

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129

Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения¹

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется зависимость функций капитала (ресурса) и потребления в экономической модели Рамсея — Касса — Купманса в случае, когда сбережение является тождественной постоянной. В сделанных предположениях система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию рассматриваемой экономической модели, решена в квадратурах. На основании полученного решения найдены оценки сверху функции потребления.

Ключевые слова: Математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, функция капитала, потребления.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 118–129.

¹Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129

The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

email: prozerpi@yahoo.co.uk

Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow center of fundamental and applied mathematics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study the dependence of the functions of capital (resource) and consumption in the Ramsey–Kass–Koopmans economic model in the case when saving is an identical constant. The system of differential equations describing the evolution of the economic model under consideration is solved in quadratures under the assumptions made. Upper estimates of the consumption function are found based on the obtained solution.

Keywords: Mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, function of capital, consumption.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2022, “The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 118–129.

1. Введение и основной результат

Данная статья является продолжением исследований, начатых авторами в работе [3]. В модели Рамсея — Касса — Купманса, применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют

функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \quad (1)$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Первая группа констант a, α, θ определяет производственную функцию Кобба – Дугласа f и функцию полезности U_θ . В качестве функции $f(K)$, выражающей зависимость производства продукции от капитала K , берут степенную функцию Кобба–Дугласа [8]–[13]

$$f(K) = aK^\alpha. \quad (2)$$

В последних работах Гомеса [19], [20] экономическая модель Рамсея – Касса – Купманса разбиралась также и для CES производственной функции, т.е. для функции вида $f(K) = B(\alpha K^\psi + (1 - \alpha))^{1/\psi}$, где $B > 0$, $\alpha \in (0; 1)$, $\psi < 1$.

Нами задача решается на бесконечном промежутке времени $t \in [0; \infty)$. Отметим также некоторые интересные обобщения данной модели, в которых рассматриваются задачи на конечном промежутке времени (модель с "известным концом света") с учётом режима производства технологической информации см. [18].

Во всех востребованных на практике моделях показатель степени α в производственной функции Кобба – Дугласа лежит в пределах $0.7 \leq \alpha \leq 0.97$. Модели со значениями показателя α меньше $2/3$ считаются заведомо неэффективными и не рассматриваются см. [16]. В качестве функции полезности U_θ обычно берут

$$U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \quad U_1(C) = \ln C. \quad (3)$$

Значение параметра θ обычно лежит в отрезке $0.4 \leq \theta \leq 4$.

Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta + \rho}{\theta} + x$, связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [8]–[13]. В дальнейших рассмотрениях существенно, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

В этой работе мы изучаем решения системы уравнений (1) в том важном частном случае, когда величины x_1 и x_2 связаны между собой соотношением

$$x_2 = \alpha x_1. \quad (4)$$

Равенство (4) рассматривалось в ряде публикаций, поскольку при его выполнении функция сбережения (см. о ней в [9]) является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (3) в квадратурах даже при выполнении связи (4) между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также из этой системы приближённо выражают зависимость $C(K)$, показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

В случае выполнения равенства (4) мы получили решение системы дифференциальных уравнений (1) в квадратурах, хотя решение содержит интегралы от элементарных функций, в общем случае через элементарные функции не выражаемые. В то же время, в процессе решения системы (1) мы получили, введя функции

$$v(t) = K(t)e^{x_1 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}, \quad (5)$$

явную зависимость $v(w)$ через элементарные функции. Анализ этой зависимости позволил обнаружить ограничение на значения функции потребления $C(t)$, выражаемое через начальные условия

$$K(0) = K_0, \quad C(0) = C_0. \quad (6)$$

Как правило, в статьях, где рассматривались экономические модели, описываемые системой дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), рассматривались только возрастающие решения системы (1) (как $K(t)$, так и $C(t)$). Необходимым (но недостаточным) условием возрастания $K(t)$ является следующее неравенство между начальными условиями:

$$C_0 \leq f(K_0). \quad (7)$$

Мы несколько расширили допустимый класс решений системы (1), не требуя возрастания $K(t)$; мы лишь требуем, чтобы возрастающей являлась функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$. Очевидно, что неубывание $K(t)$ влечёт за собой возрастание $v(t)$, но не наоборот.

В указанных предположениях доказана теорема 1, которая является основным результатом нашей работы. Говоря описательно, содержание этой теоремы состоит в том, что если начальное значение C_0 функции потребления $C(t)$ "ненамного" меньше значения производственной функции f от начального капитала K_0 , то $C(t)$ не может "значительно" подняться над своим начальным уровнем без того, чтобы нарушилось возрастание $v(t)$ и, как следствие, начала бы снижаться величина капитала $K(t)$.

Перед формулировкой теоремы введём сравнительную характеристику начальных условий (6)

$$\Delta = \frac{f(K_0)}{C_0} - 1, \quad (8)$$

неотрицательную согласно ограничению (7). Введённая характеристика связана с начальным значением неотрицательной функции $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$, известной как норма валового сбережения. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $\Delta = \frac{s(0)}{1-s(0)}$. Откуда вытекает равносильность $\Delta \geq 0 \iff s(0) \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K(t)$, $C(t)$ — решения системы (1) на произвольном отрезке $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие начальным условиям (6), подчинённым ограничению (7). Тогда при условии (4) связи между параметрами справедливо следующее утверждение. Для того, чтобы функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$ была неубывающей на всем отрезке $[0; T]$, функция $w(t) = C(t)e^{x_2 t}$ во всех точках отрезка $[0; T]$ необходимо должна удовлетворять оценке сверху

$$w(t) \leq C_0 (1 + \Delta(1 - \theta))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1), \quad (9)$$

$$w(t) \leq C_0 e^{\Delta}, \quad \text{если } \theta = 1. \quad (10)$$

Если $\theta > 1$, то оценка сверху

$$w(t) \leq C_0 (1 - \Delta(\theta - 1))^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (11)$$

выполняется при условии $0 < \Delta < (\theta - 1)^{-1}$.

Функция $w(t)$ является возрастающей, и поэтому выполнение неравенств (9)–(11) в точке T следует, что они выполняются во всех точках интервала $(0; T)$, причём неравенства становятся строгими.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция $w(t)$ достигнет в некоторой точке $t = T_0$ значения, стоящего в правой части неравенств теоремы 1 (какого именно неравенства — зависит от

значения θ), то при всех $t > T_0$ функция $w(t)$ в силу своего возрастания превзойдёт эту границу. А тогда функция $v(t)$ (и тем более $K(t)$) будет иметь при любом $t > T_0$ отрицательную производную.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\theta > 1$, когда $\Delta \geq (\theta - 1)^{-1}$ наш метод не дает ограничений на значения $w(t)$ (или хотя бы $C(t)$), однако возможность наличия подобных ограничений не исключена.

Из теоремы 1 и тождества $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$ получаем ограничение сверху для значений функции потребления.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 для функции потребления $C(t)$ при всех значениях $t > 0$ верны следующие оценки сверху;

$$\begin{aligned} C(t) &\leq C_0 e^{-x_2 t} (1 + \Delta(1 - \theta))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1), \\ C(t) &\leq C_0 e^{(\Delta - x_2)t}, \quad \text{если } \theta = 1, \\ C(t) &\leq C_0 e^{-x_2 t} (1 - \Delta(\theta - 1))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta > 1, \Delta < (\theta - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

2. Выражение зависимости $v(w)$ в элементарных функциях

В этом параграфе мы преобразуем системы дифференциальных уравнений (1) относительно функций $K(t)$ и $C(t)$ в систему дифференциальных уравнений относительно функций $v(t)$ и $w(t)$, определённых формулами (5). Полученная в результате этих преобразований система дифференциальных уравнений относительно функции v и w будет выглядеть проще, нежели система (1), но, в отличие от неё, окажется не автономной: в правых частях уравнений будут присутствовать множители, явно зависящие переменной t . Однако, в силу равенства (4) эти множители являются одинаковыми. Данное обстоятельство позволит вывести для зависимости $v(w)$ дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши для которого явно решается известными методами.

Перейдем к осуществлению изложенного плана. Согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \frac{d}{dt} (v(t)e^{-x_1 t}) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 v(t)e^{-x_1 t} = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) &= \frac{d}{dt} (w(t)e^{-x_2 t}) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 w(t)e^{-x_2 t} = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 C(t). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\dot{K}(t) + x_1 K(t) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t}, \quad \dot{C}(t) + x_2 C(t) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t}. \quad (12)$$

Из (12) заключаем, что после перехода от $K(t)$ и $C(t)$ к функциям $v(t)$ и $w(t)$ по формулам (5) система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v}e^{-x_1 t} = av^\alpha(t)e^{-\alpha x_1 t} - w(t)e^{-x_2 t}; \\ \dot{w}e^{-x_2 t} = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1}(t)w(t)e^{((1-\alpha)x_1 - x_2)t}. \end{cases} \quad (13)$$

После умножения первого уравнения системы (13) на $e^{x_1 t}$, а второго — на $e^{x_2 t}$ приходим к равносильной (4) системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = av^\alpha e^{x_1(1-\alpha)t} - we^{(x_1 - x_2)t}; \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1} we^{x_1(1-\alpha)t}. \end{cases} \quad (14)$$

Вследствие условия (4) величины $x_1(1 - \alpha)$ и $x_1 - x_2$ совпадают. Обозначим

$$x_1 - x_2 = x_1(1 - \alpha) = \varkappa > 0.$$

Ввиду сказанного, система уравнений (14), равносильная исходной системе (1) при ограничении (4), приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = (av^\alpha - w)e^{\varkappa t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha awv^{\alpha-1}e^{\varkappa t}. \end{cases} \quad (15)$$

Из системы (15) мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$. Поскольку мы рассматриваем только положительные решения и отправляемся от положительных начальных условий

$$v(0) = K_0, \quad w(0) = C_0$$

(они выполняются в силу (5), (6)), то обе части второго уравнения системы (15) положительны. Следовательно, деление первого уравнения системы (15) на второе корректно, и мы получаем

$$\frac{\dot{v}}{\dot{w}} = \frac{dv}{dt} : \frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dw} = \frac{av^\alpha - w}{\theta^{-1}\alpha awv^{\alpha-1}} = \frac{\theta}{\alpha} \frac{v}{w} - \frac{\theta}{\alpha a} v^{1-\alpha}, \quad (16)$$

причём, когда $w = C_0$, функция $v(w)$ принимает значение K_0 .

Мы пришли к задаче Коши для дифференциального уравнения (16), входящего в класс уравнений Бернулли. Такие уравнения решаются стандартными известными методами. Первый этап решения состоит в сведении уравнения (16) к линейному неоднородному уравнению. Это достигается введением новой функции, являющейся некоторой степенью функции v . В данном случае полагаем $y(w) = v^\alpha$. Тогда

$$v(w) = (y(w))^{1/\alpha}, \quad \frac{dv}{dw} = \frac{1}{\alpha} (y(w))^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{dy}{dw}. \quad (17)$$

Подставив выражения (17) для функции v и её производной по w через $y(w)$ и $y'(w)$ в уравнение (16), преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{\alpha} (y(w))^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{dy}{dw} = \frac{\theta}{\alpha} \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{w} - \frac{\theta}{\alpha a} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \iff \frac{dy}{dw} = \theta \frac{y}{w} - \frac{\theta}{a}.$$

Последнее уравнение является линейным неоднородным уравнением, для которого имеется начальное условие $y(C_0) = K_0^\alpha$. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$y(w) = z(w)w^\theta. \quad (18)$$

Поскольку согласно (18) имеем

$$y'(w) = z'(w)w^\theta + \theta z(w)w^{\theta-1} = z'(w)w^\theta + \theta \frac{y(w)}{w},$$

то из дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $y(w)$, мы получим следующее элементарно интегрируемое уравнение для функции $z(w)$:

$$z'(w)w^\theta = -\frac{\theta}{a} \iff z'(w) = -\frac{\theta}{a} w^{-\theta}, \quad (19)$$

А так как $z(w)$ удовлетворяет начальному условию $z(C_0) = K_0^\alpha C_0^{-\theta}$, то, интегрируя уравнение (19) находим

$$\begin{aligned} z(w) &= K_0^\alpha C_0^{-\theta} + \frac{\theta}{a} \cdot \frac{C_0^{1-\theta} - w^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta \neq 1, \\ z(w) &= \frac{K_0^\alpha}{C_0} + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{C_0}{w} \right), \quad \theta = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что $z(w)$ единообразно можно выразить через функцию полезности (3):

$$z(w) = K_0^\alpha C_0^{-\theta} + \frac{\theta}{a} \cdot (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)), \quad w \geq C_0.$$

(Поскольку функция $w(t)$ возрастает, а в начальной точке принимает значение, равное C_0 , то нас интересуют только значения $w \geq C_0$, и, следовательно, функции $z(w)$, $y(w)$, равно как зависимость v от w , мы рассматриваем только на луче $C_0 \leq w < +\infty$). Отсюда окончательно получаем

$$ay(w) \equiv av^\alpha = aK_0^\alpha \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)).$$

Последнее выражение, используя производственную функцию Кобба – Дугласа (2), можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$ay(w) \equiv f(v) = f(K_0) \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)). \quad (20)$$

Итогом рассмотрений данного параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Если экономические параметры, определяющие систему дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), связаны соотношением (4), то между функциями $v = v(t)$ и $w = w(t)$, выражающимися через $K(t)$ и $C(t)$ по формулам (5), имеется следующая зависимость:*

$$v = \left(K_0^\alpha \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \frac{\theta w^\theta}{a} (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)) \right)^{1/\alpha}.$$

3. Доказательство основного результата

Из первого уравнения системы (15) видно, что функция $v(t)$ имеет неотрицательную производную по переменной t тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$w \leq av^\alpha \iff w \leq f(v).$$

Согласно полученной выше зависимости (20) между функциями v и w , это неравенство записывается в следующей равносильной форме:

$$w \leq f(K_0) \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \theta w^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)). \quad (21)$$

Введём обозначение $u = w/C_0$. Из (21) видно, что нам следует решить неравенство

$$u \leq \frac{f(K_0)}{C_0} \cdot u^\theta + \theta C_0^{\theta-1} u^\theta (U_\theta(C_0) - U_\theta(uC_0)). \quad (22)$$

Сначала рассмотрим особый (и наиболее простой) случай $\theta = 1$. В этом случае после деления на u обеих частей неравенства (22) получаем

$$1 \leq \frac{f(K_0)}{C_0} + U_1(C_0) - U_1(uC_0) \iff U_1(uC_0) - U_1(C_0) \leq \frac{f(K_0)}{C_0} - 1.$$

Правая часть последнего неравенства, согласно (8), обозначена Δ , а ввиду (3) имеем $U_1(uC_0) - U_1(C_0) = \ln(uC_0) - \ln C_0 = \ln u$. Тем самым, мы вывели ограничение

$$\ln u \leq \Delta \iff u \leq e^\Delta \iff w \leq C_0 e^\Delta.$$

Неравенство (10) получено.

Пусть теперь $\theta \neq 1$. В результате применения обозначения (8) и расшифровки обозначения (3), неравенство (22) записывается следующим образом:

$$u \leq (1 + \Delta)u^\theta + \theta C_0^{\theta-1} u^\theta \cdot \frac{C_0^{1-\theta} - (uC_0)^{1-\theta}}{1-\theta} \iff u \leq u^\theta \left(1 + \Delta + \frac{\theta}{1-\theta} \right) - \frac{\theta}{1-\theta} \cdot u.$$

После несложных преобразований последнее неравенство принимает вид

$$\frac{u}{1-\theta} \leq \left(\frac{1}{1-\theta} + \Delta \right) u^\theta \iff \begin{cases} u^{1-\theta} \leq 1 + \Delta(1-\theta), & 0 < \theta < 1, \\ u^{1-\theta} \geq 1 - \Delta(\theta-1), & \theta > 1. \end{cases}$$

При $\theta \in (0; 1)$ имеем

$$u \leq (1 + \Delta(1-\theta))^{\frac{1}{1-\theta}},$$

что и означает справедливость неравенства (9). При $\theta > 1$ рассмотрим два случая. Если $\Delta \geq (\theta-1)^{-1}$, то $1 - \Delta(\theta-1) \leq 0$, и неравенство $u^{1-\theta} \geq 1 - \Delta(\theta-1)$ выполняется при любом $u > 0$. Таким образом, при $\Delta \geq (\theta-1)^{-1}$ наш метод не дает ограничений на значения u , а значит и на значения w . Если же $\Delta < (\theta-1)^{-1}$, то $1 - \Delta(\theta-1) > 0$ и, ввиду отрицательности степени $1-\theta$, имеем

$$u^{1-\theta} \geq 1 - \Delta(\theta-1) \iff u \leq (1 - \Delta(\theta-1))^{\frac{1}{1-\theta}},$$

что и требовалось доказать. Теорема 1 полностью доказана.

4. Заключение

Проделанное исследование имеет целью дать количественное выражение интуитивно очевидному принципу, состоящему в том, что успешный экономический рост невозможен, если уровень производства "значительно" не опережает уровень потребления. Но сколь значительным должно быть это опережение в начальный момент времени? Мы получили первые теоретически обоснованные результаты в данном направлении для экономических систем со стационарной функцией сбережения. Для того, чтобы дать оценку сверху максимально возможному уровню потребления в рассматриваемых нами экономических моделях, мы ввели численную характеристику начального состояния экономической системы, определяемую формулой (8), которую можно назвать относительным превышением значения производственной функции от начального капитала над начальным уровнем потребления. В терминах этой величины мы дали ограничения на то, во сколько раз может вырасти уровень потребления в процессе эволюции рассматриваемой экономической системы. Более того, мы указали границу, выше которой уровень потребления никак не может подняться, чтобы не нанести ущерб имеющемуся в рассматриваемой структуре экономическому ресурсу.

Полученное ограничение существенно зависит от выбранного в модели значения параметра θ ; это объясняется тем, что от параметра θ зависит норма валового сбережения $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$ (здесь f — производственная функция, в нашем случае функция Кобба–Дугласа), которая в стационарном состоянии (когда $\dot{K}(t) = \dot{C}(t) = 0$) в случае функции Кобба–Дугласа принимает вид:

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\rho + \theta x + \delta} = \frac{\alpha}{\theta} \cdot \frac{x_2}{x_1},$$

которая тем меньше, чем больше значение θ . Поэтому с увеличением значения θ ограничения на $C(t)$ делаются менее обременительными.

Статья ставит ряд вопросов. Отметим три из них.

1. Сколь окончательно полученные ограничения? Думается, что они допускают усиления.
2. Если $\theta > 0$, то при $\Delta \geq (\theta - 1)^{-1}$ наш метод ограничения на $C(t)$ не даёт. Должно ли оно быть?
3. Как трансформируются ограничения, если $x_2 \neq \alpha x_1$? Например, если разность $x_2 - \alpha x_1$ — очень малое положительное или отрицательное число.

Скажем несколько слов о перспективах развития теоремы 2. Нетрудно убедиться в том, что явное выражение функции v через w позволяет решить систему дифференциальных уравнений (15) в квадратурах, но получающиеся интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Поэтому для детального изучения поведения решений системы (15), т.е. функций $v(t)$ и $w(t)$, придётся применять к подынтегральным функциям методы теории приближений, аппроксимируя их функциями, интегралы от которых имеют достаточно простой вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея - Касса - Купманса в случае стационарной функции сбережения // Чебышевский сборник. 2021;22(2):501-509. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509>.
4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>.
5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.
6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начально-го экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019;20(4):188-196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
8. Rahul, Giri, 2018, “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model“, http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
9. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.
10. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
11. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.
12. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: <https://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>, 2010.
13. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.
14. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125-1152.
15. Paul H. Douglas. In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas // New York, Harcourt Brace Jovanovich. 1972.
16. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.
17. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf
18. Акаев А.А., Садовничий В.А. К вопросу о выборе математических моделей для описания динамики цифровой экономики // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 743-752.
19. Gómez, M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci., 94, 49-57, (2018)
20. Gómez, M. A., Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply. // Economics Letters 172, 89-92 (2018)

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth“, *Princeton: Princeton University Press*. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011. “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory“, *New York: Oxford University Press*. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2021, "Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey-Kass-Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 22(2), pp. 501-509. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509>.
4. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Optimal exponent in the Ramsey-Kass-Koopmans problem with logarithmic utility function", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 197-207. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>.
5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, "On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice", *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review*. vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.
6. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow*. pp. 87-88.
7. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
8. Rahul, Giri, 2018, "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model", http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
9. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, "Economic growth (2nd ed.)", *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, "Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)", *CESifo Working Paper Series No. 1701*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. "When Economic Growth is Less than Exponential", 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.
12. Groth, C. 2010, "Chapter 10: The Ramsey Model", Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>.
13. Romer, D. "Advanced Macroeconomics. 3rd ed", *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.
14. Robert J. Barro. 1999. "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model", *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.
15. Douglas, Paul H. 1972. "In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas", *New York, Harcourt Brace Jovanovich*.
16. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review*. vol. 83, September, pp. 908-931.
17. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, "Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model", *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf.

-
18. Akaev A.A., Sadovnichii V.A. 2019. "On the choice of mathematical models for describing the dynamics of digital economy" *Differential Equations*. 2019. vol. 55, no. 5. pp. 729-738.
 19. Gómez, M. A. 2018. "Economic growth and factor substitution with elastic labor supply" *Math. Social Sci.*, 94, pp. 49-57.
 20. Gómez, M. A. 2018. "Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply" *Economics Letters* 172, pp. 89-92.

Получено 3.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.