ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-83-105

Обобщённая проблема Дирихле для двумерной решётки приближений Дирихле¹

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва,
Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе изучается связь проблемы определения количества точек двумерной решётки приближений Дирихле в гиперболическом кресте и интегрального представления гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Введено понятие компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Найдено представление для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле через дзета-функцию Римана. Относительно первой компоненты установлен парадоксальный факт, что она непрерывна для любого иррационального β и разрывна во всех рациональных точках β . Это относится к зависимости только от параметра β .

Для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального значения $\beta = \frac{a}{b}$ получена асимптотическая формула для количества точек второй компоненты двумерной решётки приближений Дирихле в гиперболическом кресте. Полученная формула даёт интегральное представление в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$.

Основным инструментом исследований была формула суммирования Эйлера. Для целей работы необходимо было получить явные выражения остаточных членов в асимптотических формулах для числа точек классов вычетов двумерной решётки приближений Дирихле по растянутой фундаментальной решётке $b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

И теорема 1, и теорема 2, доказанные в работе, показывают наличие зависимости второго члена асимптотической формулы и вычета гиперболической дзета-функции решётки

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

$\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ от величины знаменателя b и независимости от числителя a . Ранее аналогичные эффекты были обнаружены А. Л. Рощеней для других обобщений проблемы Дирихле.

В работе поставлена задача об уточнении порядка остаточного члена в асимптотических формулах с помощью изучения величин

$$R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}.$$

Предлагается сначала изучить возможности элементарного метода И. М. Виноградова, а потом получить наиболее точные оценки с помощью метода тригонометрических сумм.

В работе намечены направления дальнейших исследований по данной тематике.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция Гурвица.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обобщённая проблема Дирихле для двумерной решётки приближений Дирихле // Чебышевский сборник. 2021. Т. 23, вып. 1, С. 83–105.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-83-105

Generalized Dirichlet problem for a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

²This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 _r_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

Abstract

The paper studies the relationship between the problem of determining the number of points of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in a hyperbolic cross and the integral representation of the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations. The concept of components of hyperbolic zeta-functions of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations is introduced. A representation is found for the first component of the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations via the Riemann zeta function. With respect to the first component, the paradoxical fact is established that it is continuous for any irrational β and discontinuous at all rational points of β . This refers to the dependency only on the β parameter.

For the second component of the hyperbolic zeta-function of the two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the case of a rational value $\beta = \frac{a}{b}$, an asymptotic formula is obtained for the number of points of the second component of the two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the hyperbolic cross. The resulting formula gives an integral representation in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$.

The main research tool was the Euler summation formula. For the purposes of the work, it was necessary to obtain explicit expressions of the residual terms in asymptotic formulas for the number of points of residue classes of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations over a stretched fundamental lattice $b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Both Theorem 1 and Theorem 2, proved in the paper, show the dependence of the second term of the asymptotic formula and the deduction of the hyperbolic zeta function of the lattice $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ depends on the magnitude of the denominator b and independence from the numerator a . Earlier, similar effects were discovered by A. L. Roscheney for other generalizations of the Dirichlet problem.

The paper sets the task of clarifying the order of the residual term in asymptotic formulas by studying the quantities

$$R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}.$$

It is proposed to first study the possibilities of the elementary method of I. M. Vinogradov, and then to obtain the most accurate estimates using the method of trigonometric sums. The paper outlines the directions of further research on this topic.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, Hurwitz zeta function.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

N. N. Dobvol'skii, M. N. Dobvol'skii, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobvol'skii, 2021, "Generalized Dirichlet problem for a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 83–105.

1. Введение

В работах [6] – [8] была решена проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки. В работах [5], [20] эта проблема нашла своё решение для случая гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки.

Уже случай двумерной решётки приближений Дирихле при иррациональном β не является декартовой решёткой.

В работе [9] было найдено удобное функциональное уравнение для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β .

Проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решётки тесно связана с проблемой определения количества точек решётки в гиперболическом кресте.

Цель настоящей работы — найти асимптотическую формулу для количества точек двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β .

2. Компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

Пусть у нас задано вещественное число $\beta > 0$. Рассмотрим решётку Дирихле диофантовых приближений $\Lambda(\beta)$, заданную равенством

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) \mid q, p \in \mathbb{Z}\}$$

с базисом $\vec{\lambda}_1 = (1, \beta)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, -1)$ и базисной матрицей $M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова решётка, в противном случае она не является декартовой решёткой. В любом случае она является унимодулярной решёткой.

Действительно, если $\beta = \frac{a}{b}$ — рациональное число, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, то получаем объединение b простейших декартовых решёток:

$$\Lambda\left(\frac{a}{b}\right) = \left\{ \left(q, q\frac{a}{b} - p \right) \mid q, p \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k=0}^{b-1} \left(\left(k, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right) = \bigcup_{k=0}^{b-1} (k + b\mathbb{Z}) \times \left(\left\{ \frac{ak}{b} \right\} + \mathbb{Z} \right). \quad (1)$$

Из разбиения (1) мы видим, что решётка приближений Дирихле при рациональном $\beta = \frac{a}{b}$ содержит целочисленную подрешётку $b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ индекса b и разбивается на b классов вычетов $(k, \left\{ \frac{ak}{b} \right\}) + b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, которые будем обозначать через $\Lambda\left(\frac{a}{b}, k\right)$.

Если $b = 1$, то для любого целого a решётка $\Lambda(a) = \mathbb{Z}^2$.

Заметим, что для любой решетки Дирихле диофантовых приближений $\Lambda(\beta)$ её гиперболический параметр $q(\Lambda(\beta)) = 1$. Действительно,

$$q(\Lambda(\beta)) = \min_{(q, q\beta - p) \neq (0,0)} \bar{q} \cdot \overline{q\beta - p} = \bar{1} \cdot \overline{\{\beta\}} = 1.$$

Нетрудно задать её взаимную решётку $\Lambda^*(\beta)$, которая определяется взаимным базисом $\vec{\lambda}_1^* = (1, 0)$, $\vec{\lambda}_2^* = (\beta, -1)$, базисной матрицей $M^*(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & -1 \end{pmatrix}$ и имеет вид:

$$\Lambda^*(\beta) = \{(q + p\beta, -p) \mid q, p \in \mathbb{Z}\} = \{(p - q\beta, q) \mid q, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что взаимная решётка $\Lambda^*(\beta)$ — унимодулярная и $q(\Lambda^*(\beta)) = 1$.

Решётка $\Lambda(\beta)$ переводится во взаимную решётку $\Lambda^*(\beta)$ с помощью унимодулярного линейного преобразования M , задаваемого матрицей

$$M = \begin{pmatrix} \beta^2 + 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме этого, унимодулярное линейное преобразование M_1 с матрицей $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ также переводит решётку $\Lambda(\beta)$ во взаимную решётку $\Lambda^*(\beta)$.

Гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(\beta)$ задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda(\beta) \mid \alpha) = \sum_{(q,p) \neq (0,0)} \frac{1}{(\bar{q}q\beta - p)^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

где $\bar{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x . Иногда её удобнее записать как сумму по всем точкам решётки:

$$\zeta_H(\Lambda(\beta) \mid \alpha) = -1 + \sum_{q,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\bar{q}q\beta - p)^\alpha} = -1 + \sum_{\nu=0}^2 \zeta_{H,\nu}(\Lambda(\beta) \mid \alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_{H,0}(\Lambda(\beta)|\alpha) &= \sum_{q,p=0}^{\infty} 1, \quad \zeta_{H,1}(\Lambda(\beta)|\alpha) = \sum_{q,p=-\infty, q \neq 0, |q\beta-p| < 1}^{\infty} \frac{1}{|q|^\alpha} + \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|p|^\alpha}, \\ \zeta_{H,2}(\Lambda(\beta)|\alpha) &= \sum_{q,p=-\infty, q \neq 0, |q\beta-p| \geq 1}^{\infty} \frac{1}{(|q||q\beta-p|)^\alpha}.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Величины $\zeta_{H,\nu}(\Lambda(\beta)|\alpha)$ ($\nu = 0, 1, 2$) назовём ν -тыми компонентами гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично, ν -тыми компонентами решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ назовём множества $\Lambda_\nu(\beta)$, заданные равенствами

$$\begin{aligned}\Lambda_0(\beta) &= \{(0, 0)\}, \quad \Lambda_1(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q \neq 0, |q\beta - p| < 1\} \cup \{(0, -p) | p \neq 0\}, \\ \Lambda_2(\beta) &= \{(q, q\beta - p) | q \neq 0, |q\beta - p| \geq 1\}.\end{aligned}$$

Аналогичное представлению (2), имеем представление для гиперболической дзета-функции взаимной решётки:

$$\zeta_H(\Lambda^*(\beta)|\alpha) = -1 + \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p - q\beta\bar{q})^\alpha} = -1 + \sum_{\nu=0}^2 \zeta_{H,\nu}(\Lambda^*(\beta)|\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_{H,0}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) &= \sum_{p,q=0}^{\infty} 1, \quad \zeta_{H,1}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) = \sum_{p,q=-\infty, q \neq 0, |p-q\beta| < 1}^{\infty} \frac{1}{|q|^\alpha} + \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|p|^\alpha}, \\ \zeta_{H,2}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) &= \sum_{p,q=-\infty, q \neq 0, |p-q\beta| \geq 1}^{\infty} \frac{1}{(|p-q\beta||q|)^\alpha}.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Величины $\zeta_{H,\nu}(\Lambda^*(\beta)|\alpha)$ ($\nu = 0, 1, 2$) назовём ν -тыми компонентами гиперболической дзета-функции взаимной двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично, ν -тыми компонентами взаимной решётки приближений Дирихле $\Lambda^*(\beta)$ назовём множества $\Lambda_\nu^*(\beta)$, заданные равенствами

$$\begin{aligned}\Lambda_0^*(\beta) &= \{(0, 0)\}, \quad \Lambda_1^*(\beta) = \{(p - q\beta, q) | q \neq 0, |p - q\beta| < 1\} \cup \{(p, 0) | p \neq 0\}, \\ \Lambda_2^*(\beta) &= \{(p - q\beta, q) | q \neq 0, |p - q\beta| \geq 1\}.\end{aligned}$$

Ясно, что унимодулярное линейное преобразование M_1 переводит каждую ν -тую компоненту решётки $\Lambda(\beta)$ в ν -тую компоненту взаимной решётки $\Lambda^*(\beta)$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\zeta_{H,1}(\Lambda(\beta)|\alpha) = \zeta_{H,1}(\Lambda^*(\beta)|\alpha) = \begin{cases} 6\zeta(\alpha), & \text{при иррациональном } \beta, \\ 4\zeta(\alpha), & \text{при целом } \beta, \\ (6 - \frac{2}{b^\alpha})\zeta(\alpha), & \text{при рациональном } \beta = \frac{a}{b}, b > 1. \end{cases} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если β иррациональное, то для первой компоненты решётки $\Lambda(\beta)$ справедливо представление

$$\begin{aligned}\Lambda_1(\beta) &= \{(q, \{q\beta\}) | q \geq 1\} \cup \{(q, \{q\beta\} - 1) | q \geq 1\} \cup \{(-q, \{-q\beta\}) | q \geq 1\} \cup \\ &\cup \{(-q, \{-q\beta\} - 1) | q \geq 1\} \cup \{(0, -p) | p \geq 1\} \cup \{(0, p) | p \geq 1\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует первое равенство для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично, доказывается этот случай для взаимной решётки.

$$\Lambda_1^*(\beta) = \{(-\{q\beta\}, q) | q \geq 1\} \cup \{(-\{q\beta\} + 1, q) | q \geq 1\} \cup \{(-\{-q\beta\}, -q) | q \geq 1\} \cup \\ \cup \{(-\{-q\beta\} + 1, -q) | q \geq 1\} \cup \{(-p, 0) | p \geq 1\} \cup \{(p, 0) | p \geq 1\}.$$

Рассмотрим случай β — целое число. В этом случае, как было показано выше, $\Lambda(\beta) = \mathbb{Z}^2$. Отсюда сразу следует, что

$$\Lambda_1(\beta) = \Lambda_1^*(\beta) = \mathbb{Z}_1^2 = \{(q, 0) | q \geq 1\} \cup \{(-q, 0) | q \geq 1\} \cup \{(0, -p) | p \geq 1\} \cup \{(0, p) | p \geq 1\}.$$

Отсюда следует второе равенство для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле и для первой компоненты гиперболической дзета-функции взаимной решётки.

Пусть теперь $\beta = \frac{a}{b}$ — рациональное, $(a, b) = 1$, тогда для первой компоненты решётки $\Lambda(\beta)$ справедливо представление

$$\Lambda_1\left(\frac{a}{b}\right) = \left\{ \left(q, \left\{ q \frac{a}{b} \right\} \right) \mid q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \left\{ \left(q, \left\{ q \frac{a}{b} \right\} - 1 \right) \mid q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(-q, \left\{ -q \frac{a}{b} \right\} \right) \mid q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \left\{ \left(-q, \left\{ -q \frac{a}{b} \right\} - 1 \right) \mid q \geq 1, q \not\equiv 0 \pmod{b} \right\} \cup \\ \cup \{(qb, 0) | q \geq 1\} \cup \{(-qb, 0) | q \geq 1\} \cup \{(0, -p) | p \geq 1\} \cup \{(0, p) | p \geq 1\}.$$

Отсюда следует третье равенство для первой компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле. Аналогично доказывается этот случай для взаимной решётки. $\square$

Из доказанной леммы следует, что первая компонента гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле равна первой компоненте гиперболической дзета-функции взаимной решётки и они обе являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, в которой у них полюс первого порядка.

Относительно первой компоненты получаем парадоксальный факт, что она непрерывна для любого иррационального β и разрывна во всех рациональных точках β . Это относится к зависимости только от параметра β .

3. Вспомогательные леммы

Нам потребуются следующие обозначения:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du = \frac{\{x\} - \{x\}^2}{2}, \quad r(\delta) = \frac{1}{2} - \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2}, \\ I(T, \delta) = \int_T^\infty \frac{2\sigma(x - \delta)}{x^3} dx, \quad R_1(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\}, \quad R_2(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\}, \\ R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}; \\ S_1(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[\frac{T}{bq} - \delta \right], \quad S_2(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left[\frac{T}{bp + b\delta} \right], \quad S_3(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{T}{b+b\delta}} \left[\frac{T}{bq} - \delta \right].$$

Очевидно, что

$$R_1(T, b, \delta) = O\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right), R_1^*(T, b, \delta) = O\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right), R_2^*(T, b, \delta) = O(\sqrt{T}), R_2(T, b, \delta) = O(\sqrt{T}).$$

ЛЕММА 2. Для произвольного $\delta \geq 0$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\{ \delta - \frac{k}{b} \right\} = \frac{b-1}{2} + \{b\delta\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c = [b\{\delta\}]$, $\theta = \{b\delta\}$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{b-1} \left\{ \delta - \frac{k}{b} \right\} &= \sum_{k=1}^{b-1} \left\{ \frac{c+\theta}{b} - \frac{k}{b} \right\} = \sum_{k=0}^c \left(\frac{c+\theta}{b} - \frac{k}{b} \right) + \sum_{k=c+1}^{b-1} \left(\frac{c+\theta}{b} - \frac{k}{b} + 1 \right) = \\ &= \frac{(c+\theta)b}{b} - \frac{b-1}{2} + b-1-c = \frac{b-1}{2} + \{b\delta\}. \end{aligned}$$

□

Приведём без доказательства формулу суммирования Эйлера (см. [15], стр. 10, или [2], стр. 33).

ЛЕММА 3. Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$, тогда

$$\sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx.$$

□

Мы неоднократно будем использовать известную асимптотическую формулу (см. [3], стр. 108)

$$\sum_{q=1}^X \frac{1}{q} = \ln X + \gamma - \frac{\theta(X)}{X}, \quad -1 < \theta(X) < 2,$$

где γ — константа Эйлера.

Для дальнейшего потребуется более общая лемма, которая в близкой формулировке встречается в малодоступных работах А. Л. Рощени [16]–[19].

ЛЕММА 4. При $0 < \delta < 1$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p=1}^{T-\delta} \frac{1}{p+\delta} = \ln T + \frac{\rho(T-\delta)}{T} + \frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} + r(\delta) + I(1, \delta) - I(T, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя формулу суммирования Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{T-\delta} \frac{1}{p+\delta} &= \sum_{0 < p \leq T-\delta} \frac{1}{p+\delta} = \int_0^{T-\delta} \frac{dx}{x+\delta} + \frac{\rho(T-\delta)}{T} - \frac{\rho(0)}{\delta} - \left(-\frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} \right) + \left(-\frac{\sigma(0)}{\delta^2} \right) + \\ &+ \int_0^{T-\delta} \frac{2\sigma(x)}{(x+\delta)^3} dx = \ln T - \ln \delta + \frac{\rho(T-\delta)}{T} - \frac{1}{2\delta} + \frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} + \int_{\delta}^1 \frac{2\sigma(x-\delta)}{x^3} dx + I(1, \delta) - I(T, \delta). \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 \frac{2\sigma(x)}{x^3} dx &= \int_{\delta}^1 \frac{x - \delta - x^2 + 2x\delta - \delta^2}{x^3} dx = \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)(1 + 2\delta) + \ln \delta - \\ &- \frac{\delta + \delta^2}{2} \left(\frac{1}{\delta^2} - 1\right) = \ln \delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta} - \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \ln \delta + \frac{1}{2\delta} + r(\delta). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p=1}^{T-\delta} \frac{1}{p+\delta} = \ln T + \frac{\rho(T-\delta)}{T} + \frac{\sigma(T-\delta)}{T^2} + r(\delta) + I(1, \delta) - I(T, \delta).$$

□

ЛЕММА 5. *Справедливо неравенство $0 < I(T, \delta) < \frac{1}{8T^2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$0 \leq \{x - \delta\} - \{x - \delta\}^2 \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < \int_T^{\infty} \frac{\{x - \delta\} - \{x - \delta\}^2}{x^3} dx < \frac{1}{4} \int_T^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8T^2}.$$

□

Заметим, что при $\delta = 0$ получаем уточнение известной асимптотической формулы

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^X \frac{1}{p} &= \ln X + \frac{\frac{1}{2} - \{X\}}{X} + \frac{\{X\} - \{X\}^2}{2X^2} + \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx - \int_X^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx = \\ &= \ln X + \gamma - \frac{\theta(X)}{X}, \quad -1 < \theta(X) < 2, \end{aligned}$$

так как

$$\gamma = \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx, \quad -\frac{5}{8} < \frac{1}{2} - \{X\} + \frac{\{X\} - \{X\}^2}{2X} - X \int_X^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx < \frac{5}{8}.$$

ЛЕММА 6. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned} S_1(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} \left(\frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1) - \sqrt{T}}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \\ &- R_1^*(T, b, \delta) - \delta \cdot \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя лемму 4 при $\delta = 0$ получим:

$$\begin{aligned}
S_1(T, b, \delta) &= \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[\frac{T}{bq} - \delta \right] = \frac{T}{b} \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \frac{1}{q} - \delta \cdot \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] - \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} = -\delta \cdot \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] + \\
&+ \frac{T}{b} \left(\frac{1}{2} \ln T - \ln b + \frac{b \cdot \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \right)}{\sqrt{T}} + \frac{b^2 \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right)}{T} + \gamma - I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) \right) - R_1(T, b, \delta) = \\
&= \frac{T}{b} \left(\frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}}{2} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - R_1(T, b, \delta) - \\
&-\delta \cdot \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] = \frac{T}{b} \left(\frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \\
&\quad - R_1^*(T, b, \delta) - \delta \cdot \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right].
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 7. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned}
S_2(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} \left(\frac{\ln T}{2} + r(\delta) + I(1, \delta) \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, \delta) - \\
&\quad - R_2^*(T, b, \delta).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя лемму 4 получим:

$$\begin{aligned}
S_2(T, b, \delta) &= \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left[\frac{T}{bp + b\delta} \right] = \frac{T}{b} \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \frac{1}{p + \delta} - \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} = -R_2(T, b, \delta) + \\
&+ \frac{T}{b} \left(\frac{\ln T}{2} + \frac{\rho(\sqrt{T} - \delta)}{\sqrt{T}} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{T} + r(\delta) + I(1, \delta) - I(\sqrt{T}, \delta) \right) = -R_2^*(T, b, \delta) + \\
&+ \frac{T}{b} \left(\frac{\ln T}{2} + r(\delta) + I(1, \delta) \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} I(\sqrt{T}, \delta).
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 8. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned}
S_3(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} (\ln T - \ln b + \gamma - 1 + r(\delta) + I(1, \delta)) + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - R_1^*(T, b, \delta) - R_2^*(T, b, \delta) - \\
&\quad - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} \cdot \left(I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I(\sqrt{T}, \delta) \right).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применяя разбиение Дирихле из проблемы делителей Дирихле, получим

$$\begin{aligned}
S_3(T, b, \delta) &= \sum_{q=1}^{\frac{T}{b+b\delta}} \left[\frac{T}{bq} - \delta \right] = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[\frac{T}{bq} - \delta \right] + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left[\frac{T}{bp + b\delta} \right] - \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left[\sqrt{T} - \delta \right] = \\
&= S_1(T, b, \delta) + S_2(T, b, \delta) - \frac{T}{b} + \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] \cdot \delta + \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T}.
\end{aligned}$$

По леммам 6 и 7 имеем:

$$\begin{aligned}
 S_3(T, b, \delta) &= \frac{T}{b} \left(\frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \\
 -R_1^*(T, b, \delta) - \delta \cdot \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] + \frac{T}{b} \left(\frac{\ln T}{2} + r(\delta) + I(1, \delta) \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \\
 - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, \delta) - R_2^*(T, b, \delta) - \frac{T}{b} + \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] \cdot \delta + \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T} = \\
 = \frac{T}{b} (\ln T - \ln b + \gamma - 1 + r(\delta) + I(1, \delta)) + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \frac{T}{b} \cdot I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - R_1^*(T, b, \delta) - \\
 - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \delta \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T} - \delta)}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, \delta) - R_2^*(T, b, \delta).
 \end{aligned}$$

□

4. Обобщенная проблема Дирихле двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального параметра

В соответствие с разбиением (1) получаем разбиение второй компоненты решётки $\Lambda_2 \left(\frac{a}{b} \right)$ на вторые компоненты классов вычетов $\Lambda_2 \left(\frac{a}{b}, k \right)$, которые задаются равенствами

$$\Lambda_2 \left(\frac{a}{b}, k \right) = \left\{ \left(bq + k, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} - p \right) \mid bq + k \neq 0, \left| \left\{ \frac{ak}{b} \right\} - p \right| \geq 1 \right\}, \quad (k = 0, \dots, b-1).$$

Таким образом, имеем:

$$\Lambda_2 \left(\frac{a}{b} \right) = \bigcup_{k=0}^{b-1} \Lambda_2 \left(\frac{a}{b}, k \right).$$

Если $D_2 \left(T \mid \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right)$ — количество точек второй компоненты двумерной решётки приближений Дирихле $\Lambda \left(\frac{a}{b} \right)$ в гиперболическом кресте $K_2(T)$, а $D_2 \left(T \mid \Lambda \left(\frac{a}{b}, k \right) \right)$ — количество точек второй компоненты класса вычетов $\Lambda_2 \left(\frac{a}{b}, k \right)$ в гиперболическом кресте $K_2(T)$, то справедливо равенство

$$D_2 \left(T \mid \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right) = \sum_{k=0}^{b-1} D_2 \left(T \mid \Lambda \left(\frac{a}{b}, k \right) \right). \tag{5}$$

Естественно, что обобщённой проблемой Дирихле для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального параметра называется проблема подсчёта точек второй компоненты решётки в гиперболическом кресте.

Начнём изучение со случая $b = 1$.

ЛЕММА 9. *Для любого целого a , $a \neq 0$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
 D_2(T \mid \Lambda(a)) &= D_2(T \mid \mathbb{Z}^2) = 4T \ln T + 4(2\gamma - 1)T + \Delta(T), \\
 \Delta(T) &= -8R_1^*(T, 1, 0) + 4 \left\{ \sqrt{T} \right\} - 8 \left\{ \sqrt{T} \right\}^2 - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0) = O \left(\sqrt{T} \right),
 \end{aligned}$$

где γ — константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения величины $D_2(T|\mathbb{Z}^2)$ имеем:

$$D_2(T|\mathbb{Z}^2) = \sum_{|q|, |p| \geq 1, 1 \leq |q||p| \leq T} 1 = 4 \sum_{q=1}^T \sum_{p=1}^{\frac{T}{q}} 1 = 4 \sum_{q=1}^T \left[\frac{T}{q} \right].$$

Применим разбиение Дирихле из проблемы делителей Дирихле, получим

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 4 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left[\frac{T}{q} \right] + 4 \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left[\frac{T}{p} \right] - 4 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} 1 = 8S_1(T, 1, 0) - 4(\sqrt{T} - \{\sqrt{T}\})^2.$$

По лемме 6 имеем:

$$S_1(T, 1, 0) = T \cdot \left(\frac{1}{2} \ln T + \gamma \right) - \sqrt{T} \{\sqrt{T}\} + \sigma(\sqrt{T}) - T \cdot I(\sqrt{T}, 0) - R_1^*(T, 1, 0).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D_2(T|\Lambda(\beta)) &= 4T \ln T + 4(2\gamma - 1)T + \Delta(T), \\ \Delta(T) &= -8R_1^*(T, 1, 0) + 8\sqrt{T} \{\sqrt{T}\} - 4 \{\sqrt{T}\}^2 - 8\sqrt{T} \{\sqrt{T}\} + 4 \{\sqrt{T}\} - 4 \{\sqrt{T}\}^2 - \\ &\quad - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0) = -8R_1^*(T, 1, 0) + 4 \{\sqrt{T}\} - 8 \{\sqrt{T}\}^2 - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0). \end{aligned}$$

В силу леммы 5 имеем:

$$-5 < 4 \{\sqrt{T}\} - 8 \{\sqrt{T}\}^2 - 8T \cdot I(\sqrt{T}, 0) < \frac{1}{2},$$

поэтому $\Delta(T) = -8R_1^*(T, 1, 0) + O(1) = O(\sqrt{T})$. $\square$

ЛЕММА 10. Для рационального $\beta = \frac{a}{b}$, $b > 1$, $(a, b) = 1$ и целого k , $0 \leq k \leq b - 1$ при $T > b^2$ справедливы равенства:

при $k = 0$

$$\begin{aligned} D_2\left(T \left| \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right.\right) &= \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \Delta\left(T, \frac{a}{b}, 0\right), \\ \Delta\left(T, \frac{a}{b}, 0\right) &= -4(R_1^*(T, b, 0) + R_2^*(T, b, 0)) - 4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \{\sqrt{T}\} + \frac{4\sigma(\sqrt{T}) + 4b^2\sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right)}{b} - \\ &\quad - \frac{4T}{b} \left(I(\sqrt{T}, 0) + I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) \right) = O(\sqrt{T}), \end{aligned}$$

при $k = 1, \dots, b - 1$

$$\begin{aligned} D_2\left(T \left| \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right.\right) &= \frac{2T}{b} \left(2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r\left(\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(1, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + \right. \\ &\quad \left. + r\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(1, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) + \Delta\left(T, \frac{a}{b}, k\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\left(T, \frac{a}{b}, k\right) = \\
& = -2\left(R_1^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_2^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_1^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_2^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)\right) + \\
& + 4\left(b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) + \frac{\sigma\left(\sqrt{T} - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)}{b}\right) - \frac{2T}{b} \cdot \left(2I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) + I\left(\sqrt{T}, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(\sqrt{T}, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)\right) - \\
& - 2\left(\left\{\frac{\sqrt{T}}{b}\right\} \left\{\sqrt{T} - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right\} + \left\{\frac{\sqrt{T}}{b}\right\} \left\{\sqrt{T} - 1 + \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right\}\right),
\end{aligned}$$

где γ — константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Для $\Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right) = b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ имеем:

$$D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right) = 4 \sum_{q=1}^{\frac{T}{b}} \left[\frac{T}{bq} \right].$$

Чтобы получить нужную асимптотическую формулу, применим разбиение Дирихле, получим:

$$\begin{aligned}
D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right) & = 4 \left(\sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left[\frac{T}{bq} \right] + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left[\frac{T}{bp} \right] - \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] \left[\sqrt{T} \right] \right) = \\
& = 4 \left(S_1(T, b, 0) + S_2(T, b, 0) - \frac{T}{b} \right) + 4 \left(\left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T} + \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} \right).
\end{aligned}$$

По леммам 6 и 7 имеем:

$$\begin{aligned}
S_1(T, b, 0) & = \frac{T}{b} \left(\frac{1}{2} \ln T - \ln b + \gamma \right) + \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) - \frac{T}{b} \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \\
& - R_1^*(T, b, 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2(T, b, 0) & = \frac{T}{b} \left(\frac{\ln T}{2} + \gamma \right) - \frac{\sqrt{T}(b-1)}{2b} - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T})}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, 0) - \\
& - R_2^*(T, b, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}, 0\right)\right) & = \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \Delta\left(T, \frac{a}{b}, 0\right), \\
\Delta\left(T, \frac{a}{b}, 0\right) & = -4(R_1^*(T, 1, 0) + R_2^*(T, b, 0)) + 4 \left(\left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sqrt{T} + \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} \right) + \\
& + 4 \left(-\sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} + b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) - \frac{T}{b} \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{\sqrt{T}}{b} \left\{ \sqrt{T} \right\} + \frac{\sigma(\sqrt{T})}{b} - \frac{T}{b} \cdot I(\sqrt{T}, 0) \right) = \\
& = -4(R_1^*(T, 1, 0) + R_2^*(T, b, 0)) - 4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} \right\} + 4 \left(b \cdot \sigma\left(\frac{\sqrt{T}}{b}\right) + \frac{\sigma(\sqrt{T})}{b} \right) - \\
& - \frac{4T}{b} \left(I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) + I(\sqrt{T}, 0) \right).
\end{aligned}$$

Пусть теперь $1 \leq k \leq b-1$, тогда $0 < \left\{ \frac{ak}{b} \right\} < 1$ и

$$\begin{aligned} D_2 \left(T \mid \Lambda \left(\frac{a}{b}, k \right) \right) &= 2 \left(\sum_{q=1}^{\left\lfloor \frac{T}{b+b\left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\rfloor} \left[\frac{T}{bq} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right] + \sum_{q=1}^{\left\lfloor \frac{T}{2b-b\left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\rfloor} \left[\frac{T}{bq} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right] \right) = \\ &= 2 \left(S_3 \left(T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + S_3 \left(T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\begin{aligned} D_2 \left(T \mid \Lambda \left(\frac{a}{b}, k \right) \right) &= 2 \left(\frac{T}{b} \left(\ln T - \ln b + \gamma - 1 + r \left(\left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - \right. \\ &\quad \left. - R_1^* \left(T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - R_2^* \left(T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \frac{\sigma \left(\sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{T}{b} \cdot \left(I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left(\sqrt{T}, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \frac{T}{b} \left(\ln T - \ln b + \gamma - 1 + r \left(1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) - R_1^* \left(T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - R_2^* \left(T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma \left(\sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} - \frac{T}{b} \cdot \left(I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left(\sqrt{T}, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{2T}{b} \left(2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r \left(\left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + r \left(1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) - \\ &\quad - 2 \left(R_1^* \left(T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_2^* \left(T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_1^* \left(T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_2^* \left(T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) + \\ &\quad + 4 \left(b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma \left(\sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} \right) - \frac{2T}{b} \cdot \left(2I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left(\sqrt{T}, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(\sqrt{T}, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) - \\ &\quad - 2 \left(\left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} \right). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 11. Для $Mm \left(T, \frac{a}{b} \right)$, заданного равенством

$$\begin{aligned} Mm \left(T, \frac{a}{b} \right) &= \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{2T}{b} \left(2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r \left(\left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + \right. \\ &\quad \left. + I \left(1, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + r \left(1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(1, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) \end{aligned}$$

справедливо равенство

$$Mm \left(T, \frac{a}{b} \right) = 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) = \frac{4T}{b} (\ln T - \ln b + 2\gamma - 1) + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{2T}{b} \left(2 \ln T - 2 \ln b + 2\gamma - 2 + r\left(\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + \right. \\ \left. + I\left(1, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + r\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(1, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) = 4T \ln T - 4T \ln b + \frac{4T(b+1)}{b} (\gamma - 1) + \\ + \frac{4T}{b} (R(T, b) + J(T, b)),$$

где

$$R(T, b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left(r\left(\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + r\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right), \quad J(T, b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left(I\left(1, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(1, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right).$$

Так как $(a, b) = 1$, то

$$R(T, b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left(r\left(\left\{\frac{k}{b}\right\}\right) + r\left(1 - \left\{\frac{k}{b}\right\}\right) \right) = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{3k}{2b} + \frac{k^2}{2b^2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{k}{b}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{b}\right)^2 \right) = \\ = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\frac{k}{b} + \frac{k^2}{b^2} \right) = \frac{b-1}{2} + \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} = \frac{(b-1)(5b-1)}{6b}. \\ J(T, b) - 2I(1, 0) = \int_1^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{x - \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - \frac{k}{b}\right\}^2 + \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\}^2 \right)}{x^3} dx$$

Положим $y = [bx]$, тогда $x = \frac{y}{b} + \frac{\{bx\}}{b}$ и

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{x - \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - \frac{k}{b}\right\}^2 + \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - 1 + \frac{k}{b}\right\}^2 \right) = \\ = \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{\frac{y-k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} - \left(\left\{\frac{y-k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} \right)^2 + \left\{\frac{y+k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} - \left(\left\{\frac{y+k}{b}\right\} + \frac{\{bx\}}{b} \right)^2 \right) = \\ = \frac{2}{b} \sum_{k=0}^{b-1} \left(k + \{bx\} - \frac{(k + \{bx\})^2}{b} \right) = b - 1 + 2\{bx\} - \frac{(b-1)(2b-1)}{3b} - \frac{2(b-1)}{b} \{bx\} - \frac{2}{b} \{bx\}^2 = \\ = \frac{b^2 - 1}{3b} + \frac{2}{b} (\{bx\} - \{bx\}^2).$$

Отсюда следует, что

$$J(T, b) - 2I(1, 0) = \int_1^{\infty} \frac{\frac{b^2-1}{3b} + \frac{2}{b} (\{bx\} - \{bx\}^2)}{x^3} dx = \frac{b^2-1}{6b} + \frac{2}{b} \int_1^{\infty} \frac{\{bx\} - \{bx\}^2}{x^3} dx = \frac{b^2-1}{6b} + \\ + \frac{2}{b} \int_b^{\infty} \frac{\{t\} - \{t\}^2}{\left(\frac{t}{b}\right)^3} d\frac{t}{b} = \frac{b^2-1}{6b} + 2bI(b, 0).$$

Таким образом, имеем:

$$R(T, b) + J(T, b) = \frac{(b-1)(5b-1)}{6b} + 2I(1, 0) + \frac{b^2-1}{6b} + 2bI(b, 0) = b - 1 + 2I(1, 0) + 2bI(b, 0) = \\ = b - 2 + 2\gamma + 2bI(b, 0).$$

Отсюда окончательно для $Mm\left(T, \frac{a}{b}\right)$ получим:

$$\begin{aligned} Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) &= 4T \ln T - 4T \ln b + \frac{4T(b+1)}{b}(\gamma - 1) + \frac{4T}{b}(b - 2 + 2\gamma + 2bI(b, 0)) = \\ &= 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left(\frac{2b-1}{b}\gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 12. Для $R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right)$, заданного равенством

$$R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(R_1^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_1^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right)$$

справедливо равенство

$$R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2 \frac{\sqrt{T}}{b} + 2 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} (b-1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(R_1^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_1^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) = \\ &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(\sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} + \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - 1 + \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} \right) = \\ &= -2 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{ \frac{T}{bq} - \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} + \left\{ \frac{T}{bq} - 1 + \left\{\frac{ak}{b}\right\} \right\} \right) + 2\sqrt{T} = \\ &= -2 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{ \frac{\left[\frac{T}{q}\right] + \left\{\frac{T}{q}\right\} - k}{b} \right\} + \left\{ \frac{\left[\frac{T}{q}\right] + \left\{\frac{T}{q}\right\} + k}{b} \right\} \right) + 2\sqrt{T} = \\ &= -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \left(\frac{k}{b} + \frac{\left\{\frac{T}{q}\right\}}{b} \right) + 2\sqrt{T} = -2 \left[\frac{\sqrt{T}}{b} \right] (b-1) - 4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2\sqrt{T} = \\ &= -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2 \frac{\sqrt{T}}{b} + 2 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} (b-1). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 13. Для $R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right)$, заданного равенством

$$R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(R_2^*\left(T, b, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + R_2^*\left(T, b, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right)$$

справедливо равенство

$$R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} + 2b\sqrt{T}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} R_2^* \left(T, \frac{a}{b} \right) &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(R_2^* \left(T, b, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + R_2^* \left(T, b, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right) = \\ &= -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(\sum_{p=1}^{\sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \left\{ \frac{T}{bp + b \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2} + \sum_{p=1}^{\sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \left\{ \frac{T}{bp + b - b \left\{ \frac{ak}{b} \right\}} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2} \right) = \\ &= -4 \sum_{k=0}^{b-1} \sum_{p=1}^{\sqrt{T} - \frac{k}{b}} \left\{ \frac{T}{bp + k} \right\} + 2b\sqrt{T} = -4 \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} + 2b\sqrt{T}. \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 14. Для $S\sigma \left(T, \frac{a}{b} \right)$, заданного равенством

$$S\sigma \left(T, \frac{a}{b} \right) = 4 \sum_{k=0}^{b-1} \left(b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma \left(\sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} \right)$$

справедливо равенство

$$S\sigma \left(T, \frac{a}{b} \right) = 4b^2 \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{b^2 - 1}{3b^2} + 2 \frac{\{b\sqrt{T}\} - \{b\sqrt{T}\}^2}{b^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} S\sigma \left(T, \frac{a}{b} \right) &= 4 \sum_{k=0}^{b-1} \left(b \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma \left(\sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)}{b} \right) = 4b^2 \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{4}{b} \sum_{k=0}^{b-1} \sigma \left(\sqrt{T} - \frac{k}{b} \right). \\ 2 \sum_{k=0}^{b-1} \sigma \left(\sqrt{T} - \frac{k}{b} \right) &= \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{ \frac{[b\sqrt{T}] + \{b\sqrt{T}\} - k}{b} \right\} - \left\{ \frac{[b\sqrt{T}] + \{b\sqrt{T}\} - k}{b} \right\}^2 \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{b-1} \left(\frac{k}{b} + \frac{\{b\sqrt{T}\}}{b} - \left(\frac{k}{b} + \frac{\{b\sqrt{T}\}}{b} \right)^2 \right) = \frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} - \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} - \frac{b-1}{b} \{b\sqrt{T}\} - \\ &\quad - \frac{\{b\sqrt{T}\}^2}{b} = \frac{b^2 - 1}{6b} + \frac{\{b\sqrt{T}\} - \{b\sqrt{T}\}^2}{b}. \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 15. Для $SI \left(T, \frac{a}{b} \right)$, заданного равенством

$$SI \left(T, \frac{a}{b} \right) = -\frac{2T}{b} \cdot \sum_{k=0}^{b-1} \left(2I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I \left(\sqrt{T}, \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) + I \left(\sqrt{T}, 1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right) \right)$$

справедливо равенство

$$SI \left(T, \frac{a}{b} \right) = -4TI \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3b^2} - 4T \cdot I(b\sqrt{T}, 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
SI\left(T, \frac{a}{b}\right) &= -\frac{2T}{b} \cdot \sum_{k=0}^{b-1} \left(2I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) + I\left(\sqrt{T}, \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) + I\left(\sqrt{T}, 1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right) \right) = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \\
&\quad - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{b-1} \left\{x - \frac{k}{b}\right\} - \left\{x - \frac{k}{b}\right\}^2}{x^3} dx = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{b-1} \frac{k + \{bx\}}{b} - \left(\frac{k + \{bx\}}{b}\right)^2}{x^3} dx = \\
&= -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\frac{b-1}{2} + \{bx\} - \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} - \frac{(b-1)\{bx\}}{b} - \frac{\{bx\}^2}{b}}{x^3} dx = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \\
&\quad - \frac{4T}{b} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\frac{b^2-1}{6b} + \frac{\{bx\} - \{bx\}^2}{b}}{x^3} dx = -4T \cdot I\left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0\right) - \frac{b^2-1}{3b^2} - 4T \int_{b\sqrt{T}}^{\infty} \frac{\{x\} - \{x\}^2}{x^3} dx.
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 16. Для $SD\left(T, \frac{a}{b}\right)$, заданного равенством

$$SD\left(T, \frac{a}{b}\right) = -2 \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ \sqrt{T} - 1 + \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right\} \right)$$

справедливо равенство

$$SD\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left(\frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$SD\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{k + \{b\sqrt{T}\}}{b} = -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left(\frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} \right).$$

□

ТЕОРЕМА 1. Справедливо асимптотическое равенство

$$D_2\left(T \mid \Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\right) = Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) + R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) + R_2^*\left(T, \frac{a}{b}\right) + S\sigma\left(T, \frac{a}{b}\right) + SI\left(T, \frac{a}{b}\right) + SD\left(T, \frac{a}{b}\right),$$

где

$$Mm\left(T, \frac{a}{b}\right) = 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right),$$

$$R_1^*\left(T, \frac{a}{b}\right) = -4 \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} + 2 \frac{\sqrt{T}}{b} + 2 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} (b-1),$$

$$\begin{aligned}
 R_2^* \left(T, \frac{a}{b} \right) &= -4 \sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} + 2b\sqrt{T}, \\
 S\sigma \left(T, \frac{a}{b} \right) &= 4b^2 \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{b^2 - 1}{3b^2} + 2 \frac{\{b\sqrt{T}\} - \{b\sqrt{T}\}^2}{b^2}, \\
 SI \left(T, \frac{a}{b} \right) &= -4T \cdot I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3b^2} - 4T \cdot I(b\sqrt{T}, 0), \\
 SD \left(T, \frac{a}{b} \right) &= -4 \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left(\frac{b-1}{2} + \{b\sqrt{T}\} \right).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (5) и лемм 10–16 следует утверждение теоремы. $\square$

5. Интегральное представление для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

По теореме Абеля вторую компоненту гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_{H,2}(\Lambda(\beta)|\alpha) = \alpha \int_1^\infty \frac{D_2(t|\Lambda(\beta))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где $D_2(T|\Lambda(\beta))$ — количество точек второй компоненты двумерной решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ в гиперболическом кресте $K_2(T)$. Гиперболический крест $K_2(T)$ задается равенством

$$K_2(T) = \{(x, y) | \bar{x} \cdot \bar{y} \leq T\}.$$

ЛЕММА 17. Для иррационального β справедливо равенство

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 4T \ln T + 2(4\gamma - 3 + \theta(T))T + O(\sqrt{T}),$$

где γ — константа Эйлера и $\frac{1}{6} \leq \theta(T) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения величины $D_2(T|\Lambda(\beta))$ имеем:

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = \sum_{|q\beta-p| \geq 1, 1 \leq |q| |q\beta-p| \leq T} 1 = 2 \sum_{q=1}^T \sum_{1 \leq |q\beta-p| \leq \frac{T}{q}} 1 = 2 \sum_{q=1}^T \left(\sum_{p=1}^{\frac{T}{q} - \{q\beta\}} 1 + \sum_{p=1}^{\frac{T}{q} - 1 + \{q\beta\}} 1 \right).$$

Применим разбиение Дирихле из проблемы делителей Дирихле, получим

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left(\sum_{p=1}^{\frac{T}{q} - \{q\beta\}} 1 + \sum_{p=1}^{\frac{T}{q} - 1 + \{q\beta\}} 1 \right) + 2 \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left(\sum_{q \geq 1, q(p + \{q\beta\}) \leq T} 1 + \sum_{q \geq 1, q(p + 1 - \{q\beta\}) \leq T} 1 \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left(\sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\{q\beta\}} 1 + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-1+\{q\beta\}} 1 \right) = 2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left(\frac{T}{q} - \{q\beta\} - \left\{ \frac{T}{q} - \{q\beta\} \right\} + \frac{T}{q} - 1 + \{q\beta\} - \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{T}{q} - 1 + \{q\beta\} \right\} \right) - 2 \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \left(\sqrt{T} - \{q\beta\} - \left\{ \sqrt{T} - \{q\beta\} \right\} + \sqrt{T} - 1 + \{q\beta\} - \left\{ \sqrt{T} - 1 + \{q\beta\} \right\} \right) + \\
 & + 2 \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \left(2 \frac{T}{p+1} - 2 \left\{ \frac{T}{p+1} \right\} + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\{q\beta\}) \leq T} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+1-\{q\beta\}) \leq T} 1 \right) = 2(S_1 + S_2 - S_3).
 \end{aligned}$$

Для S_1 получим:

$$S_1 = 2T \sum_{q=1}^{\sqrt{T}} \frac{1}{q} - O(\sqrt{T}) = T \ln T + 2\gamma T + O(\sqrt{T}).$$

Для S_3 имеем оценку: $S_3 = T - O(\sqrt{T})$.

Перейдем к оценке S_2 . Так как $\max(\{q\beta\}, 1 - \{q\beta\}) = 1 - \|q\beta\| \geq \frac{1}{2}$, $\min(\{q\beta\}, 1 - \{q\beta\}) = \|q\beta\| \leq \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned}
 S_4(p) &= \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\{q\beta\}) \leq T} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+1-\{q\beta\}) \leq T} 1 = \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\|q\beta\|) \leq T} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+1-\|q\beta\|) \leq T} 1 = \\
 &= \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q \leq \frac{T}{p+\frac{1}{2}}} 1 + \sum_{q > \frac{T}{p+1}, q(p+\|q\beta\|) \leq T} 1 + \sum_{q \geq \frac{T}{p+1}, q(p+1-\|q\beta\|) \leq T} 1.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$S_4(p) \geq \frac{T}{p+\frac{1}{2}} - \frac{T}{p+1} - 1 = \frac{T}{2(p+\frac{1}{2})(p+1)} - 1, \quad S_4(p) \leq \frac{T}{p} - \frac{T}{p+1} + 1 = \frac{T}{p(p+1)} + 1.$$

Отсюда следует, что

$$S_2 = 2T \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} \frac{1}{p+1} + \sum_{p=1}^{\sqrt{T}} S_4(p) + O(\sqrt{T}) = T \ln T + (2\gamma - 2)T + \theta(T)T + O(\sqrt{T}),$$

где $\frac{1}{6} \leq \theta(T) < 1$. Объединяя все оценки, получим требуемое утверждение

$$D_2(T|\Lambda(\beta)) = 4T \ln T + 2(4\gamma - 3 + \theta(T))T + O(\sqrt{T}).$$

□

Заметим, что оценка константы в остаточном члене в 10 раз лучше чем та, что получается из общей оценки работы [13].

ТЕОРЕМА 2. Для рационального $\frac{a}{b}$, $b > 1$ и $\sigma > \frac{1}{2}$ справедливо интегральное представление для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

$$\zeta_{H,2} \left(\Lambda \left(\frac{a}{b} \right) | \alpha \right) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} + \frac{4\alpha}{\alpha-1} \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) - \ln b \right) + \alpha \int_1^{\infty} \frac{\Delta_2 \left(t \left| \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right) dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 \left(T \left| \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right) &= -4 \left(\sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} \right) - 4 \left(\sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} - \frac{b\sqrt{T}}{2} \right) + \\ &+ 4 \left(b^2 \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma(b\sqrt{T})}{b^2} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ b\sqrt{T} \right\} \right) - 4T \cdot \left(I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I(b\sqrt{T}, 0) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned} D_2 \left(T \left| \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right) &= 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) - 4 \left(\sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{q} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b} \right) - \\ &- 4 \left(\sum_{p=1}^{b\sqrt{T}} \left\{ \frac{T}{p} \right\} - \frac{b\sqrt{T}}{2} \right) + 4 \left(b^2 \cdot \sigma \left(\frac{\sqrt{T}}{b} \right) + \frac{\sigma(b\sqrt{T})}{b^2} - \left\{ \frac{\sqrt{T}}{b} \right\} \left\{ b\sqrt{T} \right\} \right) - \\ &- 4T \cdot \left(I \left(\frac{\sqrt{T}}{b}, 0 \right) + I(b\sqrt{T}, 0) \right) = 4T \ln T - 4T \ln b + 4T \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) + \\ &+ \Delta_2 \left(T \left| \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_{H,2} \left(\Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \left| \alpha \right. \right) = \alpha \int_1^\infty \frac{4t \ln t - 4t \ln b + 4t \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) dt}{t^{\alpha+1}} + \alpha \int_1^\infty \frac{\Delta_2 \left(t \left| \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right) dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Второй несобственный интеграл абсолютно сходится при $\sigma > \frac{1}{2}$, так как числитель подынтегральной функции есть $O(\sqrt{t})$.

Для первого несобственного интеграла имеем:

$$\begin{aligned} &\alpha \int_1^\infty \frac{4t \ln t - 4t \ln b + 4t \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) \right) dt}{t^{\alpha+1}} = \\ &= \frac{4\alpha}{\alpha-1} \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) - \ln b \right) + 4\alpha \int_1^\infty \frac{\ln t dt}{t^\alpha}, \\ &\alpha \int_1^\infty \frac{\ln t dt}{t^\alpha} = \frac{-\alpha((\alpha-1) \ln t + 1)}{(\alpha-1)^2 t^{\alpha-1}} \Big|_1^\infty = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_{H,2} \left(\Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \left| \alpha \right. \right) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} + \frac{4\alpha}{\alpha-1} \left(\frac{2b-1}{b} \gamma - \frac{3}{b} + 2I(b, 0) - \ln b \right) + \alpha \int_1^\infty \frac{\Delta_2 \left(t \left| \Lambda \left(\frac{a}{b} \right) \right. \right) dt}{t^{\alpha+1}}.$$

□

6. Заключение

Найденное интегральное представление для второй компоненты гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ позволяет ставить вопрос о получении новых интегральных представлений, для которых абсцисса абсолютной сходимости последовательно сдвигается влево. Изучение этого вопроса будет темой следующих статей по этой теме.

И теорема 1, и теорема 2 показывают наличие зависимости второго члена асимптотической формулы и вычета гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ от величины знаменателя b и независимости от числителя a . Ранее аналогичные эффекты были обнаружены А. Л. Рошениной для других обобщений проблемы Дирихле в работах [16]–[19].

Из содержания работы следует, что для уточнения порядка остаточного члена в асимптотических формулах важно изучение величин

$$R_1^*(T, b, \delta) = \sum_{q=1}^{\frac{\sqrt{T}}{b}} \left\{ \frac{T}{bq} - \delta \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2b}, \quad R_2^*(T, b, \delta) = \sum_{p=1}^{\sqrt{T}-\delta} \left\{ \frac{T}{bp + b\delta} \right\} - \frac{\sqrt{T}}{2}.$$

Естественно, сначала следует изучить возможности элементарного метода И. М. Виноградова, изложенного в [1]–[4]. Затем необходимо получить наиболее точные оценки с помощью метода тригонометрических сумм (см. [15]).

Важным является вопрос о переносе полученных результатов на случай иррационального β .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. М. Виноградовъ, “Новый способъ для полученія асимптотическихъ выражений арифметическихъ функций”, Известія Академіи Наукъ, 11:16 (1917), 1347–1378.
2. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. — М.-Л., Гостехиздат, 1952. 180 с.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей — М., 1967г., 378 с.
4. А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник. Элементарные методы в аналитической теории чисел — М., Физматгиз, 1962г., 272 с.
5. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
6. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.
7. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.
8. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.
9. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.

10. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
11. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Известия Тульского государственного университета. — Тула, 1996. Т. 2, вып. 1. С. 77–87.
12. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Тезисы докладов III международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения". — Тула. 1996. С. 49
13. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // Матем. заметки, 1998. Т. 63, вып. 3. С. 363–369.
14. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, И. Ю. Реброва. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Матем. заметки, 1998. Т. 63, вып. 4, С. 522–526.
15. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М., 1983 г.
16. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте // "Современные проблемы теории чисел и ее приложения": Тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 120.
17. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек сдвинутой решётки под гиперболой $x \cdot y = N$. Тула, 1996. Деп. в ВИНТИ. N 2743-B-96.
18. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте. Тула, 1997. Деп. в ВИНТИ. N 2087-N-97.
19. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток./ Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.
20. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. I. M. Vinogradov, 1917, "A new method for obtaining asymptotic expressions of arithmetic functions", *Izvestia Akademii Nauk*, 11:16, 1347–1378.
2. I. M. Vinogradov, 1952, "Fundamentals of number theory". — M.-L., *Gostekhizdat*, 180 p.
3. A. O. Gelfond, 1967, "Calculus of finite differences". — M., 378 p.
4. A. O. Gelfond, Yu. V. Linnik, 1962, "Elementary methods in analytical number theory". — M., *Fizmatgiz*, 272 p.
5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
6. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

7. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", *Doklady akademii nauk*, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.
8. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, no. 3, pp. 18–23.
9. M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "About one functional equation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 359–364.
10. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.
11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta function of lattices", *Izvestiya Tula State University. — Tula*, Vol. 2, issue. 1. P. 77–87.
12. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, 1996, "On the analytic continuation of the hyperbolic zeta function of rational lattices", *Abstracts of the III International Conference "Modern problems of number theory and its applications"*. — Tula. P. 49.
13. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, 1998, "Number of lattice points in the hyperbolic cross", *Math. Notes*, 63:3, P. 319–324.
14. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roschenya, I. Y. Rebrova, 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices" // *Math. notes*, Vol. 63, issue 4, pp. 522–526.
15. A. A. Karatsuba, 1983, *Fundamentals of analytical number theory*. — Moscow.
16. A. L. Roshchenya, 1996, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross" // *Modern problems of number theory and its applications: Tez. dokl. III International Conf. Tula*, p. 120.
17. A. L. Roshchenya, 1996, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of a shifted lattice under the hyperbola $x \cdot y = N$ ", Tula, Dep. in VINITI. № 2743-№ -96.
18. A. L. Roshchenya, 1997, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross", Tula, Dep. in VINITI. № 2087-№ -97.
19. A. L. Roshchenya, 1998, "Analytical continuation of the hyperbolic zeta function of lattices" / *Dissertation of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Moscow. MPGU*.
20. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 24.12.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.