применяем формулы (5) и (9):

$$2E(E_{pot}(t)) = \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \int_0^t e^{iux} \sin(\nu_k u) du \int_0^t e^{-ivx} \sin(\nu_k v) dv dx.$$

Ищем

$$\begin{aligned} g_k(t, x) &= \int_0^t e^{ivx} \sin(\nu_k v) dv = \int_0^t e^{ivx} d \frac{\cos(\nu_k v)}{-\nu_k} = e^{ivx} \frac{\cos(\nu_k v)}{-\nu_k} \Big|_{v=0}^{v=t} - \\ &- ix \int_0^t \frac{\cos(\nu_k v)}{-\nu_k} e^{ivx} dv = \frac{1 - e^{itx} \cos(\nu_k t)}{\nu_k} + \frac{ix}{\nu_k^2} e^{itx} \sin(\nu_k t) + \frac{x^2}{\nu_k^2} g_k(t, x), \end{aligned}$$

откуда:

$$g_k(t, x) = \frac{\nu_k(1 - e^{itx} \cos(\nu_k t)) + ix e^{itx} \sin(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2}.$$

Нам понадобятся

$$\operatorname{Re}(g_k(t, x)) = \frac{\nu_k - \nu_k \cos(tx) \cos(\nu_k t) - x \sin(tx) \sin(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2},$$

$$\operatorname{Im}(g_k(t, x)) = \frac{-\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) + x \cos(tx) \sin(\nu_k t)}{\nu_k^2 - x^2},$$

откуда

$$|g_k(t, x)|^2 = \frac{x^2 \sin^2(\nu_k t) + \nu_k^2 + \nu_k^2 \cos^2(\nu_k t) - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t) - 2\nu_k^2 \cos(tx) \cos(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2}. \quad (11)$$

Итого,

$$E(E_{pot}(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) |g_k(t, x)|^2 dx,$$

где $|g_k(t, x)|^2$ найдено в (11). Отсюда полная средняя энергия системы выражается как:

$$E(H(t)) = \frac{1}{2} \sum_k (u_k, e_n)^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) \frac{(x^2 + \nu_k^2)(1 - \cos(tx) \cos(\nu_k t)) - 2x\nu_k \sin(tx) \sin(\nu_k t)}{(\nu_k^2 - x^2)^2} dx,$$

Откуда делаем вывод, что если носитель $b(x)$ не пересекается со спектром матрицы V , то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени. В случае, если есть точка спектра ν_j , лежащая в $\operatorname{supp} b(x)$ (здесь $\operatorname{supp} b(x)$ – носитель функции), то в случае, если $(u_j, e_n)^2 \neq 0$, соответствующий интеграл будет давать следующий вклад (рассмотрим подынтегральную функцию в окрестности этой точки, для чего сделаем замену $x = y + \nu_j$). Начнем с числителя:

$$\begin{aligned} (x^2 + \nu_j^2)(1 - \cos(tx) \cos(\nu_j t)) - 2x\nu_j \sin(tx) \sin(\nu_j t) &= y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2 - \\ &- (y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2) \cos(\nu_j t) (\cos(ty) \cos(\nu_j t) - \sin(ty) \sin(\nu_j t)) - \\ &- (2\nu_j y + 2\nu_j^2) \sin(\nu_j t) (\cos(ty) \sin(\nu_j t) + \sin(ty) \cos(\nu_j t)) = \\ &= y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2 - y^2 \cos(\nu_j t) (\cos(ty) \cos(\nu_j t) - \sin(ty) \sin(\nu_j t)) - \\ &- (2\nu_j y + 2\nu_j^2) \cos(ty). \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

1. $\nu_j = 0$. Тогда числитель равен $y^2 - y^2 \cos(ty)$, а знаменатель будет равен $(\nu_j^2 - x^2)^2 = y^2(y + 2\nu_j)^2 = y^4$. Итого, данный интеграл будет иметь вид

$$\int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy,$$

оценим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{|1 - \cos(ty)|}{y^2} dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{b(y)}{y^2} dy = \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \frac{b(y)}{y^2} dy + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b(y)}{y^2} dy \right), \end{aligned}$$

для некоторого $\delta > 0$. Здесь первый интеграл

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} \frac{b(y)}{y^2} dy \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} b(y) dy < \infty.$$

Исследуем на сходимость второй интеграл (от знакопостоянной функции, особая точка — точка нуль):

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b(y)}{y^2} dy &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b(0) + b'(0)y + b''(0)y^2/2 + \bar{o}(y^2)}{y^2} dy \sim^{(1)} \\ &\sim^{(1)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{b''(0)y^2/2}{y^2} dy < \infty, \end{aligned}$$

здесь под $\sim^{(1)}$ имеется ввиду эквивалентность по сходимости, а $\bar{o}(y^2)$ — $\bar{o}$ -малое при $y \rightarrow 0$, при этом учтено (6). Иначе

$$\int_{\mathbb{R}} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy = \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy + \int_{-\delta}^{\delta} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy.$$

Первый интеграл сходится аналогично предыдущему, а второй:

$$\int_{-\delta}^{\delta} b(y) \frac{1 - \cos(ty)}{y^2} dy \sim \int_{-\delta}^{\delta} b(y) \frac{t^2 y^2 / 2}{y^2} dy = C_1 t^2.$$

2. $\nu_j \neq 0$. Тогда числитель (при $y \rightarrow 0$ и фиксированном t) равен

$$\begin{aligned} y^2 + 2\nu_j y + 2\nu_j^2 - y^2(\cos^2(\nu_j t)(1 - \frac{(ty)^2}{2} + \bar{o}((ty)^2) - \cos(\nu_j t) \sin(\nu_j t)(ty + \bar{o}((ty)^2))) - \\ - (2\nu_j y + 2\nu_j^2)(1 - \frac{(ty)^2}{2} + \bar{o}((ty)^2))) = y^2(1 - \cos^2(\nu_j t)) + \nu_j^2 t^2 y^2 + \bar{o}((ty)^2). \end{aligned}$$

А знаменатель будет равен $(\nu_j^2 - x^2)^2 = y^2(y + 2\nu_j)^2 \sim y^2$, $y \rightarrow 0$. Откуда получаем, что в окрестности нуля дробь ведет себя как $1 - \cos^2(\nu_j t) + \nu_j^2 t^2$, то есть порядок роста (по времени) равен $\sim \nu_j^2 t^2$, что завершает доказательство теоремы.

3. Заключение

Показано, что даже локальное воздействие на конечную систему частиц способно привести к явлению резонанса, изучены условия его возникновения и средняя энергия системы в условиях резонанса и его отсутствия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lykov A., Malyshev V. From the N -body problem to Euler equations // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2017. Vol. 24, №1, P. 79-95.
2. Lykov A. A., Malyshev V. A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields. 2012. Vol. 18, P. 1-10.
3. Лыков А. А., Малышев В. А., Чубариков В. Н. Регулярные континуальные системы точечных частиц. I: системы без взаимодействия // Чебышёвский сборник. 2016. Т. 17, №3, С. 148–165.
4. Lykov A. A., Malyshev V. A. Convergence to Gibbs Equilibrium — Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields. 2013. Vol. 19, P. 643–666.
5. Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V. Phase diagram for one-way traffic flow with local control // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier BV (Netherlands). 2017. Vol. 486, P. 849-866.
6. Lykov A., Melikian M. Long time behavior of infinite harmonic chain with l_2 initial conditions // Markov Processes and Related Fields. 2020. Vol. 26, №2, P. 189-212.
7. Лыков А. А., Малышев В. А., Меликян М. В. Резонанс в многокомпонентных линейных системах // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. Вып. 3. 2021. С. 74-79.
8. Dobrushin R. L., Fritz J. Non-Equilibrium Dynamics of One-dimensional Infinite Particle Systems with a Hard-Core Interaction // Commun. math. Phys. 1977. Vol. 55, P. 275-292.
9. Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L. Convergence to Stationary States for Infinite Harmonic Systems // Journal of Statistical Physics. 1983. Vol. 30, №1.
10. Boldrighini C., Dobrushin R. L., Sukhov Yu. M. One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics // Journal of Statistical Physics. 1983. Vol. 31, №3, P. 123-155.
11. Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Suhov Yu. M., Triolo L. One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics // Journal of Statistical Physics. 1986. Vol. 43, 3/4.
12. Bernardin C., Huveneers F., Olla S. Hydrodynamic Limit for a Disordered Harmonic Chain // Commun. Math. Phys. 2019. 365:215.
13. Dyson F. J. The dynamics of a disordered linear chain // Phys. Rev. 1953. Vol. 92, №6, P. 1331-1338.
14. Matsuda H., Ishii K. Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1970. Vol. 45, P. 56-88.
15. O'Connor A. J., Lebowitz J. L. Heat conduction and sound transmission in isotopically disordered harmonic crystals // J. Math. Phys. 1974. Vol. 15, P. 692-703.
16. Casher A., Lebowitz J. L. Heat flow in regular and disordered harmonic chains // J. Math. Phys. 1971. Vol. 12, №8, P. 1701-1711.
17. Dudnikova T. V. Behavior for Large Time of a Two-Component Chain of Harmonic Oscillators // ISSN 1061 – 9208, Russian Journal of Mathematical Physics. 2018. Vol. 25, №4, P. 470-491.

18. Dudnikova T. Long-time asymptotics of solutions to a hamiltonian system on a lattice // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 219, №1, P. 69-85.
19. Dudnikova T., Komech A., Spohn H. On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals // J. Math. Phys. 2003. Vol. 44, №6, P. 2596-2620.
20. Lykov A. A. Energy Growth of Infinite Harmonic Chain under Microscopic Random Influence // Markov Processes and Related Fields. 2020. Vol. 26, P. 287-304.
21. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions // J. Micromech. and Mol. Phys. 2018. Vol. 3, P. 1-2.
22. Hemmen J. Dynamics and ergodicity of the infinite harmonic crystal // Physics Reports. 1980. Vol. 65, №2, P. 43-149.
23. Fox R. Long-time tails and diffusion // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 27, №6, P. 3216-3233.
24. Florencio J., Lee H. Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 31, №5, P. 3221-3236.
25. Lanford O., Lebowitz J. Time evolution and ergodic properties of harmonic systems // Dynamical Systems, Theory and Applications, J. Moser (eds), Springer, Berlin, Heidelberg, Lect. Notes Phys. 1975. Vol. 38, P. 144-177.
26. Bogolyubov N. N. On Some Statistical Methods in Mathematical Physics // Ac. Sci. USSR, Kiev. 1945.
27. Spohn H., Lebowitz J. Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems // Commun. Math. Phys. 1977. Vol. 54, P. 97-120.
28. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений // КомКнига, Москва. 2007.

REFERENCES

1. Lykov A., Malyshev V., 2017, "From the N -body problem to Euler equations", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 24, no. 1, pp. 79-95.
2. Lykov A. A., Malyshev V. A., 2012, "Harmonic Chain with Weak Dissipation", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 18, pp. 1-10.
3. Lykov A. A., Malyshev V. A., Chubarikov V. N., 2016, "Regular continual point particle systems. I: systems without interaction", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 17, no. 3, pp. 148-165.
4. Lykov A. A., Malyshev V. A., 2013, "Convergence to Gibbs Equilibrium — Unveiling the Mystery", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 19, pp. 643-666.
5. Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V., 2017, "Phase diagram for one-way traffic flow with local control", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier BV (Netherlands), vol. 486, pp. 849-866.
6. Lykov A., Melikian M., 2020, "Long time behavior of infinite harmonic chain with l_2 initial conditions", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 26, no. 2, pp. 189-212.

7. Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V., 2021, "Resonance in Large Linear Systems", *Vestnik Mosk. Univ. S. 1. Math. Mech.*, 3, pp. 74-79.
8. Dobrushin R. L., Fritz J., 1977, "Non-Equilibrium Dynamics of One-dimensional Infinite Particle Systems with a Hard-Core Interaction", *Commun. math. Phys.*, vol. 55, pp. 275-292.
9. Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L., 1983, "Convergence to Stationary States for Infinite Harmonic Systems", *Journal of Statistical Physics*, vol. 30, no. 1.
10. Boldrighini C., Dobrushin R. L., Sukhov Yu. M., 1983, "One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics", *Journal of Statistical Physics*, vol. 31, no. 3, pp. 123-155.
11. Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Sukhov Yu. M., Triolo L., 1986, "One-Dimensional Harmonic Lattice Caricature of Hydrodynamics", *Journal of Statistical Physics*, vol. 43, 3/4.
12. Bernardin C., Huveneers F., Olla S., 2019, "Hydrodynamic Limit for a Disordered Harmonic Chain", *Commun. Math. Phys.*, 365:215.
13. Dyson F. J., 1953, "The dynamics of a disordered linear chain", *Phys. Rev.*, vol. 92, no. 6, pp. 1331-1338.
14. Matsuda H., Ishii K., 1970, "Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain", *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 45, pp. 56-88.
15. O'Connor A. J., Lebowitz J. L., 1974, "Heat conduction and sound transmission in isotopically disordered harmonic crystals", *J. Math. Phys.*, vol. 15, pp. 692-703.
16. Casher A., Lebowitz J. L., 1971, "Heat flow in regular and disordered harmonic chains", *J. Math. Phys.*, vol. 12, no. 8, pp. 1701-1711.
17. Dudnikova T. V., 2018, "Behavior for Large Time of a Two-Component Chain of Harmonic Oscillators", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 25, no. 4, pp. 470-491.
18. Dudnikova T., 2016, "Long-time asymptotics of solutions to a hamiltonian system on a lattice", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 219, no. 1, pp. 69-85.
19. Dudnikova T., Komech A., Spohn H., 2003, "On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals", *J. Math. Phys.*, vol. 44, no. 6, pp. 2596-2620.
20. Lykov A. A., 2020, "Energy Growth of Infinite Harmonic Chain under Microscopic Random Influence", *Markov Processes and Related Fields*, vol. 26, pp. 287-304.
21. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M., 2018, "Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions", *J. Micromech. and Mol. Phys.*, vol. 3, pp. 1-2.
22. Hemmen J., 1980, "Dynamics and ergodicity of the infinite harmonic crystal", *Physics Reports*, vol. 65, no. 2, pp. 43-149.
23. Fox R., 1983, "Long-time tails and diffusion", *Phys. Rev. A.*, vol. 27, no. 6, pp. 3216-3233.
24. Florencio J., Lee H., 1985, "Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain", *Phys. Rev. A.*, vol. 31, no. 5, pp. 3221-3236.
25. Lanford O., Lebowitz J., 1975, "Time evolution and ergodic properties of harmonic systems", *Dynamical Systems, Theory and Applications*, J. Moser (eds), Springer, Berlin, Heidelberg, Lect. Notes Phys., vol. 38, pp. 144-177.

-
26. Bogolyubov N. N., 1945, “On Some Statistical Methods in Mathematical Physics”, *Ac. Sci. USSR*, Kiev.
 27. Spohn H., Lebowitz J., 1977, “Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems”, *Commun. Math. Phys.*, vol. 54, pp. 97-120.
 28. Filippov A. F., 2007, “Introduction to differential equations theory”, *KomKniga*, Moscow.

Получено 13.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.