

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-53-82

**Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений
Лиувилля интегрируемых систем¹**

В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало

Ведюшкина Виктория Викторовна — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: arinir@yandex.ru

Кибкало Владислав Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Аннотация

В статье изучается топология интегрируемых биллиардных книжек, то есть систем на клеточных комплексах, склеенных из столов плоских софокусных биллиардов. Получены существенные продвижения по доказательству локальной версии гипотезы Фоменко о биллиадах. В частности, биллиардами удалось реализовать важный класс подграфов в графе-инварианте Фоменко–Цишанга, классифицирующем интегрируемые системы с точки зрения топологии их слоений Лиувилля. Затем выполнена комбинаторная классификация биллиардных книжек малой сложности (имеющих малое число одномерных клеток), склеенных из плоских областей, содержащие фокусы семейства квадрик. Для этих систем ведется вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга.

Ключевые слова: интегрируемые биллиарды, инвариант Фоменко–Цишанга, перестановка.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:

В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало. Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 53–82.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-71-00155 в МГУ имени М.В.Ломоносова).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-53-82

Billiard books of low complexity and realization of Liouville foliations of integrable systems

V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo

Vedyushkina Victoria Viktorovna — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: arinir@yandex.ru

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Abstract

In paper we study the topology of integrable billiard books, (i.e. systems on CW-complexes glued from flat domains of confocal billiards). Significant progress has been made in proving the local version of the billiard Fomenko conjecture. In particular, billiards were used to realize an important class of subgraphs of the Fomenko - Zieschang graph invariants (that classify Liouville foliations of integrable systems in topological sense). Then we classify in combinatorial sense billiard books of low complexity (with a small number of one-dimensional cells), glued from flat domains that contain foci of the family of quadrics. Calculation of Fomenko–Zieschang invariants for these systems is in progress.

Keywords: integrable billiards, Fomenko-Zieschang invariant, permutation.

Bibliography: 37 titles.

For citation:

V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo, 2022, “Billiard books of low complexity and realization of Liouville foliations of integrable systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 53–82.

1. Введение

Системы математических бильярдов — динамических систем с ударами — привлекают внимание исследователей из самых разных областей математики и смежных наук. Теории бильярдов посвящены, например, монографии Д.Биркгофа [1], С.Л.Табачникова [2], В.Драговича и М.Раднович [3], В.В.Козлова и Д.В.Трещева [4]. Важное занимает при этом изучение интегрируемого случая.

Совсем недавно были доказаны различные формулировки гипотезы Биркгофа — критерия интегрируемости бильярдов из тех или иных классов, см. [5, 6]. Так плоский компактный односвязный стол с кусочно-гладкой границей (исключая столы-многоугольники) должен быть ограничен дугами квадрик с общими фокусами (с углами $\pi/2$ в точках излома).

Открытые В.В.Ведюшкиной *бильiardные книжки* [7] — кусочно-плоские клеточные комплексы с перестановками, склеенные из плоских софокусных столов — наследуют интегрируемость плоских софокусных бильярдов, но принципиально расширяют их класс. Наличие на каждой 1-клетке циклической перестановки и правило коммутирования перестановок при каждой 0-клетке позволяют задать непрерывное движение шара по столу-комплексу.

Используя новые классы бильярдных систем, удалось доказать ряд положений фундаментальной гипотезы А.Т.Фоменко о бильярдах [8]. Согласно последней, с точки зрения топологии слоений Лиувилля, интегрируемых бильярдных систем “не меньше”, чем интегрируемых систем (с некоторыми условиями). Как известно из теории топологической классификации интегрируемых систем [10, 11, 12], разработанной А.Т.Фоменко вместе с соавторами и учениками, классифицирующим инвариантом Фоменко–Цишанга этой эквивалентности является граф со следующим оснащением. При вершинах указаны типы особенностей, на ребрах — пары меток $r = \mathbb{Q} \bmod 1 \cup \{\infty\}$, $\varepsilon = \pm 1$, а метка $n \in \mathbb{Z}$ стоит на связных подграфах (состоящих из седловых особенностей), прообраз которых образует единое многообразие Зейферта с нестягиваемым в Q^3 слоем.

Любая невырожденная особенность [7] и база слоения Лиувилля с такими вершинами-атомами [13] были реализованы В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой как инварианты слоения Лиувилля подходящей, причем задаваемой алгоритмически, бильярдной книжки. Естественным вопросом стала реализация произвольных значений числовых меток (да, они реализуются [14, 15]) и их локальных комбинаций, в том числе, на конкретных подграфах инварианта. Эти вопросы стали предметом “локальной” версии гипотезы А.Т.Фоменко [16], формулировку которой приведем в разделе 2. Иными словами, ее вопрос в том реализуется ли любое слоение в окрестности прообраза ребра или подграфа-семьи (прообраз которого — многообразие Зейферта с нестягиваемым слоем)? В настоящей работе получены существенные продвижения, например, полный ответ для случая многообразий Зейферта прямого произведения и любой метки n на нем.

Другой обсуждаемой задачей является классификация бильярдных книжек и вычисление их инвариантов (прежде всего, содержащих фокусы квадрик). Классификация наборов коммутирующих перестановок выполнено для важного класса бильярдных книжек малой сложности. Для важных семейств таких систем получены инварианты Фоменко–Цишанга. Полное решение этой задачи, как ожидается, будет использовать подходы и результаты алгебры и теории чисел: теории конечных групп, колец вычетов и коммутирующих перестановок.

Мы посвящаем нашу работу профессору механико-математического факультета МГУ Владимиру Николаевичу Чубарикову в связи с его 70-тилетием, присоединяемся к поздравлениям и всем добрым пожеланиям.

1.1. Интегрируемость геодезических потоков и плоских бильярдных систем

В нашей работе рассмотрен случай интегрируемых бильярдных систем, то есть имеющих, помимо энергии, еще одну функцию (дополнительный первый интеграл), постоянную на фазовых траекториях. Изучение таких систем было начато еще классиками. В первую очередь, отметим известную теорему Якоби и Шаля (см. [17], а также [4]).

ТЕОРЕМА 1 (Якоби, Шаль). *Геодезический поток индуцированной метрики на невырожденной квадратике размерности $n - 1$ в пространстве \mathbb{R}^n вполне интегрируем.*

А именно, касательная линия к его траектории касается одновременно еще $n - 2$ квадрик (помимо самого конфигурационного пространства как квадрики в \mathbb{R}^n). Все $n - 1$ квадрик должны быть софокусными, т.е. удовлетворять уравнению

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1, \quad -\infty < a_i < \lambda_i < a_{i+1} < \infty, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

для некоторых значений λ_i , $i = 1, \dots, n - 1$ параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ и констант $a_1 < \dots < a_n$. Последние являются квадратами длин полуосей квадрики со значением $\lambda = 0$. Тогда числа λ_i , как и модуль вектора скорости частицы, могут пониматься как первые интегралы системы.

В последние годы в изучении интегрируемых бильярдов с двумя степенями свободы был достигнут существенный прогресс. С одной стороны, доказательство нескольких формулировок знаменитой гипотезы Биркгофа о бильярдах [18, 5, 6] показало, что интегрируемость плоского бильярда на компактном односвязном столе с гладкой границей *не только следует из того*, что граница — это эллипс или окружность, но и наоборот, *требует этого*. Близкие эффекты, отметим, наблюдаются в случае кусочно-гладкой границы стола [18], системах геодезических потоков метрик постоянной кривизны [5], в бильярдах в постоянном магнитном поле [19], а также в случае систем большей размерности [20].

Из гипотезы Биркгофа, наравне с выводом о наличии тесной связи интегрируемости с софокусными квадрами, следует также и “узость” класса *плоских* интегрируемых бильярдов в топологическом смысле. Опуская детали, у таких бильярдов замыкания их фазовых траекторий, попадающих на фиксированный трехмерный уровень энергии $Q_h^3 = \{H = h\}$, устроены одним из конечного числа способов. Иными словами, эти уровни энергии принадлежат к одному классу послойной гомеоморфности (сохраняющей слоение Лиувилля системы — разбиение фазового пространства и его подмногообразий на совместные уровни энергии и интеграла).

В описанной в разделе 1.3 конструкции бильярдной книжки (стола-комплекса с перестановками, склеенного из таких плоских бильярдов), предложенной В.В.Ведюшкиной [21, 7], они играют роль “элементарных кирпичей”. Хотя топология слоения для каждого плоского стола хорошо известна [22, 23, 24], топология слоений Лиувилля систем на столах-комплексах оказалась очень разнообразной

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Большой интерес представляет изучение замкнутых траекторий систем бильярдов на столах, ограниченных софокусными квадрами. В недавних работах [25, 26] В.Драговича и М.Раднович была установлена связь n -периодических траекторий бильярда внутри эллипсоида E^{d-1} в пространстве \mathbb{R}^d с экстремальными полиномами на наборе из нескольких промежутков числовой прямой \mathbb{R} . Рассмотрены были, в частности, полиномы П.Л.Чебышева, Е.И.Золотарева и Н.И.Ахизера.

1.2. Топологические инварианты интегрируемых систем

Топологические свойства интегрируемых бильярдов, как и других интегрируемых систем, определяются тем, как особый трехмерный уровень постоянной энергии в фазовом пространстве расслаивается на двумерные торы и особые слои, на которых постоянны значения дополнительного интеграла. Отметим, что почти все такие слои являются замыканиями фазовых траекторий системы. Иными словами, наличие послойного гомеоморфизма между такими слоениями двух систем на уровнях их энергии означает возможность перевести друг в друга замыкания почти всех решений одной системы в замыкания почти всех решений другой.

В работах А.Т.Фоменко, его соавторов и учеников (см., например, [11, 27]) была построена теория топологической классификации таких слоений (и соответствующих систем). Подробный обзор данной теории и ее приложений к задачам геометрии, механики и математической физики имеется в монографии [12]. В основе лежит отмеченное и изученное А.Т.Фоменко в более ранних работах [28, 10] свойство *боттовости* (невырожденности) критических точек, обобщающее свойство точек Морса на интегрируемый случай.

Трехмерные уровни энергии $Q_h^3 : H = h$ невырожденных интегрируемых систем с боттовскими особенностями склеиваются из окрестностей особых слоев, содержащих критические окружности, по граничным торам этих окрестностей-атомов. Такие связные блоки, содержащие ровно один особый слой, называют 3-атомами Фоменко. Они бывают эллиптическими (минимальными или максимальными) или седловыми (прямого произведения или с поворотом на π). Это зависит от того, являются вещественными или мнимыми собственные значения оператора линеаризации некоторого гамильтонова векторного поля в критических точках, подробнее [12, т. 1, гл. 1].

Эллиптический атом есть произведение слоя S^1 на диск D^2 , расслоенный функций Морса с одной точкой минимума или максимума. Его особый слой одномерен и совпадает с критическим множеством, а его окрестность послойно гомеоморфна расслоенному полноторию.

Седловые окружности лежат на двумерных особых слоях. Окрестность седловой боттовской окружности имеет тип произведения окрестности седловой морсовской точки в D^2 на окружность, возможно, с поворотом на π . В последнем случае говорят о *седловом атоме со звездочками*. Отметим, что в разделе 2.3 все атомы предполагаются без звездочек, т.е. прямого произведения S^1 на двумерную базу V^2 .

Классифицирующим инвариантом Q_h^3 относительно лиувиллевой эквивалентности (т.е. послойной гомеоморфности с учетом некоторых ориентаций) является граф, оснащенный символами особенностей-атомов при своих вершинах и числовыми метками r, ε, n . Его называют инвариантом Фоменко–Цишанга или меченой молекулой.

Для нахождения числовых меток r, ε, n по формулам из [12, т.1, гл. 4, пар. 3] требуется определить на граничных торах 3-атомов некоторые базисы, т.е. пары циклов из $H_1(T^2, \mathbb{Z})$. Для наглядности будем понимать их как замкнутые кривые на торе без “лишних” точек самопересечения, устранимых путем гомотопии.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим некоторые детали (подробнее см. [12, т.1, гл. 3, 4]), важные для понимания основных шагов доказательств:

- на каждом торе базис состоит из однозначно определенного цикла λ (для атома A это стягиваемый по полноторию цикл, а для седлового без звездочек он гомологичен критической окружности), и цикла μ , дополняющего цикл λ до базиса и определенного неоднозначно;
- базисы на системе граничных торов седлового 3-атома V связаны условием: циклы μ образуют единое 2-сечение атома V
- матрица перехода между базисами на каждой паре склеиваемых торов имеет определитель -1 .

Метки $r \in \mathbb{Q} \bmod 1 \cup \{\infty\}$, $\varepsilon = \pm 1$, стоящие на ребре молекулы и метка $n \in \mathbb{Z}$, стоящая на некоторых подграфах, имеют собственную топологическую интерпретацию. Например, значение метки $r = \infty$ между двумя седловыми атомами, склеенными по паре своих граничных торов, означает, что критические окружности указанных 3-атомов задают гомологичные циклы в 3-многообразии с границей, получаемом после склейки. В то же время значение $r = \infty$ на ребре, соединяющем эллиптический атом A и седловой атом, означает, что критическая окружность седлового атома гомологична меридиану — циклу λ — полнотория (атома A), т.е. сама гомологична нулю в $H_1(Q^3)$.

1.3. Биллиарды на столах-комплексах и их фазовая топология

Применение описанной выше теории топологической классификации интегрируемых систем к изучению класса интегрируемых биллиардов оказалось весьма плодотворным. Приведем вначале следующий пример.

Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на эллипсоиде $E^2 \subset \mathbb{R}^3$ и устремим малую полуось эллипсоида к нулю. Инварианты Фоменко–Цишанга биллиарда и геодезического потока были вычислены (первый был независимо найден В.В.Ведюшкиной [23] и В.Драговичем, М.Раднович [22], а второй совпадает с таковым для знаменитого волчка Эйлера, см. [12]).

Такой предельный переход от эллипсоида к эллипсу меняет топологию конфигурационного пространства и слоения Лиувилля системы. Например, изменился тип 3-атома: 3-атом B вместо 3-атома C_2 , см. [12]. Вместе с тем, каждой траектории полученного этим переходом биллиарда в эллипсе естественно соответствует две (проецирующиеся на нее) траектории на биллиарда кусочно-плоском столе $2A_2$ (склеенном из двух столов плоского биллиарда A_2

внутри эллипса). Возможно, именно поэтому указанное обобщение бильярдов не было замечено ранее, до постановки задачи о топологии слоений Лиувилля на фазовом пространстве этих систем и вычисления их инвариантов, сравнения получаемых ответов.

Система бильярда на столе $2A_2$ может служить весьма понятным примером систем топологических (обобщенных) бильярдов, класс которых был введен В.В.Ведюшкиной в работе [29]. Конфигурационное пространство является кусочно-плоским двумерным многообразием, склеенным из плоских софокусных столов по изометричной склейке дуг границы. Топологические свойства таких бильярдов были изучены: как вопрос “структурной” классификации их столов [29, 30], так и последующее вычисление для них инвариантов Фоменко–Цишанга, [29, 31]. В этом случае удается получить полный и обозримый ответ, а найденные инварианты совпадают с таковыми для многих интегрируемых систем из приложений (см. обзоры [8, 32]).

Следующим шагом оказалось введение В.В.Ведюшкиной класса бильярдных книжек. Эти столы-комплексы, как и топологические бильярды, являются кусочно-плоскими, но теперь по 1-клетке (общему ребру склейки) могут склеиваться более двух плоских столов. В таком случае динамика частицы после удара о данную 1-клетку задается циклической перестановкой на множестве склеенных по ней 2-клеток. При проекции комплекса на плоскость эти 1-клетки отображаются на дуги софокусных квадриков. Таким дугам припишем перестановку, равную произведению независимых циклов. Для корректности определения движения в вершинах (0-клетках комплекса) наложим дополнительное условие на перестановки. При каждой вершине должны коммутировать перестановки на двух взаимно-перпендикулярных квадриках, проходящих через проекцию вершины.

Тем самым, был получен новый и весьма обширный класс, изучение которого сразу ставит вопросы из области алгебры систем перестановок с условиями коммутирования (для классификации столов-комплексов) и теории классов вычетов по конечным модулям (для вычисления инвариантов). Дело в том, что для описания циклов-кривых допустимых базисов (необходимых для вычисления меток инварианта Фоменко–Цишанга) потребуется ответить на вопрос, как устроены независимые циклические перестановки системы коммутирующих перестановок и некоторых их степеней.

Изучение бильярдных книжек и вычисление их топологических инвариантов позволило доказать ряд положений фундаментальной гипотезы А.Т.Фоменко о бильярдах (подробнее см. программную статью [8]). Были алгоритмически построены бильярды, имеющие в своем слоении произвольный 3-атом [7] (боттовскую особенность интегрируемых систем), а затем — и произвольную наперед заданную базу слоения Лиувилля (инвариант Фоменко–Цишанга в отсутствие меток). Кроме того, слоения многих бильярдов (даже на достаточно простых столах) эквивалентны таковым для многих известных интегрируемых систем из механики и математической физики [9, 33]. Тем не менее, ответ на общий вопрос пока остается неясен.

1.4. Элементарные плоские бильярды: напоминание

Зафиксируем семейство софокусных квадриков соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda).$$

Здесь a, b — фиксированные параметры семейства, которые в частности фиксируют расстояние между фокусами. Если $a > b > 0$, данное соотношение описывает семейство софокусных эллипсов и гипербол, в которые включены фокальная прямая $y = 0$ и предельная гипербола $x = 0$.

Под элементарным бильярдом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадриков и не содержит углов $3\pi/2$. Отметим, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямыми углами. Запрет углов $3\pi/2$ позволяет однозначно определить бильярдное движение после попадания материальной точки в

угол, и это движение непрерывно. А именно, после отражения точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол.

На множестве элементарных бильярдов можно ввести естественное отношение эквивалентности, которое, как было показано ранее [29], сохраняет слоение Лиувилля. Нестрого говоря, два бильярда называются эквивалентными, если один получается из другого изометрией плоскости или же изменением параметров границ стола-области так, чтобы изменяемые дуги границ во время деформации не меняли бы своего типа. Определение запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(-\infty, b)$), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(b, a]$), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным b). При этом повторим, что мы предполагаем что все эллипсы и гиперболы принадлежат одному семейству софокусных квадрик с параметрами a и b . Примеры элементарных бильярдов различных классов, необходимых в настоящей работе изображены на рис. 1. Их обозначения совпадают с теми, которые даны в статье [29].

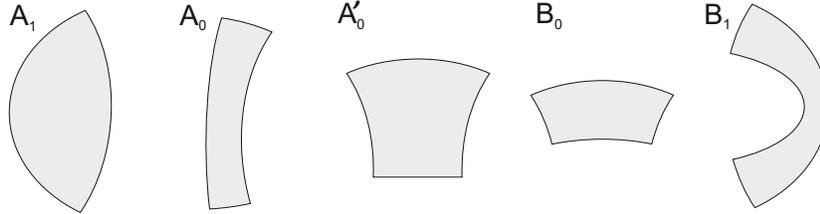


Рис. 1: Плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

Замечание 3. Для систем бильярдов возможно изобразить цикл на конфигурационном пространстве, спроецировав его за счет известного устройства слоения в прообразе каждой точки бильярдного стола. Отметим, что при этом надо сохранить информацию о направлении обхода по циклу и о том, каким из 4-х способов были направлены вектора скорости, в парах с точками цикла на столе составлявшие цикл на торе. Более подробно процедура изложена в [34].

Тем самым, задание циклов и подсчет меток конкретного бильярда оказывается весьма наглядным, в отличие от многих систем из приложений [12, т.2]

2. Локальная гипотеза А.Т. Фоменко о бильярдах.

2.1. Формулировка локальной гипотезы

Локальная гипотеза, сформулированная А.Т.Фоменко в [16], предполагает возможность реализовать бильярдом слоение Лиувилля, “фрагмент” инварианта которого имеет произвольный вид. А именно, предполагается возможность реализовать произвольные значения меток r, ε (стоящих на каждом ребре инварианта, пункт **1**), произвольное значение метки n (стоящей на некоторой семье инварианта, пункт **2**), усиления **3** и **4** этих пунктов **1** и **2** (учитывающие типы атомов на концах ребра и вид этой семьи), а также их дальнейшие усиления — меченые окрестности ребра или семьи (пункты **5** и **6**).

ГИПОТЕЗА (А.Т.Фоменко). Каждое из нижеперечисленных подмножеств инварианта Фоменко–Цишанга интегрируемой гамильтоновой системы с 2 степенями свободы реализуется как подмножество инварианта Фоменко–Цишанга некоторого интегрируемого бильярда:

1. (реберный инвариант) ребро с выбранной парой меток (r, ε) ;

2. (усиление пункта **1**) ребро с выбранной парой меток (r, ε) между двумя выбранными атомами;
3. (инвариант семьи) выбранная метка n на некоторой семье S ;
4. (усиление пункта **3**) выбранная метка n на произвольной выбранной семье S ;
5. (меченая окрестность семьи). выбранная семья S с выбранной меткой n на ней и выбранными реберными инвариантами (r, ε) на ее внешних ребрах;
6. (меченая окрестность ребра). Две семьи S_1 и S_2 с метками n_1 и n_2 , выбранные граничные торы которых соединены ребром с любым выбранным реберным инвариантом (r, ε) .

Разделы **1** и **3** этой гипотезы, доказанные авторами [14, 15], вместе с результатом В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой [7] дают следующее утверждение: каждое значение каждого компонента инварианта Фоменко–Цишанга (тип 3-атома при вершине графа, метки r, ε на ребре, метка n на некоторой семье) возникает в инварианте слоения подходящего интегрируемого бильярда. Иными словами, каждое из них не является препятствием к реализации слоения бильярдом.

В настоящем разделе получено существенное продвижение по разделам **2** и **4** локальной гипотезы.

2.2. Реализация новых инвариантов окрестности ребра

Фиксируем в семействе софокусных квадрик некоторый эллипс e_0 и некоторую гиперболу h_0 . Рассмотрим следующие плоские интегрируемые бильярды: бильярд A_1 , ограниченный дугой эллипса e_0 и выпуклой дугой гиперболы h_0 (см. рис. 1), и бильярд A_0 , ограниченный тем же эллипсом e_0 и двумя дугами гиперболы h_0 . Фиксируем число n и склеим из $2m$ экземпляров бильярда A_1 и одного бильярда A_0 бильярдную книжку. Рассмотрим m экземпляров A_1 , склеим их друг с другом вдоль дуги гиперболы, и вдоль этой же дуги приклеим к левой дуге граничной гиперболы бильярда A_0 . Оставшиеся бильярды A_1 также склеим друг с другом вдоль дуги гиперболы и вдоль этой же дуги приклеим вдоль правой дуги гиперболы к бильярду A_0 . Левые бильярды A_1 обозначим через a_i , правые – через c_i , а бильярд A_0 через b . Теперь укажем на корешках полученной книжки следующие перестановки. На корешке между группой бильярдов a_1 и бильярдом b поставим циклическую σ , переставляющую бильярды в следующем порядке b, a_1, a_2, \dots, a_m . На другом корешке книжки – циклическую перестановку ρ , которая переставляет бильярды в порядке b, c_1, c_2, \dots, c_m . Полученную книжку обозначим через \mathbb{W}_1 . Пример такой книжки для $m = 3$ изображен на рисунке 2 а).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Инвариант Фоменко–Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки \mathbb{W}_1 , состоящей из $2m$ экземпляров бильярда A_1 и одного бильярда b с циклическими перестановками на корешках, имеет вид, изображенный на рис. 2б).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство предложения на два шага. Вначале вычислим грубую молекулу для данной бильярдной книжки, а затем вычислим метки.

Шаг первый. Вычисление грубой молекулы.

Опишем вначале поведение критических траекторий. При наименьшем значении интеграла траектории представляют собой криволинейные движения по дугам эллипса e_0 . Таких траекторий ровно две. Покажем это, рассмотрев два случая. Пусть m – нечетно. Тогда одна траектория – проходит по нечетным листам a_i вверх, по четным листам a_i вниз, по верхнему граничному сегменту бильярда b слева направо, далее по нечетным листам c_i вниз, а по

четным – вверх, и после выхода на бильярд b проходит по нижнему сегменту справа налево. Другая траектория проходит по тем же листам в противоположном направлении. Пусть теперь m – четно. Тогда после выхода с листов c_i обратно на лист b траектория опять проходит по верхнему сегменту бильярда b но уже справа налево. Вторая траектория при движении по бильярду b проходит по нижнему сегменту.

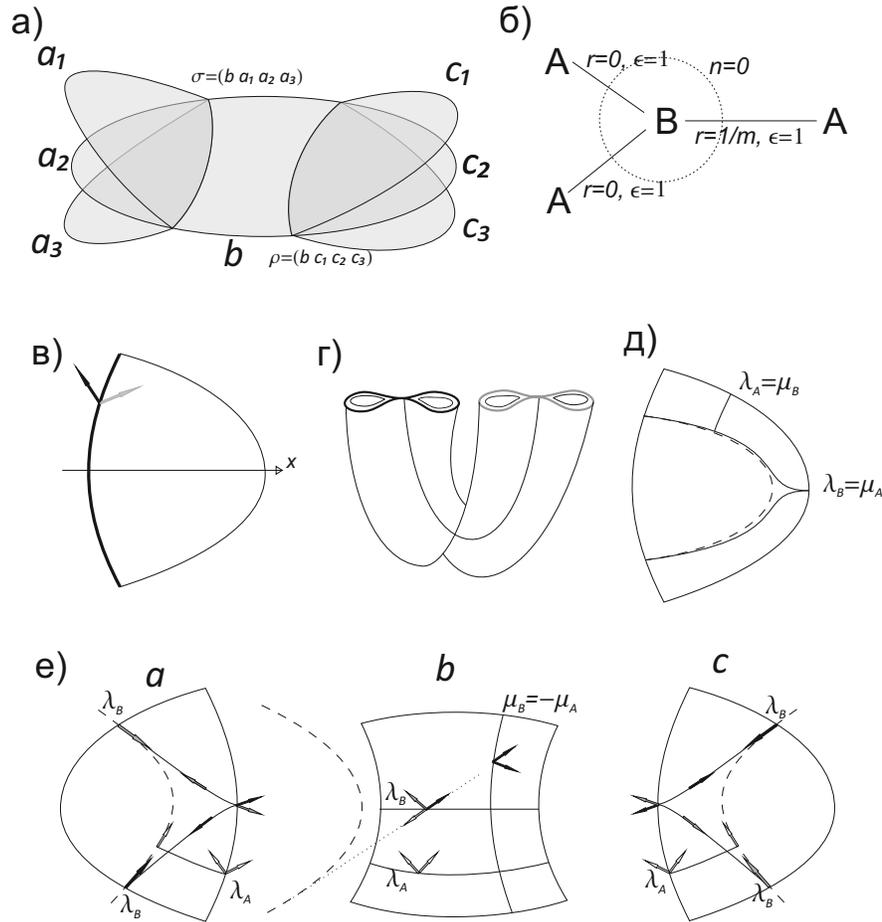


Рис. 2: а) бильярдная книжка \mathbb{W}_1 при $m = 3$. б) инвариант Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля изоэнергетической 3-поверхности бильярдной книжки \mathbb{W}_1 .

При значении параметра дополнительного интеграла соответствующего вырожденной квадратике (оси Ox) траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Этот уровень назовем фокальным уровнем. Критическая траектория ровно одна, она проходит вдоль отрезков оси Ox . Последовательность отрезков вместе с направлением на них следующая: движение по b направо, далее в каждом из бильярдов c_i движение направо и после удара влево, движение по b влево, далее в каждом из бильярдов a_i движение влево и после удара направо.

При значении параметра интеграла, соответствующего гиперболе, лежащей на оси Oy , получаем ровно одну траекторию проходящую только по листу b .

Остальные значения интеграла невырождены и им соответствуют двумерные торы. Покажем это, доказав, что окрестности седлового слоя соответствует атом B .

Рассмотрим бильярд A_1 . Бифуркация на его фокальном слое описывается атомом A^* . Соответствующее этому атому слоение Зейферта имеет один особый слой. Трансверсальное критической окружности сечение – 2-атом B . Отменим в бильярде A_1 бильярдный закон на дуге граничной гиперболы. Прообраз этой дуги есть трансверсальное сечение 3-атома A^* ,

т.е. 2-атом B . На рисунке 2 в) жирным выделена граничная дуга гиперболы и указана пара векторов, которые были склеены до отмены бильярдного закона: черный вектор при этом направлен наружу области бильярда A_1 , а серый – внутрь. После отмены мы получаем, что бифуркация в окрестности фокального слоя распалась в прямое произведение 2-атома B на отрезок. На рисунке г) изображен результат после разреза, а границы этого разреза соответствуют парам точка-вектор своего цвета (черного наружу области, а серого – внутрь).

Склеим теперь m экземпляров разрезанного стола A_1 по правилу – пары точка-вектор склеиваются, если они соответствуют одной точке на дуге гиперболы и черный вектор предыдущего экземпляра A_1 отождествляется с серым вектором следующего. Эта склейка продиктована новым бильярдным законом, который отвечает перестановкам σ и ρ . Разрезанные 3-атомы A^* склеиваются в единый атом, представляющий собой прямое произведение 2-атома B на отрезок.

Отметим следующий факт. Необходимо помнить, что если бильярдный закон в столе A_1 вернуть, то соответствующий 3-атом не имеет структуру прямого произведения. В его 3-атоме возникает “перекрутка”. Эту перекрутку можно представлять себе так. Протащим по разрезанному 3-атому 2-атом B – дугу гиперболы, оснащенную векторами внутрь. У этой дуги до протаскивания выделяется часть выше оси Ox и ниже оси Ox . После того как эта часть перейдет в эту же гиперболу с векторами наружу эти части поменяются местами (более подробно см. [34]). Этот эффект обеспечивает наличие одного фокуса в бильярде A_1 .

Осталось приклеить к двум описанным кускам бифуркации разрезанный прообраз листа b . Бифуркация на фокальном слое соответствующего ему бильярда A_0 есть 3-атом B . В самом деле, рассмотрим прообраз любой гиперболы софокусного семейства, пересекающейся с бильярдом A_0 . Прообраз этой гиперболы есть пара 2-атомов B , один атом соответствует направлению на критической окружности направо, а другой – налево. Седловой 3-атом разбивается таким образом на два куска – одна часть отвечает движению направо (и гомеоморфна прямому произведению 2-атома B на отрезок), а вторая – движению налево. При этом до отмены бильярдного на гиперболических границах бильярда A_0 эти части склеиваются так что часть прообраза гиперболы на одном куске, расположенная выше оси Ox склеивается с частью прообраза гиперболы на другом куске также расположенной выше оси Ox . Это обеспечивает то, что при склейке всех разрезанных кусков изоэнергетической поверхности Q^3 в один в полученном произведении 2-атома B на отрезок будет четное число перекруток. Т.е. итоговый атом гомеоморфен 3-атому B .

Для завершения вычисления грубой молекулы осталось заметить, что если каустика совпадает с гиперболой h_0 , то на этом уровне бифуркации не происходит, т.е. уровень дополнительного интеграла по прежнему гомеоморфен двумерному тору.

Шаг второй. Вычисление меток. Напомним, что циклы λ на граничных торах седловых атомов выбираются гомотопными слоям расслоения Зейферта, т.е. критическим окружностям. Они определены однозначно, причем их ориентация обязана совпадать с ориентацией критических окружностей. Дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, но все они должны лежать на граничных окружностях трансверсального критической окружности сечения – 2-атома. Циклы λ на граничных торах минимаксных атомов A однозначно выбираются как стягиваемые в точку внутри атомов-полноторий. Несмотря на то что сами по себе дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, на них тем не менее можно однозначно определить ориентацию. Дело в том, что при стремлении к критическому слою-окружности атома A эти циклы переходят в эту самую критическую окружность траекторию, которая и задаст на них искомую ориентацию.

Для наглядного представления цикла на граничном торе в нашем случае будем изображать проекцию этого цикла на бильярдный стол. Для восстановления цикла необходимо рассмотреть прообраз этой кривой на торе. Этот прообраз может быть несвязен. В этом случае мы либо в качестве цикла берем любую компоненту связности или либо ту, которая соответствует

указанным на рисунке векторам скорости (например, направленным вправо или вверх).

На ребрах графа Фоменко, соответствующих траекториям, касающихся эллипсов (назовем такие ребра и соответствующие им торы эллиптическими) проекции циклов на столы A_i , входящие в состав бильярдной книжки \mathbb{W}_1 , изображены на рисунке 2д). Очевидно, что цикл $\lambda_B = \mu_A$ переходит часть критической траектории при стремлении к тора к особым слоям атомов B и A , а другой цикл их дополняет и стягивается в точку внутри полнотория A . Циклы $\lambda_B = \mu_A$ на листе b бильярдной книжки проходят по сегменту каустики–эллипсу. Очевидно, что матрица склейки в этом случае имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, причем вклада в метку n такие матрицы не дают.

На гиперболическом ребре (траектории касаются гипербол) проекции циклов изображены на рисунке 2е). Прокомментируем цикл λ_B . На листах a_i и c_i для этого цикла необходимо выбирать прообраз кривой, оснащенной черными стрелками на нечетных листах и серыми стрелками на четных листах. На листе b в случае нечетного m необходимо выбрать часть прообраза кривой, соответствующей векторам направленным вправо вверх и влево вниз (черные и белые стрелки), а в случае четного – только вверх (черные и серые стрелки). Заметим, что этот цикл пересекается с циклом λ_A , ровно в m точках: каждая пара a_i, c_i дает только одну точку пересечения с данным циклом.

Выберем ориентацию цикла μ_B так, чтобы она была противоположна ориентации цикла μ_A . Напомним, что мы вольны выбирать здесь ориентацию, так как она зависит, вообще говоря, от выбора ориентации на Q^3 . Тогда матрица склейки на этом ребре примет вид $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $\left[-\frac{-1}{m}\right] = 0$. Предложение доказано.

□

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Заметим, что если мы модифицируем книжку и удалим часть бильярдов A_1 то это может привести к изменению грубой молекулы. А именно, в том и только в том случае, если число бильярдов A_1 станет нечетным. В этом случае у произведения 2-атома B на отрезок будет нечетное число перекруток, что приведет к тому, что полученный седловой атом будет гомеоморфен 3-атому A^* .*

Фиксируем гиперболу h_1 , параметр которой больше чем параметр гиперболы h_0 , т.е. которая расположена ближе к оси Oy , чем гипербола h_0 . Разобьем в бильярдной книжке \mathbb{W}_1 лист b по дуге некоторой гиперболы h_1 на два листа b_1 и b_3 и вклеим в линию разреза лист b_2 , который помимо дуг гиперболы h_1 и эллипса e_0 ограничен осью Oy . Полученную бильярдную книжку обозначим через $\mathbb{W}_1(A_0)$ (см. пример на рисунке 3а)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки $\mathbb{W}_1(A_0)$, имеет вид, изображенный на рис. 3б), где на всех ребрах метки $r = 0, \varepsilon = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим параметр гиперболы h_1 через λ_1 . Покажем, что при вклейке в книжку \mathbb{W}_1 листа b_2 , во-первых, не меняется вид бифуркации на фокальном слое, а во-вторых, появляется новая бифуркация B на уровне $\Lambda = \lambda_1$.

Напомним, что на фокальном слое бильярда A_0 , которому эквивалентен лист b_2 , бифуркация гомеоморфна прямому произведению атома B на окружность. Отмена бильярдного закона на дуге гиперболы h_1 — это разрез этого 3-атома трансверсально критической окружности. Замена бильярдного закона на этой дуге с перестановки (b_1, b_3) на перестановку (b_1, b_2, b_3) представляет собой разрез исходного 3-атома B трансверсально критической окружности и вклейку прямого произведения 2-атома B на отрезок. При этом не происходит смены атома на A^* так как в новом листе b_2 нет фокусов и следовательно, не происходит “перекруток”.

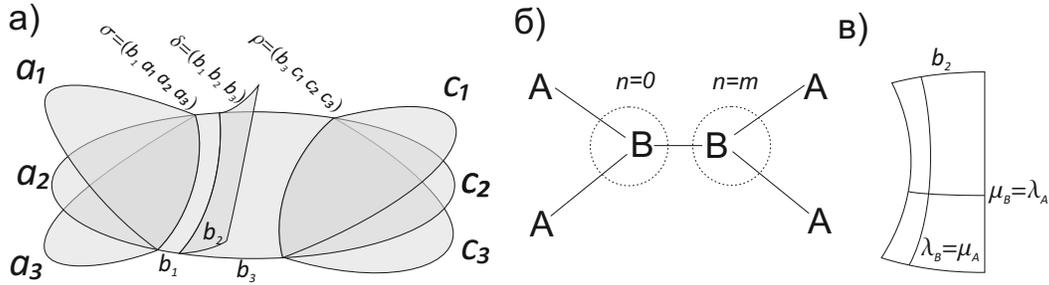


Рис. 3: На рисунке а) представлен пример биллиардной книжки $\mathbb{W}_1(A_0)$ для $m = 3$. В молекуле на рисунке б) все метки на ребрах $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

Заметим, что по отношению к биллиардам b_2 и b_3 дуга гиперболы h_1 является невыпуклой. Тогда на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_1$ не определено продолжение траектории, которая коснулась этой дуги. При дальнейшем увеличении значения интеграла Λ траектории разбиваются на два класса – проходящие по листу b_2 и по листу b_3 . Каждый тип траектории лежит на одном торе (так как это просто биллиарды, эквивалентные биллиарду A_0). На этих торах прообраз дуги гиперболы h_1 есть окружность. При $\Lambda = \lambda_1$ происходит склейка этих торов вдоль этих окружностей с образованием особого слоя 3-атома B . При дальнейшем уменьшении значения интеграла происходит разрыв вдоль этой окружности и приклейка кольца – разрезанного тора, соответствующего прообразу листа b_1 . В качестве критической окружности мы будем здесь рассматривать пары точка-вектор, где точка лежит на дуге гиперболы h_1 , а вектора скорости её касаются. Заметим, что в данном случае невыпуклая склейка не является траекторией.

Покажем вычисление меток. На рисунке 3в) показаны проекции циклов λ_B и μ_B , соответствующих бифуркации на уровне $\Lambda = \lambda_1$, на биллиардный лист b_2 . Очевидно, что гомеоморфный слою расслоения Зейферта на 3-атоме B цикл λ_B совпадает с периодическим циклом μ_A , который переходит в траекторию на атоме A . Дополняющий их цикл стягивается в точку на атоме A , то есть с одной стороны является циклом λ_A , а с другой – μ_A . Получаем что на ребрах между атомом B и атомами A матрицы склейки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Они задают искомые метки на ребрах и не дают вклада в метки n .

Рассмотрим соотношение циклов на ребре между атомами B . Ориентируем ребро по направлению к фокальному атому B . Фактически, по сравнению с вычислением предыдущей матрицы склейки нам необходимо вместо циклов λ_A , μ_A взять соответственно циклы μ_B , λ_B нового атома B . Для удобства выберем теперь ориентацию цикла μ^+ противоположной чем в доказательстве предыдущего предложения. Тогда матрица склейки примет вид $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $[-\frac{0}{1}] = 0$ в левую семью и $[\frac{m}{1}] = m$ в правую семью. Предложение доказано.

□

Возникает естественный вопрос – можно ли вместо нового атома B добавить в молекулу произвольную семью? Напомним что в терминах теории Фоменко-Цишанга семьей называется часть молекулы, которая содержит только седловые атомы, все метки на ребрах между которыми бесконечны, причем на всех ребрах между семьей и остальным графом конечны. В молекулах выше семьи состоят из одних атомов B .

Напомним здесь два важных результата, которые были получены в рамках доказательства общей гипотезы А.Т. Фоменко о моделировании интегрируемых систем биллиардами.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A'_0 (см. рис.*

1), такая что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла $\Lambda = b$ (в случае атома A особого значения $\lambda = 0$) её изоэнергетической поверхности Q^3 послойно гомеоморфно данному атому.

ТЕОРЕМА 3. Для любой грубой молекулы алгоритмически построена бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдов B_0 (см. рис. 1), такая, что ее инвариант Фоменко–Цишанга имеет структуру графа, совпадающего с данной грубой молекулой. Более точно: изоэнергетическая поверхность такой бильярдной книжки склеена из кусков наперед заданных атомов в порядке, задаваемом грубой молекулой.

Теорема 2 была доказана В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой в работе [7] (см. также [21]), а теорема 3 — ими же в работе [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 2 и с доказательство разделов 1 и 3 локальной гипотезы Фоменко вместе означают, что каждый элемент, из которых собирается инвариант Фоменко–Цишанга — граф с типами особенностей при вершинах и метками r, ε, n — реализуется бильярдом, пусть пока и по-отдельности. Из теоремы 3 следует, что относительно более грубой эквивалентности, чем лиувиллева (ее инвариантом является база слоения Лиувилля, т.е. инвариант Фоменко–Цишанга без числовых меток) классы интегрируемых систем и интегрируемых бильярдов совпадают (все особенности послойно гомеоморфны боттовским особенностям ранга 1).

Аналогично данным теоремам докажем следующий факт.

ТЕОРЕМА 4. Пусть W — произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы A . Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.

Тогда алгоритмически строится бильярдная книжка $\mathbb{B}(W, 0)$, склеенная из бильярдов A_0 , меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа W приписывается атом B и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами A . К каждому свободному верхнему ребру графа W приписывается атом A . На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки $r = 0, \varepsilon = 1$. Все семь имеют метку $n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся конструкцией-алгоритмом, использованным для доказательства теорем 2, 3. Бильярды, реализующие произвольные атомы без звездочек устроены следующим образом. Они получены склейкой нескольких экземпляров бильярда A'_0 вдоль фокальной прямой и вдоль выпуклого эллиптического ребра. При этом все склейки вдоль фокальной прямой локально склеивают не более двух бильярдов (а каждой такой склейке соответствует транспозиция в перестановке на фокальном корешке). Алгоритм работает по-разному для различных функций высоты на атомах. К примеру, для атома B перестраивающего один тор в два и два тора в один будут получаться различные бильярдные книжки. Теперь заменим все бильярды A'_0 на бильярды B_0 . В результате фокальный слой переместится на уровень меньшего граничного эллипса. Несмотря на то, что траектории на этом уровне при касании границы склейки не определены, слоение Лиувилля по-прежнему можно определить. Окрестность нового особого слоя по-прежнему будет послойно гомеоморфна наперед заданному атому.

Склейка же произвольной грубой молекулы (без атомов со звездочками) происходит следующим образом. Каждому седловому особому слою приписывается некоторый строго положительный параметр эллипса λ так, что чем больше λ , тем выше в грубой молекуле расположен атом. Далее каждый атом реализуется алгоритмом выше некоторой бильярдной книжкой, склеенной из бильярдов B_0 . При этом границы бильярда B_0 лежат на эллипсах с параметром 0 (большой) и λ (меньший). Для всех седловых атомов гиперболические границы

бильярдов B_0 лежат на дугах одних и тех же гипербол. Последовательно склеим все атомы в молекулу. Каждой склейке двух атомов по ребру будет соответствовать изменение перестановки на большей дуге эллипса (перестановка на меньшей останется неизменной). Подробнее о том как меняются перестановки, см. работу [13].

Пусть теперь W – граф, указанный в формулировке теоремы. Заменяем его на граф W^- поменяв знак соответствующей функции высоты. Эта операция в частности меняет направление роста функции на атомах, а также меняет местами верхние и нижние висячие вершины. Склеим по графу граф W^- (дополненному атомами A) бильярдную книжку из бильярдов B_0 по алгоритму Ведюшкиной–Харчевой. Заменяем теперь каждый бильярд B_0 на бильярд B_1 , удлинив его, выбрав другую дугу гиперболы. В этом случае можно показать, что слоеение на уровне $\lambda < b$ не изменится. При этом все перестройки, соответствующие графу W^- , происходят на уровнях $\lambda < b$.

Рассмотрим набор торов Лиувилля, соответствующий движению на уровне интеграла $b - \varepsilon$ для достаточно малого положительного ε . Количество торов в точности равно количеству “верхних” ребер в графе W^- . При прохождении уровня $\Lambda = b$ движение по бильярду B_1 распадается на два движения по бильярдам B_0 . Каждый тор верхнего ребра в графе W^- распадается на два тора. Перестройка очевидно, происходит с помощью атома B .

Опишем метки в возникающей молекуле. Рассмотрим тор Лиувилля и его проекцию на бильярдную книжку. Она проектируется в некоторое количество бильярдов B_1 . В каждом бильярде B_1 рассмотрим связную часть прообраза некоторых фиксированных эллипса и гиперболы (см. рис. 4). Очевидно, что на торе эти циклы пересекаются в одной точке. При этом эта пара циклов всегда является подходящей парой циклов для некоторого атома. Например, в графе W^- на торах между седловыми атомами прообразы эллипсов – это циклы λ_S , а прообразы гипербол – дополняющие их циклы μ_S . Все они гомологичны и одинаково ориентированы, что приводит к меткам $r = \infty, \varepsilon = 1$ на ребрах между седловыми атомами в графе W^- . Аналогично разбираются случаи всех остальных ребер: на них циклы λ уже не гомологичны, что приводит к меткам $r = 0, \varepsilon = 1$, при этом вклад в метку n всегда нулевой.

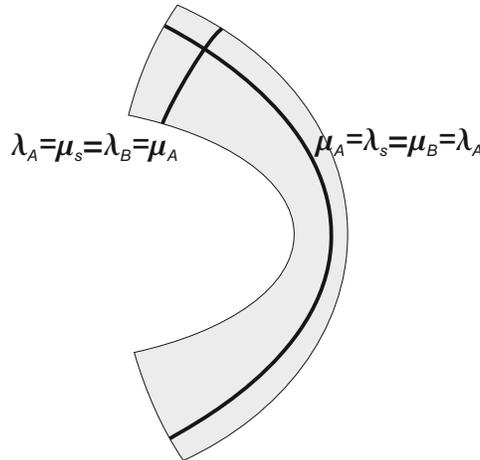


Рис. 4: В представленных равенствах левые циклы лежат на граничных торах минимальных атомов A , а правые – максимальных.

Для получения искомой бильярдной книжки осталось заменить каждый бильярд B_1 на бильярд A_0 . При этом все дуги эллипсов с параметром 0 переходят в дугу гиперболы с параметром a (вертикальная прямая). Все склейки теперь происходят вдоль дуг гипербол. Этот переход переворачивает молекулу, в результате мы получаем, что требовалось. \square

2.3. Реализация бильярдами слоений с произвольным классом Эйлера на многообразии Зейферта типа прямого произведения

В данном разделе получим существенное усиление результатов работ [16] и [14] по моделированию подграфов инварианта Фоенко–Цишанга, состоящих из седловых атомов, все особые слои которых гомологичны (а потоки поля $\text{sgrad } H$ на них сонаправлены). В прообразе такого объекта, напомним, находится трехмерное многообразие Зейферта Q со структурой S^1 -расслоения. Оно согласовано со слоением Лиувилля: каждая окружность лежит на некотором уровне интеграла F . В частности, все критические окружности интегрируемой системы, лежащие в Q , являются боттовскими, седловыми и гомологичны друг другу. Такой объект в теории топологической классификации интегрируемых систем был назван “семьей”, а его инвариант состоит из графа (все вершины — седловые атомы, все метки на ребрах равны $r = \infty, \varepsilon = +1$) и целого числа — метки n (которая в ряде случаев соответствует классу Эйлера расслоений Зейферта, подробнее см. [35]).

Основной результат можно сформулировать так: пусть расслоение Зейферта имеет вид прямого произведения (окружности S^1 на двумерную базу M^2 , т.е. все 3-атомы не имеют звездочек, см. [12]). Тогда пара из любой такой семьи W и любого значения целочисленной метки $n = t$ на ней реализуется бильярдом, а именно, содержится в инварианте Фоенко–Цишанга слоения Лиувилля построенных ниже книжек $\mathbb{W}(W, m)$.

Ранее нами было показано [14], что в слоениях бильярдных систем реализуется произвольное значение метки n , т.е. для каждого $m \in \mathbb{Z}$ была построена бильярдная книжка, у которой одна из семей инварианта Фоенко–Цишанга имеет метку $n = m$. Отметим, что все метки n проанализированных ранее интегрируемых систем из приложений принимают одно из значений $0, \pm 1, \pm 2$

Пункт 4 локальной гипотезы задавал более общий вопрос: любая ли пара W, m семьи W и значения m метки n реализуется бильярдом? Вопрос не очевиден: например, в конструкции из работы [14] сложность семьи (количество критических окружностей системы) и ее валентность (количество граничных торов у многообразия Зейферта) линейно росли с ростом m . В работе [16] была предложена новая конструкция, где на семье из одного конкретного атома с двумя критическими окружностями и четырьмя граничными торами было реализовано любое значение метки n .

Пусть W — связный граф Фоенко (граф Роба, в вершинах которого указаны атомы-перестройки), у которого удалены все минимаксные атомы A , а седловые особенности не содержат особых слоев расслоения Зейферта (т.е. описывающие их атомы не содержат звездочек). Для этого графа построим по алгоритму из теоремы 4 бильярдную книжку $\mathbb{W}(W, 0)$. Эта книжка склеена из бильярдов вида A_0 , не содержащих фокусов и расположенных между ветвями гипербол из фиксированного софокусного семейства. Потребуем, что все бильярды A_0 были ограничены дугами одного и того же эллипса.

Все ребра графа W ориентируются по направлению роста дополнительного интеграла. Рассмотрим произвольное нижнее ребро e этого графа. При реализации книжкой $\mathbb{W}(W, 0)$ это ребро (с нулевой меткой r) соединяет граф W с атомом B , из которого исходят два атома A . Напомним, что траектории, которые отвечают этому участку молекулы устроены так. Пусть $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^k$ это набор бильярдов-листов книжки $\mathbb{W}(W, 0)$ причем по бильярдам A_0^i с нечетными номерами i траектории, отвечающие ребру e совершают движения слева направо, а с четными — справа налево. Направление движения меняется в те моменты, когда траектория достигает граничной гиперболы и переходит на другой бильярд. Если k нечетно, то как минимум один бильярд в этом наборе встретится дважды (один раз с четным, а другой раз — с нечетным номером).

При движении по ребру e вниз при достижении атома B выделяется одна критическая траектория, проходящая по отрезкам фокальной прямой. Расположенным ниже этого атома B

ребрам отвечают движения по двум наборов бильярдных $B_0^1, B_0^2, \dots, B_0^k$, расположенных выше и ниже фокальной прямой. Они являются подобластями бильярдных $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^k$ и получены из них удалением внутренней эллипса – каустики, которой касаются траектории.

Модифицируем книжку $\mathbb{B}(W, 0)$ следующим образом. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольное натуральное число. Рассмотрим бильярды A_0^1, A_0^2 и A_0^3 . Пусть бильярды A_0^1 и A_0^2 склеены вдоль гиперболической дуги h_1 , а бильярды A_0^2 и A_0^3 вдоль гиперболической дуги h_2 . Траектории проходящие по листу A_0^1 слева направо после удара о корешок склейки h_1 переходят на бильярд A_0^2 и продолжают движение справа налево. Траектории проходящие по листу A_0^2 справа налево после удара о корешок склейки h_2 переходят на бильярд A_0^3 и продолжают движение слева направо. В силу алгоритма построения книжки одна из дуг h_1 или h_2 лежит на оси Oy . Без ограничения общности можно считать, что это дуга h_1 , так как можно считать, что на последнем шаге алгоритма все невыпуклые эллиптические дуги склейки перешли в гиперболические дуги, расположенные левее оси Oy .

Приклеим к корешку h_1 справа от вертикальной оси m подходящих бильярдных A_1 (то есть ограниченных тем же эллипсом, что и все бильярды A_0 и вертикальной прямой). На корешке h_1 изменим перестановку, вставив в цикл между номерами бильярдных A_0^1 и A_0^2 новые номера, присвоенные бильярдам A_1 .

Приклеим к корешку h_2 слева от него m подходящих бильярдных A_1 (то есть ограниченных тем же эллипсом, что и все бильярды A_0 и гиперболой, на которой лежит корешок h_2). На корешке h_2 изменим перестановку, вставив в цикл между номерами бильярдных A_0^2 и A_0^3 новые номера, присвоенные бильярдам A_1 . Полученную бильярдную книжку обозначим через $\mathbb{B}(W, m)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть W – произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы A . Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.

Тогда алгоритмически строится бильярдная книжка $\mathbb{B}(W, m)$, склеенная из бильярдных A_0 и A_1 , меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа W приписывается атом B и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами A . К каждому свободному верхнему ребру графа W приписывается атом A . На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки $r = 0, \varepsilon = 1$. Семье, которую образует граф W , отвечает метка $n = m$, все остальные семьи имеют метку $n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сделаем важное замечание о связи траекторий бильярдных книжек $\mathbb{B}(W, 0)$ и $\mathbb{B}(W, m)$. Оказывается, что при таком определении книжки $\mathbb{B}(W, m)$ меняются только торы Лиувилля (и отвечающие им траектории), соответствующие в молекуле Фоменко выбранному ребру e . В самом деле, для того чтобы траектория попала на бильярды A_1 материальная точка должна либо удариться в ребро h_1 , совершая движение слева направо, либо удариться в ребро h_2 при движении в обратном направлении. При этом очевидно, она должна находиться на выделенных нами бильярдах A_0^1 и A_0^2 . Это позволяет говорить о том, что матрицы склейки на остальных ребрах молекулы не меняются.

Осталось рассмотреть траектории, проходящие по выделенным бильярдам $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^k$ в указанном в алгоритме направлении (по нечетным – слева направо, по четным – справа налево). Анализ соответствующих торов и траекторий почти дословно повторяет доказательство Предложения 2. Матрица склейки на ребре e теперь будет давать вклад в метку n для верхней семьи равный m . \square

3. Бильярдные книжки малой сложности: классификация, свойства слоений Лиувилля

В работах [29] и [31] В.В.Ведюшкиной были классифицированы топологические бильярды, имеющие только с выпуклые дуги склейки и имеющие произвольные (выпуклые и невыпуклые) дуги склейки. Напомним, что склейка стола-комплекса происходит по общим гладким дугам границы стола (эллипсам, гиперболам или отрезкам двух осей). А именно, для каждого плоского листа (элементарного бильярдного стола) определена проекция на плоскость, причем проекции всех граничных дуг всех листов являются дугами кривых из одного и того же семейства софокусных квадрик (в том числе, двух вырожденных).

Напомним, что в топологическом бильярде каждая граничная дуга плоских столов комплекса является либо склейкой ровно двух плоских столов (проекции которых лежат или по одну, или по разные стороны от проекции ребра склейки, т.е. дуги некоторой софокусной квадрики), либо свободной границей ровно одного плоского листа.

При этом могут возникать вершины склейки: когда два листа склеиваются хотя был по двум своим граничным дугам, имеющим общую точку. Здесь и далее мы полагаем, что каждый угол каждого плоского листа равен $\pi/2$, т.е. не равен $3\pi/2$.

В терминах бильярдных книжек топологический бильярд можно описать следующим образом. Каждая перестановка на каждом 1-ребре стола-комплекса является тождественной (свободная границы) или транспозицией. Тем самым, каждой дуге на плоскости (проекции одной или несколько ребер стола-комплекса) сопоставлена перестановка, состоящая из неподвижных точек и независимых транспозиций. В каждой вершине выполнено условие коммутирования перестановок на пересекающихся ребрах.

Естественным следующим вопросом является задача классификации бильярдных книжек. Данная задача существенно сложнее, чем в случае топологических бильярдов. Дело в том, последние не могли иметь “разветвлений”: окрестность каждой точки конфигурационного пространства гомеоморфна или открытому диску, или полудиску (как частный случай, четверть диска с центром в вершине угла). Единственным же условием для книжек является коммутирование перестановок в каждой вершине комплекса.

3.1. Классификация книжек с малым числом ребер склейки

Здесь и далее перестановки на эллиптических дугах обозначим символом ω , на гиперболических — символом σ , а на фокальных, т.е. лежащих на оси Ox — символом τ .

Опишем все бильярдные столы-комплексы с малым (1, 2 или 3) числом ребер склейки. Поскольку граница проекции стола на плоскость заведомо не может иметь меньше гладких граничных дуг, чем количество ребер комплекса, то граница стола может быть лишь областями вида A_2, A_1, A'_2, A'_1 (см. например, [34], а также рис. 1):

- область A_2 : внутренность эллипса, в ней два фокуса;
- область A_1 : ограничена дугой гиперболы и дугой эллипса, в ней один фокус;
- область A'_1 и A'_2 : верхняя половина $y \geq 0$ областей A_1 и A_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1. Любая бильярдная книжка с одним 1-ребром имеет вид $A_2(N, \omega)$, т.е. является склейкой N эллипсов по циклической перестановке $\omega = (1, \dots, N)$.

2. Особыми значениями интеграла являются $\lambda = 0, b, a$. При этом уровень $\lambda = 0$ состоит из двух (минимальных) окружностей, уровень $\lambda = a$ состоит из одной (при нечетном N) или двух (при четном N) максимальных окружностей. Уровень $\lambda = b$ содержит такое же количество особых окружностей, и слоение Лиувилля в окрестности такой окружности послойно гомеоморфно седловой боттовской (невыврожденной) особенности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Первый факт следует из того, что элементарные бильярды (кроме области A_2 , ограниченной эллипсом) имеют более одной граничной дуги.

2. Класс гомеоморфности поверхности уровня энергии и интеграла бильярдной системы без потенциала меняется лишь при уровнях λ , соответствующих полуосям ($\lambda = b, a$) или граничным дугам склеиваемых 2-граней комплекса.

Уровень $\lambda = 0$ содержит границу каждой плоской области стола $A_2(N, \omega)$. Поскольку в комплексе имеется лишь одно такое ребро, то ему соответствует движение по эллипсу (по или против часовой стрелки). По аналогии с областями $A_2, 2A_2$ и т.п. (см. [29]) нетрудно видеть, что в окрестности данной окружности слои являются торами, и каждая из двух полулокальных особенностей послойно гомеоморфна минимальному атому A [12], т.е. произведению расслоенного диска на окружность.

При $\lambda = a$ в проекции на плоскость Oxy движение частицы происходит по вертикальной оси Oy . Каждая траектория частицы замкнута, т.е. после нескольких отражений она должна вернуться на тот же лист и иметь то же направление (вверх или вниз), что в начале. Поскольку каждое отражение меняет направление, то циклу соответствует четное число ударов о границу (т.е. четное количество применения ω — степень перестановки ω^2). Если $N:2$, то перестановка ω^2 для циклической ω состоит из двух циклов длины $N/2$. Аналогично доказательству для простейших изученных книжек [36], это один или два атома A .

В случае $\lambda = b$ особое множество проектируется на ось Ox . При этом проекция особого слоя (и близких слоев $\lambda = b \pm \varepsilon$) содержит не только окрестность данного отрезка. Аналогично случаю $\lambda = a$, особое множество состоит из двух окружностей. В окрестности каждой точки отрезка оси Ox (лежащего внутри эллипса), исключая фокусы и концы отрезка (отражение от границы), слоение Лиувилля послойно гомеоморфно слоению вблизи седловой боттовской точки ранга 1 в Q^3 интегрируемой системы. Поскольку фокусы лежат далеко от границы, то для них то же самое следует из анализа области A_2 , а для окрестности точки отражения это следует по аналогии с топологическими бильярдами.

Предложение доказано. \square

Теперь опишем все бильярдные книжки с ровно двумя 1-ребрами склейки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Любая бильярдная книжка с двумя граничными ребрами, т.е. комплекс с двумя 1-клетками, является либо склейкой N колец C_2 (ограниченных двумя эллипсами) по перестановкам $\omega_1 = (1, \dots, N)$ и $\omega_2 = (i(1), \dots, i(N))$ порядка N на внешнем и внутреннем эллипсах, либо склейкой N листов вида A_1 по перестановкам σ, ω на гиперболическом и эллиптическом корешках либо склейкой N листов типа A'_2 с перестановками ω, τ на эллиптическом и фокальном корешках следующего вида:

- $C_2(N, \omega_1, \omega_2) : N | in\mathbb{N}, \omega_1 = (1, \dots, N), \omega_2 = (i(1), \dots, i(N)) \in S_n$, где порядок ω_2 равен N .
- $A'_2(N, \tau, \omega) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \dots, N), \tau = \sigma^k, \gcd(k, N) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оба ребра (1-клетки) книжки проецируются на одну и ту же квадрику, то книжка не связна. Если проекции двух ребер не пересекаются, то это два софокусных эллипса (и перенумерацией одну из перестановок можно записать как $(1, \dots, N)$, а ограничения на другую отсутствуют).

Если два ребра (и их проекции) пересекаются, то перестановки коммутируют. Поскольку над каждой дугой проекции находится лишь одно ребро книжки, то перестановки имеют длину N . Следовательно, одна есть степень другой, причем наибольший общий делитель степени k и порядка N равен 1. \square

Теперь обсудим свойства особых окружностей их слоений Лиувилля. А именно, выясним, когда окрестность каждой такой точки (и их орбиты целиком) в трехмерном уровне энергии

\mathbb{Q}^3 послойно гомеоморфна таковой для боттовской (невырожденной) особенности ранга 1 в интегрируемой системе.

Для биллиарда $C_2(N, \omega_1, \omega_2)$ особенность, чьи критические окружности проецируются на внутренний эллипс, будет боттовской только при $N = 2$, т.е. $\omega_2 = \omega_1 = (12)$. При $N = 1$ особенности тут нет: соответствующие слои гомеоморфны торам. Остальным уровням интеграла соответствуют боттовские особенности при всех N и ω_2 порядка N .

Фокальному уровню биллиарда на столе $A_1(N, \sigma, \omega)$ соответствует одна или несколько седловых критических окружностей, т.е. окрестность каждой такой окружности в полулокальной особенности послойно гомеоморфна боттовской (невырожденной) седловой окружности. На удалении от концевых точек отрезка (оси Ox , лежащего внутри данной области типа A_1) это следует из свойств слоения для A_1 , а вблизи концов (лежащих “вдали” от фокусов) — из поведения слоения Лиувилля при склейке (в биллиардных книжках), далекой от фокусов семейства квадрик.

Фокальному уровню биллиарда на столе $A'_2(N, \tau, \omega)$ соответствует неботтовская седловая критическая окружность, если τ содержит циклы длины 3 и более (т.к. что напрямую следует для невыпуклой склейки более чем двух областей). В оставшемся (боттовском) случае имеем $N = 2, \omega = \omega^1 = (12)$. Его инвариант Фоменко–Цишанга известен и вычислен в [34] (там такой стол был обозначен как $\delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Любая биллиардная книжка с тремя граничными ребрами является либо склейкой N эллиптических колец C_2 по перестановкам ω_1 и ω_2 , где одна из них равна $(1, \dots, N)$ а другая состоит из двух независимых циклов (сумма длин которых равна N), либо склейкой N листов вида A_1 по перестановкам σ, ω либо склейкой A'_2 по перестановкам τ, ω следующего вида:*

- $A_1(N, \sigma, \omega) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \dots, N), \omega = \sigma^k, \gcd(k, N) = 2;$
- $A_2(N, \tau, \omega) : N \in \mathbb{N}, \gcd(k, N) = 2$, где $\omega = (1, \dots, N), \tau = \omega^k$ или $\tau = (1, \dots, N), \sigma = \tau^k$.
- стол склеен из N_1 “левых” половин эллипса и N_2 “правых” половин эллипса (областей типа A_1). Тогда $N_1 = N_2 = N$, и слоение Лиувилля такого биллиарда совпадает со слоением биллиарда, склеенного из $2N$ областей типа A_1 по перестановкам вида $\sigma = (1, \dots, 2N)$ на вертикальной (гиперболической) граничной дуге и $\omega = \sigma^2$ на эллиптической. Все особые окружности являются боттовскими
- стол склеен из N областей типа A'_1 (например, часть эллипса, лежащая в одном из четырех квадрантов). При этом каждая из перестановок ω (на эллиптической дуге), σ (на гиперболической или вертикальной) и τ (на фокальной) должны быть циклическими длинами N степенями одной и той же перестановки (например, $\sigma = \omega^k, \tau = \omega^m$). Исключая $N = 1, 2$, слоения Лиувилля обладают неботтовскими особенностями.

Случай $A_1(N, \sigma, \omega)$ с перестановками $\sigma = (1, \dots, N), \omega = \sigma^k$ и наибольшим общим делителем $\gcd(k, N) = 2$ означает, что перестановка ω имеет 2 цикла длины $N/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. *Разумеется, можно построить стол из класса $A_1(N, \sigma, \omega)$, поменяв перестановки σ, ω местами, т.е. взяв $\sigma = \omega^2, \omega = (1, \dots, N)$. Слоения Лиувилля двух таких систем будут отличаться направлением роста интеграла, а сами столы-комплексы будут изоморфны друг другу.*

Отметим, что при разбиении областей A_1 или A'_2 на половинки (и нетривиальной перестановки их склейки) мы получим не менее четырех ребер склейки (новое ребро поделит хотя бы одну из существующих дуг хотя бы на 2 части).

Стол $A'_1(N, \omega, \sigma, \tau)$, исключая $\tau = (1, 2) \dots (2m-1, 2m)(2m+1) \dots (N)$, имеет неботтовские перестройки на уровне $\lambda = b$. При условии наличия не более трех ребер комплекса, имеем или $N = 1, \sigma = \omega = \tau = (1) = id$, или $N = 2, \sigma = \omega = \tau = (12)$. При $N = 1$ слоение Лиувилля не имеет седловых особенностей, а во втором — имеет атом A^* с метками $r = 1/2$, меткой $n = -1$ и изоэнергетической поверхностью Q^3 , гомеоморфной сферическому расслоению Зейфера с тремя особыми слоями [34].

3.2. Биллиардные столы над областью A_1

В данном разделе обсудим вопрос классификации билиардных книжек $A_1(N, \sigma, \omega)$ над областью A_1 (содержащей один фокус и ограниченной дугой эллипса и дугой ветви гиперболы), склеенных из N ее одинаковых экземпляров по перестановкам σ, ω на гиперболической и эллиптической дугах соответственно.

Напомним, что перестановки ω и σ коммутируют, а связность стола означает, что образ любого элемента $1 \dots N$ под действием перестановок $\omega^\alpha, \sigma^\beta$ по всем $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ совпадает со всем множеством N листов (т.е. группа, порожденная перестановками σ и ω , действует транзитивно на множестве листов).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\omega \circ \sigma = \sigma \circ \omega$, и элемент 1 входит в $O_\sigma(1)$ — независимый цикл длины p перестановки σ . Тогда множество $O_\sigma(\omega(1))$ есть независимый цикл длины p перестановки σ , который либо совпадает с $O_\sigma(1)$ (если $\omega(1) = \sigma^k(1), 0 < k < p$), либо не пересекается с $O_\sigma(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный факт следует из коммутативности σ и ω : $\omega(\sigma^k(1)) = \sigma^k(\omega(1))$. Если $\omega(1) \in O_\sigma(1)$, то цикл $O_\sigma(\omega(1)) \subset O_\sigma(1)$. Тогда множество образов 1 при действии всех $\omega^\alpha, \sigma^\beta$ совпадает с $O_\sigma(1)$, т.е. из связности стола будет следовать цикличность перестановок σ и $\omega = \sigma^k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пара чисел k, N полностью задает данную пару перестановок. Перестановка $\omega = \sigma^k$ имеет $\gcd(N, k)$ независимых циклов длины $\frac{N}{\gcd(N, k)}$. Отметим, что при $\gcd(N, k) = 2$ отсюда следует результат Предложения 4 для столов $A_1(\omega, \sigma, N)$.

Если $\omega(1) \notin O_\sigma(1)$, то циклы $O_\sigma(1)$ и $O_\sigma(\omega(1))$ не пересекаются. Т.к. число p — первый натуральный номер, начиная с которого $\sigma^p(1) = \sigma^0(1) = 1$, то $\omega(\sigma^k(1)) = \sigma^k(\omega(1)) \neq \omega(1)$ при $0 < k < p$ (и номера совпадают при $k = p$). \square

Тем самым, все циклы $O_\sigma(1), O_\sigma(\omega(1)), \dots, O_\sigma(\omega^q(1)) = O_\sigma(1)$ имеют одну и ту же длину p . Здесь q — длина цикла $O_\omega(1)$ (и остальных независимых циклов перестановки ω).

Иными словами, из связности слоя следует, что обе перестановки σ и ω есть произведение независимых циклов соответствующих длин p и q . В группе всех перестановок вида $\omega^\alpha, \sigma^\beta$ степени перестановки σ и степени перестановки ω образуют циклические подгруппы.

Тем самым, возникают следующие соотношения для некоторых наименьших натуральных s, t и некоторых $\alpha \in [0, p-1]$:

$$\omega^s = \sigma^\beta, \quad \sigma^t = \omega^\alpha, \quad \alpha \in [0, q-1], \quad \beta \in [0, p-1].$$

Стартуем с чисел N, p, q . Здесь N — количество листов в книжке, а числа p, q — длины циклов σ и ω соответственно. В качестве таких длин подходят любые делители N , такие что $pq \mid N$. Количество циклов в перестановках σ и ω равно N/p и N/q соответственно.

Циклы $O_\sigma(1)$ и $O_\omega(1)$ имеют pq/N пересечений. Расстояние между двумя последовательными (в смысле σ , например) пересечениями равно $p/(pq/N) = N/q$. Значит, такая степень σ переведет первое в O_σ пересечение в следующее. Тем самым,

$$s = N/p, \quad t = N/q.$$

Числа α, β являются произведениями чисел N/p и N/q с некоторыми порождающими элементами (натуральными числами a, b) в циклической группе длины $\frac{pq}{N}$ (т.к. орбиты элемента 1 при действии степени перестановки σ^β или ω^α порождают пересечение O_σ и O_ω целиком).

$$\sigma^t = \omega^\alpha = \omega^{a \cdot s} \quad \omega^s = \sigma^\beta = \sigma^{b \cdot t} = (\sigma^t)^b = \omega^{ab \cdot s}.$$

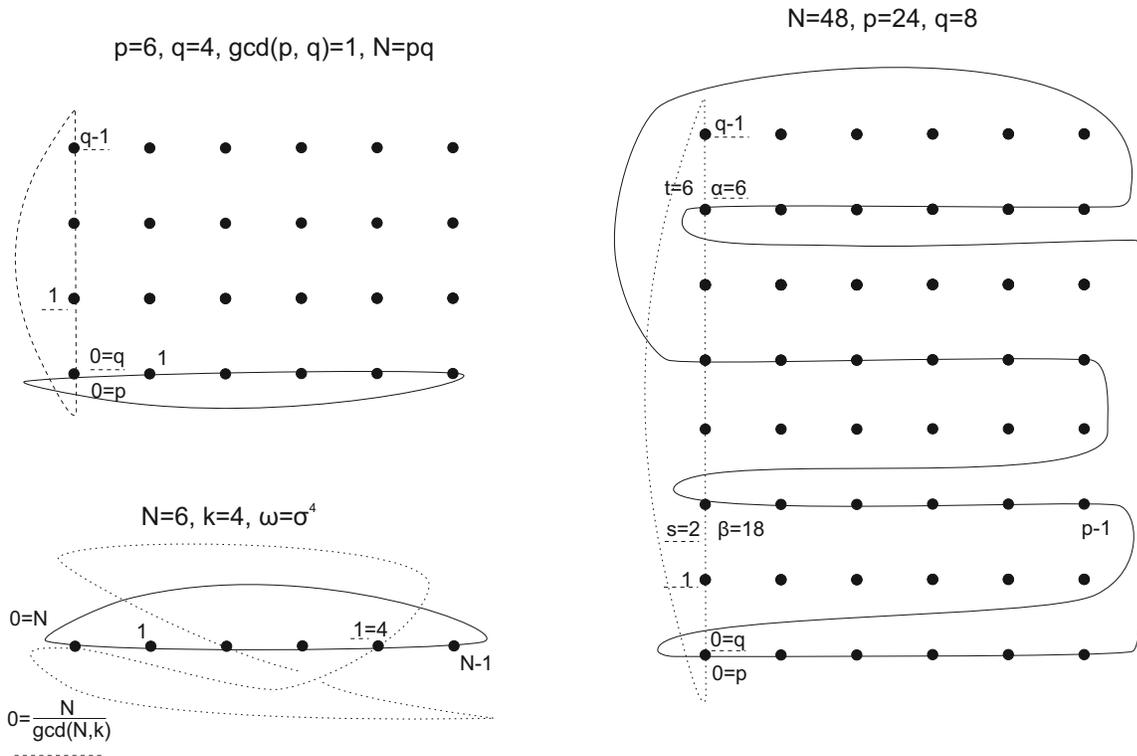


Рис. 5: Действие пары перестановок на множестве из N элементов, отмеченных точками. Сплошной и штриховой линией отмечены независимые циклы перестановок σ и ω соответственно. Указаны степени, в которые надо возвести перестановки σ (число) и ω (число с подчеркиванием) для получения перехода в указанную точку из левой нижней. Иллюстрации приведены для трех случаев: а. $\omega = \sigma^k$ (внизу слева), $N = pq$ (вверху слева), $N < pq, \omega^2 = \sigma^{18}, \sigma^6 = \omega^6$ (справа).

Иначе говоря, имеем

$$ab \equiv 1 \pmod{\frac{p \cdot q}{N}}.$$

Тем самым, в кольце вычетов \mathbb{Z}_r , где $r = \frac{p \cdot q}{N}$, надо выбрать группу обратимых элементов \mathbb{Z}_r^\times , и в ней взять два взаимно-обратных элемента a, b .

ТЕОРЕМА 6. *Связная биллиардная книжка типа $A_1(N, p, q)$ полностью задается следующими данными:*

- $N \in \mathbb{N}$ — количество листов книжки

- $p, q: N \dot{:} p, N \dot{:} q, p \cdot q \dot{:} N$ — длины циклов $O_\sigma(1), O_\omega(1)$ перестановок σ и ω соотв.,
- $a \in \mathbb{Z}_r^\times$ (где $r = \frac{p \cdot q}{N} \in \mathbb{N}$) задает величины сдвигов на пересечении циклов $O_\sigma(1)$ и $O_\omega(1)$

$$\sigma^t = \omega^a = \omega^{at}, \quad \omega^s = \sigma^b = \sigma^{bt}, \quad s = \frac{N}{q}, \quad t = \frac{N}{p}, \quad a \cdot b \equiv 1 \pmod{r}.$$

Все такие билиарды имеют боттовские особенности. Данный результат несложно обобщить на случай трех коммутирующих перестановок, где третья перестановка τ стоит на фокальной граничной дуге. Если она не является произведением независимых транспозиций и неподвижных элементов, то особенность на уровне $\lambda = b$ заведомо не будет боттовской.

3.3. Инварианты слоений для книжек над областью A_1

Выше мы получили классификацию билиардных книжек малой сложности, в частности, столов-комплексов, имеющих малое количество одномерных ребер — дуг склейки. Рассмотрим случай, когда одна из перестановок — циклическая порядка m . Тогда из условия коммутирования следует, что другая перестановка будет ее степенью.

Задача вычисления инвариантов билиардов на столах, листы которых содержат фокусы семейства эллипсов и гипербол, весьма непростая задача даже в случае плоских и топологических билиардов.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ m)$ — циклическая перестановка из m элементов. Рассмотрим билиардные книжки $A_1(m, \sigma, id)$, склеенные из m экземпляров билиарда A_1 по перестановкам $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ m)$ на гиперболическом корешке и $\omega = id$ на эллиптическом корешке, а также билиардные книжки $A_1(m, \sigma, \sigma^{-1})$ для $\omega = \sigma^{-1}$. Тогда инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля этих билиардов на изоэнергетической поверхности $Q_h^3, h > 0$ изображены на рис. 7а) для билиардной книжки $A_1(m, \sigma, id)$ и на рис. 7б) (для билиардной книжки $A_1(m, \sigma, \sigma^{-1})$).

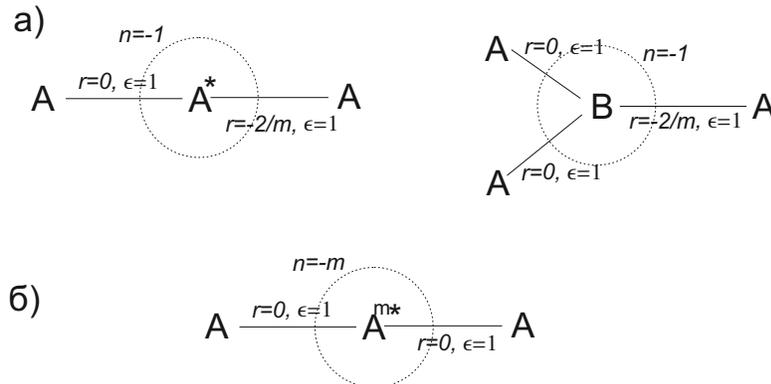


Рис. 6: Инварианты Фоменко–Цишанга для книжки, склеенной из m экземпляров билиарда A_1 , где на гиперболическом корешке стоит циклическая перестановка $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ m)$, а на эллиптическом корешке — тождественная (а) или обратная ей (б) перестановка. В случае а) вид грубой молекулы зависит от четности m . Для нечетного m — молекула слева, а для четного — справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассмотрим случай бильярдной книжки $A_1(m, \sigma, id)$.

1a. Количество торов на уровне интеграла $\lambda < b$ (на нём траектории касаются эллипсов) описывается количеством циклов в перестановке σ^2 . В самом деле, совершая движение сверху вниз вдоль каустики-эллипса и ударяясь только в эллиптическую границу материальная точка не меняет номер бильярда. При ударе о гиперболическую границу номер бильярда увеличивается на единицу (результат необходимо взять по модулю m), но направление вдоль эллипсов (каустики и граничного) меняется на противоположное. Чтобы снова его поменять, материальной точке необходимо дважды удариться о гиперболическую границу, поменяв номер бильярда по перестановке σ^2 . Количество циклов этой перестановки фиксирует количество торов Лиувилля. Поэтому оно в случае четного m равно двум, т.к. $\sigma^2 = (1\ 3 \dots m-1)(2\ 4 \dots m)$, а в случае нечетного m – единице, т.к. $\sigma^2 = (1\ 3 \dots m\ 2\ 4 \dots m-1)$.

На уровне интеграла $\lambda > b$ (траектории касаются гипербол) всегда один тор. Материальная точка в результате ударов о гиперболическую границу может произвольно поменять номер бильярда (ударившись подходящее число раз).

На уровне интеграла $\lambda = b$ выделена ровно одна критическая траектория, проходящая по фокальной прямой. Так как можно показать, что все перестройки в бильярдах невырожденные, то вид атома этим полностью определяется. Перестройку на этом уровне можно описать и по-другому. Перестройка торов в бильярде A_1 на фокальном уровне описывается атомом A^* . Причем отмена бильярдного закона на гиперболической границе приводит к разрезу этого атома вдоль двумерного атома B , трансверсального критической окружности. Склейка m экземпляров разрезанного бильярда m в бильярдную книжку $A_1(m, \sigma, id)$ приводит к склейке m разрезанных атомов A^* . Поэтому если число m четно, то у полученного атома будет четное число “перекруток” (что делает его гомеоморфным атому B). Если m нечетно, то итоговый атом останется гомеоморфным атому A^* (см. аналогичное доказательство Предложения 1).

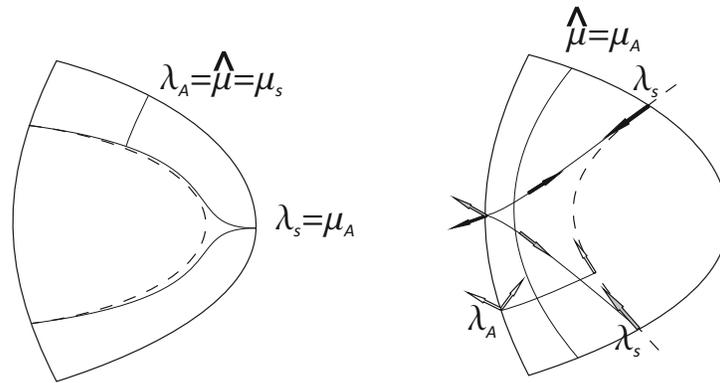


Рис. 7: Циклы для книжки $A_1(m, \sigma, id)$.

1б. Остается вычислить метки. Ориентируем все ребра по направлению к седловому атому. На рисунке 7 изображены проекции циклов на бильярдный стол. Как и в доказательстве остальных положений данной работы, мы будем изображать циклы их проекциями — кривыми на бильярдном столе, прообразы которых на торах Лиувилля будут реализовывать подходящие циклы λ и μ .

На торах, траектории на которых касаются эллипсов, проекции циклов λ_A (и соответственно μ_s) лежат только на одном листе бильярдной книжки (без ограничения общности можно считать, что на первом). Проекция циклов λ_s и μ_A проходит по всем листам книжки. Вследствие очевидных соотношений $\lambda_s = \mu_A$, $\mu_s = \lambda_A$ получаем что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$, а вкладка в метку n такая матрица не дает.

Далее вычислим метки на ребре графа, соответствующем семейству торов, для которых траектория частицы касается гипербол (т.е. λ). Разберем отдельно случаи четного и нечетного m .

1в. Пусть m четно. Тогда при взятии прообраза кривой для восстановления цикла λ_s необходимо брать часть кривой с черными векторами скорости на нечетных номерах листов бильярдной книжки и часть кривой с серыми векторами скорости на четных номерах листов бильярдной книжки (см. рис. 7). Тогда такой цикл будет пересекаться с циклом $\hat{\mu} = \mu_s$ в одной точке (напомним что проекция этого цикла лежит только в одном листе бильярда). Исчезающий цикл λ_A проходит по всем листам бильярдной книжки проходя на каждом листе от каустики до границы. В результате мы имеем на этом ребре следующие соотношения. Во-первых, $\mu_s = \mu_A$ – цикл $\hat{\mu}$ пересекается с циклом λ_A в одной точке и переходит в критическую траекторию, проходящую по гиперболическому корешку бильярда. Во-вторых, $\lambda_s = -\lambda_A + \frac{m}{2}\mu_A$. Поясним, что цикл λ_A на каждом листе бильярда проходит до каустики и обратно, так же как и соответствующая дуга-проекция цикла λ_s . Знак минус перед λ_A выбран таковым для того, чтобы итоговая матрица склейки имела отрицательный определитель (так как ранее мы фиксировали ориентацию на Q^3 ориентацией цикла μ_s выбрав её сонаправленной с ориентацией цикла μ_A). Далее заметим что цикл λ_s проходит вдоль каустики в обоих направлениях на каждой паре бильярдных A_1 , то есть в итоге он проходит вдоль каустики ровно $\frac{m}{2}$ раз. Когда соответствующий тор Лиувилля стремится к седловому значению этот цикл переходит в критическую траекторию, а когда к максимальному то наматывается на критическую подходящее число раз, оставаясь сонаправленным с ней. Это определяет знак перед μ_A в рассматриваемом соотношении. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = -\frac{2}{m}$, $\varepsilon = 1$, вклад в метку $n = [-\frac{1}{\frac{m}{2}}] = [-\frac{2}{m}] = -1$.

1г. Пусть теперь m нечетно. Тогда для восстановления цикла λ_s необходимо брать обе части кривой, изображенной на рисунке 7 (как с черными так и с серыми векторами скорости). Теперь выражение этого цикла через базис на граничном торе атома A выглядит так: $\lambda_s = -2\lambda_A + m\mu_A$ (фактически мы вынуждены были удвоить этот цикл). Далее, такой цикл λ_s теперь пересекает цикл $\hat{\mu}$ в двух точках. Теперь в качестве μ_s необходимо выбрать цикл $\frac{\hat{\mu} + \lambda_s}{2}$ (см. подробнее правила выбора циклов на граничных торах атомов со звездочками [12]). Тогда $\mu_s = \frac{\hat{\mu} + \lambda_s}{2} = \frac{\hat{\mu} - 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = \frac{\mu_A - 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = -\lambda_A + \frac{m+1}{2}\mu_A$. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -2 & m \\ -1 & \frac{m+1}{2} \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = -\frac{2}{m}$, $\varepsilon = 1$, вклад в метку $n = [-\frac{\frac{m+1}{2}}{m}] = [-\frac{m+1}{2m}] = -1$.

2. Рассмотрим бильярдную книжку $A_1(m, \sigma, \sigma^{-1})$. Она отличается от предыдущей тем, что вместо тождественной перестановки на эллиптическом корешке теперь на нём стоит обратная к σ перестановка.

2а. На минимальном и максимальном уровнях интеграла в силу симметрии теперь одна особая траектория (и примыкающий к ней один тор). А на седловом – ровно m критических траекторий, проходящих по фокальной прямой: траектория двигая по листу i влево и по листу $i + 1 \bmod m$ влево. Тогда, атом описывающий перестройку однозначно определяется как атом A^{m*} , где число звездочек равно m (только он перестраивает один тор в один так чтобы на особом слое лежало m критических траекторий). Накрывающий его атом C_m может быть восстановлен как прообраз дуги фиксированной гиперболы.

2б. Вычислим метки. Отметим, что на ребре соответствующем тору, траектории которого касаются эллипсов проекции циклов можно взять также как на рисунке 7. Однако теперь цикл $\lambda_A = \hat{\mu} = \mu_s$ проходит по всем листам бильярдной книжки, а цикл $\lambda_s = \mu_A$ только по двум (например по первому и последнему). Поэтому они по-прежнему пересекаются только в одной точке. Рассмотрим тор, траектории которого касаются гипербол. Для выбора циклов λ_s , λ_A , $\hat{\mu}$ также воспользуемся рисунком 7. Цикл λ_s также проходит по двум листам, при этом можно

считать, что на первом листе он направлен к каустике-гиперболе, а на последнем (с номером m) от неё. Этот цикл пересекается с циклом λ_A в одной точке и переходит в критическую траекторию, проходящую по гиперболическому корешку при стремлении тора к критической максимальной окружности. Следовательно, $\lambda_s = \mu_A$.

Для выбора μ_s согласно правилу выбора циклов необходимо чтобы выполнялось следующее соотношение $\frac{\sum \hat{\mu} + m\lambda_s}{2} = \sum \mu_s$ так как седловой атом имеет ровно m звездочек. На торе где траектории касаются эллипсов мы имеем один цикл $\hat{\mu}$ который в одной точке пересекается с циклом λ_s . Поэтому подправить прибавив необходимое число циклов λ_s необходимо цикл $\hat{\mu}$ на другом ребре.

2в. Найдем связь между циклами $\hat{\mu}$ (связной частью прообраза дуги гиперболы) и циклами λ_A и $\mu_A = \lambda_s$. Цикл μ_A проходит вдоль каустики в обоих направлениях один раз, и от каустики до гиперболического корешка в обе стороны дважды. Цикл λ_A проходит от каустики до гиперболического корешка и обратно m раз (по разу на каждом листе). Сколько раз вдоль каустики проходит связная часть прообраза дуги гиперболы (цикл $\hat{\mu}$) зависит от четности m . Если m четно, то циклов $\hat{\mu}$ два. Для одного из них на нечетных листах вектора скорости направлены вверх, а на нечетных – вниз, а для другого – наоборот. Получается движение вдоль каустики и обратно было совершено $\frac{m}{2}$ раз. Если m нечетно, то движение вдоль каустики и обратно было совершено ровно m раз (на каждом листе вверх и вниз). Получаем, что при нечетном m искомое соотношение имеет вид

$$-2\lambda_A + \hat{\mu} = m\mu_A,$$

а при четном

$$-2\lambda_A + 2\hat{\mu} = m\mu_A.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, знак минус перед λ_A выбран таковым для того, чтобы итоговая матрица склейки имела отрицательный определитель. Дело в том, что ориентацию цикла $\hat{\mu}$ на этом торе мы уже зафиксировали совпадающей с ориентацией цикла μ_A .

2г. Пусть теперь m нечетно. Тогда цикл $\hat{\mu}$ один и мы получаем, что

$$\mu_s = \frac{\hat{\mu} + m\lambda_s}{2} = \frac{m\mu_A + 2\lambda_A + m\lambda_s}{2} = \frac{m\mu_A + 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = \lambda_A + m\mu_A.$$

Если m четно, то циклов $\hat{\mu}$ два и мы получаем, что

$$\mu_s = \hat{\mu} + \frac{m\lambda_s}{2} = \frac{m}{2}\mu_A + \lambda_A + \frac{m\lambda_s}{2} = \frac{m}{2}\mu_A + \lambda_A + \frac{m\mu_A}{2} = \lambda_A + m\mu_A.$$

Матрица склейки равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$, $n = [-\frac{m}{1}] = -m$.

□

4. Заключение

Построенные в работе бильярды показывают, что для многообразия Зейферта без особых слоев можно *независимо* выбирать значение метки n и тип слоения Лиувилля (задаваемый связным подграфом с седловыми 3-атомами без звездочек в вершинах). Вопрос о реализации многообразий Зейферта со слоями $(1, 2)$, т.е. седловыми критическими окружностями, имеющими неориентируемую сепаратрисную диаграмму, пока открыт. Было бы интересно выяснить, можно ли модифицировать предложенную в работе конструкцию для нового случая. Начатая в работе классификация бильярдных книжек и вычисление их инвариантов также весьма интересна и открывает много вопросов, связанных с теорией накрытий, алгеброй и топологией.

При решении задач о бильярдных книжках и их слоениях, как ожидается, возникнут связи с рядом задач и направлений алгебры и теории чисел: конечные группы, кольца вычетов, коммутирующие перестановки и вопросы делимости. Например, в одной из задач о бильярдных столах, гомеоморфных тору, полученный ответ выражался в терминах коэффициентов Безу [37] из разложения наибольшего общего делителя.

Кроме того, поскольку оба объекта — инвариант Фоменко–Цишанга и бильярдный стол-комплекс — допускают описание в виде графов, оснащенных перестановками и некоторыми метками, а вычисление инварианта бильярда не требует интегрирования или решения систем алгебраических уравнений (т.е. допускает чисто комбинаторные решения), то вызывает большой интерес построение алгоритма вычисления такого инварианта для бильярдной книжки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы // Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
2. Табачников С. Л. Геометрия и бильярды // М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский инсп. комп. исслед., 2011.
3. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе // М.; Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.
4. Козлов В.В., Трещев Д.В. *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991.
5. Glutyuk A. On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature // J. of the Europ. Math. Soc. 2021. V. 23, №3. P. 995-1049.
6. Kaloshin V., Sorrentino A. On the local Birkhoff conjecture for convex billiards // Ann. of Math. 2018. V. 188, №1. P. 315-380.
7. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. Т. 209, №12. С. 17-56.
8. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. Унив., Матем. Мех. 2019. №3. С. 15-25.
9. Фокичева В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // ДАН. 2015. Т. 465, №2. С. 150-153.
10. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, №6. С. 1276-1307.
11. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, №3. С. 546-575.
12. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2 // Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”. 1999.
13. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Ливилля интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2021. Т. 212, №8. С. 89-150.

14. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех. 2020. №4. С. 22-28.
15. Ведюшкина В. В. Локальное моделирование слоений Лиувилля бильярдами: реализация реберных инвариантов // Вестн. Моск. Унив. Матем. Механ. №2. С. 60-64.
16. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А., Фоменко А. Т. Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. Матем., Механ. Процессы упр. 2020. Т. 493. С. 9-12.
17. Якоби К. Лекции по динамике, М., Л. ОНТИ. 1936.
18. Glutsyuk A. A. On Two-Dimensional Polynomially Integrable Billiards on Surfaces of Constant Curvature // Dokl. Math. 2018. V. 98, №1. P. 382-385.
19. Bialy M., Mironov A. E. Algebraic non-integrability of magnetic billiards // J. Phys. A. 2016. V. 49, №45. P. 455101.
20. Glutsyuk A. A., On commuting billiards in higher-dimensional spaces of constant curvature // Pacific J. Math. 2020. V. 305, №2. P. 577-595.
21. Vedyushkina V. V, Fomenko A. T., Kharcheva I. S., Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards // Dokl. Math. 2018. V. 97, №2. P. 174-176.
22. Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. 2009. V. 14, №4-5. P. 479-494.
23. Фокичева В. В. Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. №5. С. 31-34.
24. Фокичева В. В., Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014, №4. С. 18-27.
25. Dragović V. & Radnović M.. Caustics of Poncelet Polygons and Classical Extremal Polynomials // Regul. Chaotic Dyn. 2019. V. 24, №1. P. 1-35.
26. Adabrah A. K., Dragović V., Radnović M. Elliptical Billiards in the Minkowski Plane and Extremal Polynomials // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15, №4. P. 397-407.
27. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, №2. С. 49-77.
28. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, №5. С. 1071-1075.
29. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб., 2015. Т. 206, №10. С. 127-176.
30. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, №4. С. 20-67.

31. Ведюшкина В. В. Инварианты Фоменко-Цишанга невыпуклых топологических бильярд-дов // Матем. сб. 2019. Т. 210, №3 17-74.
32. Кибкало В. А., Фоменко А. Т., Харчева И. С. Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками Труды Моск. матем. общ.. 2021. Т. 82, №1. С. 45-78.
33. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. Силовые эволюционные бильярды и бильярдная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа // Доклады РАН. 2021. Т. 496. С. 5-9.
34. Фокичева В. В. Топологическая классификация интегрируемых бильярд-дов // Канд. Диссерт., Москва. МГУ. 2016.
35. Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии // М., изд-во МГУ, 1991, 303 с.
36. Ведюшкина В. В. Интегрируемые бильярды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы // Докт. Диссерт., Москва. МГУ. 2020.
37. Ведюшкина В. В. Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе // Матем. сб. 2020. Т. 211, №2. С. 46-73.

REFERENCES

1. Birkhoff, G. D. 1927, *Dynamical systems* // AMS Colloq. Publ., 9, AMS, New York, 1927, 295p.
2. Tabachnikov, S. L. 2005, *Geometry and Billiards*, Student Mathematical Library, vol. 30.
3. Dragovic, V. & Radnovic, M. 2010, *Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics*, *Frontiers in Mathematics*, Birkhäuser, 302p.
4. Kovlov, V. V & Treshchev, D. V. 1991, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, *Transl. Math. Monogr.*, 89, AMS, Providence, RI, 1991, viii+171 p.
5. Glutyuk, A. 2021, "On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature", *J. of the Europ. Math. Soc.*, vol. 23, no. 3, pp. 995-1049.
6. Kaloshin, V. & Sorrentino, A. 2018, "On the local Birkhoff conjecture for convex billiards", *Ann. of Math.*, vol. 188, no. 1, pp. 315-380.
7. Vedyushkina, V. V. & Kharcheva, I. S. 2021, "Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems", *Sb. Math.*, vol. 209, no. 12, pp. 1690-1727.
8. Fokicheva, V. V. & Fomenko, A. T. 2019, "Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 74, no. 3, pp. 98-107.
9. Fokicheva, V. V. & Fomenko, A. T. 2015, *Integrable Billiards Model Important Integrable Cases of Rigid Body Dynamics*, *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 682-684.
10. Fomenko A. T. 1987, "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability", *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629-658.
11. Fomenko A. T. & Zieschang H. 1991, "A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom", *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567-596.

12. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification*, Chapman & Hall /CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.
13. Vedyushkina, V. V. & Kharcheva, I. S. 2021, “Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems“, *Sb. Math.*, vol. 212, no. 8, pp. 1122-1179.
14. Vedyushkina, V. V. & Kibkalo, V. A. 2020, “Realization of the numerical invariant of the Seifert fibration of integrable systems by billiards“, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 75, no. 4, pp. 161-168.
15. Vedyushkina, V. V. 2020, “Local Modeling of Liouville Foliations by Billiards: Implementation of Edge Invariants“, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 76, no. 2, pp. 60-64.
16. Vedyushkina, V. V., Kibkalo, V. A. & Fomenko, A. T. 2020, “Topological modeling of integrable systems by billiards: realization of numerical invariants“, *Dokl. Math.*, vol. 102, no. 1, pp. 269-271.
17. Jacobi, C. G. 1884, *Vorlesunger uber Dynamik*, Berlin: Druck und Verlag von Reimer.
18. Glutsyuk, A. A. 2018, “On Two-Dimensional Polynomially Integrable Billiards on Surfaces of Constant Curvature“, *Dokl. Math.*, vol. 98, no. 1, pp. 382-385.
19. Bialy, M. & Mironov A. E. 2016, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards“, *J. Phys. A.*, vol. 49, no. 45, pp. 455101.
20. Glutsyuk, A. A. 2020, “On commuting billiards in higher-dimensional spaces of constant curvature“, *Pacific J. Math.*, vol. 305, no. 2, pp. 577-595.
21. Vedyushkina, V. V., Fomenko, A. T. & Kharcheva, I. S. 2018., “Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards“, *Dokl. Math.*, vol. 97, no. 2, pp. 174-176.
22. Dragović, V. & Radnović, M. 2009, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards“, *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 14, no. 4-5, pp. 479-494.
23. Fokicheva, V. V. 2012, “Description of singularities for system “billiard in an ellipse“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 67, no. 5-6, pp. 217-220.
24. Fokicheva, V. V. 2014, “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas“, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, vol. 69, no. 4, pp. 148–158.
25. Dragović, V. & Radnović, M. 2019, “Caustics of Poncelet Polygons and Classical Extremal Polynomials“, *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 24, no. 1, pp. 1-35.
26. Adabrah, A. K., Dragović, V. & Radnović, M. 2019, “Elliptical Billiards in the Minkowski Plane and Extremal Polynomials“, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, vol. 15, no. 4, pp. 397-407.
27. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity“, *Russian Math. Surveys*, vol. 45, no. 2, pp. 59-94.
28. Fomenko, A. T. 1986, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems“, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 33, no. 2, pp. 502-506.
29. Fokicheva, V. V. 2015, “A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics“, *Sb. Math.*, vol. 206, no. 10, pp. 1463–1507.

30. Vedyushkina, V.V. & Fomenko, A.T., “Integrable Topological Billiards and Equivalent Dynamical Systems“, *Izv. Math.*, vol. 81, no. 4, pp. 688–733.
31. Vedyushkina, V.V. 2019, “The Fomenko–Zieschang invariants of nonconvex topological billiards“, *Sb. Math.*, vol. 210, no. 3, 310–363.
32. Kibkalo, V. A., Fomenko, A. T. & Kharcheva, I. S. 2021, “Realization of Integrable Hamiltonian Systems by Billiard Books“, *Trans. of Moscow Math. Soc.*, vol. 82, no. 1, (in press). Available at: <https://arxiv.org/abs/2012.05337> .
33. Vedyushkina, V.V. & Fomenko, A.T. 2021, “Force Evolutionary Billiards and Billiard Equivalence of the Euler and Lagrange Cases“, *Dokl. Math.*, vol. 103, no. 1, pp. 1-4.
34. Fokicheva, V. 2016, Topological Classification of Integrable Billiards, PhD Thesis, Moscow, Lomonosov MSU.
35. Matveev, S.V. & Fomenko A.T. 1997, Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds, Springer, 352 p.
36. Vedyushkina, V.V. 2020, Integrable billiards on CW-complexes and integrable Hamiltonian systems, Doctoral Thesis, Moscow, Lomonosov MSU.
37. Vedyushkina, V.V. 2020, “Integrable billiard systems realize toric foliations on lens spaces and the 3-torus“, *Sb. Math.*, vol. 211, no. 2, pp. 201-225.

Получено 15.11.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.