ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 1.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-45-52

Целочисленные многочлены и теорема Минковского о линейных формах

В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Корлюкова Ирина Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Гродненский государственный университет (г. Гродно).
e-mail: korlyukova@mail.ru
Кудин Алексей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).
e-mail: knxd@yandex.ru
Титова Анастасия Владимировна — аспирант, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).
e-mail: anastasia.titova111@gmail.com

Аннотация

В статье теорема Минковского о линейных формах [1] применяется к многочленам с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \quad (1)$$

степени $degP = n$ и высоты $H(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$. Тогда для любого $x \in [0, 1)$ и натурального числа $Q > 1$ получим неравенство

$$|P(x)| < c_1(n)Q^{-n}, \quad (2)$$

для некоторого $P(x), H(P) \leq Q$. Неравенство (2) означает, что весь интервал $[0, 1)$ может быть покрыт интервалами $I_i, i = 1, 2, \ldots$ во всех точках которых верно неравенство (2). Дан ответ на вопрос о величине интервалов I_i. Основной результат статьи заключается в доказательстве следующего утверждения.

Для любого v, $0 \leq v < \frac{n+1}{3}$, найдется интервал J_k, $k = 1, \ldots, K$, такой что для всех $x \in J_k$ выполняется неравенство (2) и при этом

$$c_2Q^{-n-1+v} < \mu J_k < c_3Q^{-n-1+v}.$$

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера Лебега, теорема Минковского.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова. Целочисленные многочлены и теорема Минковского о линейных формах // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 45–52.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-45-52

Integer polynomials and Minkowski's theorem on linear forms

V. I. Bernik, I. A. Korlyukova, A. S. Kudin, A. V. Titova

Bernik Vasilii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Korlyukova Irina Alexandrovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Grodno State University (Grodno).
e-mail: korlyukova@mail.ru
Kudin Alexey Sergeevich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).
e-mail: knxd@yandex.ru
Titova Anastasia Vladimirovna — postgraduate student, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).
e-mail: anastasia.titova111@gmail.com

Abstract

In paper Minkowski's theorem on linear forms [1] is applied to polynomials with integer coefficients

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{3}$$

with degree $degP = n$ and height $H(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$. Then, for any $x \in [0, 1)$ and a natural number $Q > 1$, we obtain the inequality

$$|P(x)| < c_1(n)Q^{-n} \tag{4}$$

for some $P(x), H(P) \leq Q$. Inequality (4) means that the entire interval $[0, 1)$ can be covered by intervals $I_i, i = 1, 2, \ldots$ at all points of which inequality (4) is true. An answer is given to the question about the size of the I_i intervals. The main result of this paper is proof of the following statement.

For any v, $0 \leq v < \frac{n+1}{3}$, there is an interval J_k, $k = 1, \ldots, K$, such that for all $x \in J_k$, the inequality (4) holds and, moreover,

$$c_2 Q^{-n-1+v} < \mu J_k < c_3 Q^{-n-1+v}.$$

Keywords: diophantine approximation, Lebesgue measure, Minkowski's theorem.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

V. I. Bernik, I. A. Korlyukova, A. S. Kudin, A. V. Titova, 2022, "Integer polynomials and Minkowski's theorem on linear forms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 45–52.

1. Введение

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — целочисленный полином степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$, а $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал. Далее в статье $I = [0,1)$. Из теоремы Минковского о линейных формах [1] нетрудно получить, что для любого целого $Q \geq 1$ существует $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, где

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] :\, \deg P \leq n,\, H(P) \leq Q\} \tag{5}$$

такой, что при любом $x \in I$ верно неравенство (2).

Решаемые в статье задачи возникли в классификации действительных и комплексных чисел К. Малера [10]. Обозначим $\psi(x)$ монотонно убывающую функцию $x \in \mathbb{R}_+$ и через $L(\psi)$ - множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H) \tag{6}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$. Малер [10] доказал, что при $\psi_1(x) = x^{-4-\epsilon}, \epsilon > 0$, его гипотеза верна. Последовательные улучшения результата Малера были получены Й. Кубилюсом [11], В. Шмидтом [12], Б. Фолькманом [14], А. Бейкером [15]. Полное доказательство гипотезы Малера получено В.Г. Спринджуком [13, 17]. Однако при $n = 1$ еще ранее уже существовала теорема Хинчина [18], в которой функция $\psi(x)$ была не степенной, а произвольной. В конце прошлого века в работах [19] и [5] было доказано, что

$$\mu L_n(\psi) = \begin{cases} 0, \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty \\ , \mu I, \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейших работах утверждение (6) было обобщено [20] с многочленов на произвольные невырожденные функции [20, 21, 22], а также для оценок количества многочленов с заданным распределением корней [6], а также с заданными дискриминантами и результантами [7, 9]. При $n = 1$ неравенство (2) — это теорема Дирихле. Значение $c_1 = c_1(n)$ нетрудно посчитать и для любого интервала I. Обозначим $\sigma(P)$ — множество $x \in [0,1)$, для которых выполняется (2) для фиксированного $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и $\mu\sigma(P)$ — меру Лебега $\sigma(P)$. Неравенство (2) можно интерпретировать следующим образом:

$$[0,1) \subset \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n(Q)} \sigma(P) \quad \text{и} \quad \mu\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_n(Q)} \sigma(P)\right) = 1. \tag{8}$$

Ясно, что для каждого $P(x)$ множество $\sigma(P)$ есть объединение не более n интервалов с центрами в одном из корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ полинома $P(x)$. В статье мы установим следующие теоремы, которые справедливы для многочленов из (5). Величины $c_2, c_3, \ldots$ зависят от n и не зависят от H и Q.

Теорема 1. *Для любого v, $0 \leq v < \frac{n+1}{3}$, найдется интервал J_k, $k = 1, \ldots, K$, такой что для всех $x \in J_k$ выполняется неравенство (6) и при этом*

$$c_2 Q^{-n-1+v} < \mu J_k < c_3 Q^{-n-1+v}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Верно неравенство $K > c_4 Q^{-n-1}$.*

Теорема 3. *Существуют интервалы длины $c_5 Q^{-1}$, для всех точек которых выполняетсянеравенство (2).*

2. Основной текст статьи

Доказательство теорем 1 - 3 проводится методами метрической теории диофантовых приближений.

Лемма 1. *[2] Пусть α_1 — ближайший к точке x корень полинома $P(x)$. Упорядочим корни $P(x)$ следующим образом: $|\alpha_1-\alpha_2| \le |\alpha_1-\alpha_3| \le \ldots \le |\alpha_1-\alpha_n|$. Тогда*

$$|x-\alpha_1| < n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \tag{10}$$

$$|x-\alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{11}$$

$$|x-\alpha_1| < 2^{n-1}\min_{2\le j\le n}\left(|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}|\alpha_1-\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_1-\alpha_j|\right)^{\frac{1}{j}}. \tag{12}$$

Неравенства (10)-(12) точные. Это доказано для $j \le 2$ в монографии Спринджука [2], а для $3 \le j \le n$ в недавних работах [3, 4].

Лемма 2. *[22] Пусть $v_2 < v_1 \le n$, $v_2 < \frac{n}{2}-1$ и $c_6Q^{-v_2} < |P'(x)|$, $|P(x)| < c_7Q^{-v_1}$. Тогда при достаточно большом Q выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2}|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)|. \tag{13}$$

Лемма 3. *[6, 7] Для $\delta_0 < c_8$ обозначим через $B \subset [0,1)$ множество x, для которых в неприводимых полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ выполняется система неравенств*

$$\begin{cases} \delta_0Q^{-v_0} & < |P(x)| < c_8Q^{-v_0}, \\ \delta_0Q^{-v_1} & < |P'(x)| < c_8Q^{-v_1}, \\ \delta_0Q & < |P''(x)| < c_8Q. \end{cases} \tag{14}$$

Также пусть $v_0+v_1=n-1$, $v_0 > 2v_1+1$. Тогда существуют такие $\delta_0=\delta_0(n)$ и $c_8=c_8(n)$, что

$$\mu B > \frac{3}{4}.$$

Лемма 3 была доказана для всех n производных в работах Бересневича [6, 7, 8].

Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 выделим подсистему неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < c_8Q^{-v_0}, \\ |P'(x)| > \delta_0Q^{-v_1}, \\ v_0+v_1=n-1,\ v_0 \ge 2v_1+1. \end{cases} \tag{15}$$

Из (15) и леммы 1 получаем $|x-\alpha_1| < 2^nc_8\delta_0^{-1}Q^{-v_0+v_1}$. Возьмем точку $x_1 \in [0,1)\cap B_1$. Не умаляя общности, можно считать, что $P(x_1) > 0$, $P'(x_1) < -\delta_0Q^{-v_1}$. Остальные случаи в системе неравенств (14) рассматриваются аналогично. Тогда многочлен $P(x)$ в окрестности точки x_1 удовлетворяет лемме 3. В неравенстве $v_0 > 2v_1+1$ будем считать

$$\epsilon = v_0-2v_1-1, \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}. \tag{16}$$

Возьмем точку $x_{11} = x_1 + 2\delta_0^{-1}c_8Q^{-v_0+v_1}$. Из разложения $P(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_1 имеем

$$P(x_{11}) = P(x_1) + P'(x_1)(x_{11}-x_1) + \frac{1}{2}P''(x_1)(x_{11}-x_1)^2 + \ldots \tag{17}$$

Оценим слагаемые в (17) при достаточно большом $Q > Q_0$

$$0 < P(x_1) < c_8 Q^{-v_0},$$

$$P'(x_1) < 2c_8 Q^{-v_0},$$

$$|\frac{1}{2}P''(x_1)(x_11 - x_1)^2| < 4\delta^{-2}c_8^3 Q^{-2v_0+2v_1+1}.$$

За счет степени $k \geq 3$ в $(x_{11} - x_1)^k$ остальные члены разложения в (17) по модулю будут меньше $\frac{1}{n}Q^{-v_0}$ и поэтому $P(x_{11}) < 0$, откуда на отрезке $[x_1, x_{11}]$ многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет корень. Этот корень - алгебраическое число, которое обозначим α_{11}. В интервале

$$I_1 = |x - \alpha_{11}| < 0,5c_8^{-1}c_9 Q^{-n+v_1}.$$

верно неравенство $|P(x)| < c_9 Q^n$ и поэтому многочлен $P(x)$ является многочленом Дирихле. Длина интервала I_1 может быть оценена

$$c_{10}Q^{-n-1+v} < \mu I_1 < c_{11}Q^{-n-1+v}. \tag{18}$$

Доказательство теоремы 3. Рациональное число $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена первой степени $p = qx - p = 0$ высота q. Число $\frac{p}{q}$ не является корнем многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ степени $n \geq 2$ и старшим коэффициентом a_n. Поэтому результант $R(P_1, P) \neq 0$. Поэтому если

$$|\frac{p}{q} - \alpha_1| < c_{12}Q^{-1},$$

то

$$1 \leq |R(P_1, P)| \leq q^n a_n |\frac{p}{q} - \alpha_1| \prod_{j=2}^{n} |\frac{p}{q} - \alpha_j| \leq qQc_{12}Q^{-1} \prod_{j=2}^{n} |\frac{p}{q} - \alpha_j| < c_{12}c_{13}q, \tag{19}$$

где $c_{13} = \prod_{j=2}^{n} |\frac{p}{q} - \alpha_j|$ и $c_{13} \leq 3^{n-1}$ для всех $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с условием $a_n > \frac{Q}{2}$ [17]. Поэтому правая часть неравенства (19) не превосходит $c_{12}q3^{n-1}$ и при $c_12 < q^{-1}3^{-n+1}$ неравенство (19) противоречиво.

Теорема 2 следует из теоремы 1 и неравенства (9).

3. Заключение

В теоремах 1 и 3 указаны значения, которые могут принимать длины интерваов I в теореме Дирихле. Согласно полученным теоремам

$$cQ^{-n-1} < \mu I < cQ^{-1}.$$

Возникает гипотеза, что μI может принимать любые значения вида cQ^{-3}, $1 \leq s \leq n+1$. Методы теории диофантовых приближений позволяют доказать эту гипотезу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений // Москва: Изд-во Иностр. Литер. 1961. 213 с.
2. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Мн.: Наука и Техника. 1967. 184 с.
3. Кемеш О. Н., Пантелеева Ж. И., Титова А. В. Точные оценки меры малых значений целочисленных полиномов // «Веснік» Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова. 2021. Т. 57, №1. С. 81–86.
4. Кудин А. С., Пантелеева Ж. И., Титова А. В. Неулучшаемые оценки меры Хаара множеств p-адических чисел с малыми значениями целочисленных полиномов // «Веснік» Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова. (в печати)
5. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 90, №2. P. 97–112.
6. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Mathematica. 2010. Vol. 146, №5. P. 1165–1179.
7. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412.
8. Beresnevich, V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation // Annals of Mathematics. 2012. Vol. 175, №1. P. 187–235.
9. Берник В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений. Acta Arithmetica. 1983;42:219–253. Bernik V. I. Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation // Acta Arithmetica. 1983. Vol. 42, №3. P. 219–253.
10. Mahler, K. Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. 1932. Vol. 106. P. 131–139.
11. Кубилюс Й. П. О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // ДАН СССР. 1949. Т. 67. стр. 783–786.
12. Schmidt WM. Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Größen // Monatshefte für Mathematik. 1964. Vol. 68, №2. P. 154–166.
13. Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. АН СССР. 1965. Т. 29, №2. С. 379–436.
14. Volkmann, B. Ein metrischer Beitrag über Mahlerschen $S-$Zahlen, I // J. reine und angew. Math. 1960. Vol. 203, №3–4. P. 154–156.
15. Baker, A. On a Theorem of Sprindzuk // Proc. R. Soc. Lond. A. 1966. Vol. 292, №1428. P. 92–104.
16. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. // Минск: Наука и техника. 1967. 181 с.
17. Khintchine, A. Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen. // Mathematische Annalen. 1924. Vol. 92, №1–2. P. 115–125.

18. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arithmetica. 1989–1990. Vol. 53, №1. P. 17–28.

19. Beresnevich V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds. // Acta Mathematica Hungarica. 2002. Vol. 94, №1—2. P. 99 –130.

20. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // International Mathematics Research Notices. 2001. Vol. 9. P. 453– 486.

21. Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Metric Diophantine approximation: The Khintchine – Groshev theorem for nondegenerate manifolds. // Moscow Mathematical Journal. 2002. Vol. 2, № 2. P. 203–225.

22. Bernik V, Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izvestiya: Mathematics. 2015. Vol. 79, № 1. P. 18–39.

REFERENCES

1. Cassels, J. V. S. 1961, “Introduction to the theory of Diophantine approximations“ *Moscow: Izd-vo Inostr. Liter* 213 p.

2. Sprindzhuk, V. G. 1967, “Mahler’s problem in metric number theory“ *Minsk: Science and Technology* 184 p.

3. Kemesh O. N., Panteleeva Zh. I., Titova A. V. 2021, “Sharp estimates for the measure of small values of integer polynomials“ *"Vesnik"of the Mogilev State University A.A. Kuleshova* vol. 57, no. 1. pp. 81–86.

4. Kudin A. S., Panteleeva Zh. I., Titova A. V. (in press), “Unimprovable estimates for the Haar measure of sets of p-adic numbers with small values of integer polynomials“ *"Vesnik"of the Mogilev State University. A.A. Kuleshova*

5. Beresnevich V. 1999, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers“ *Acta Arithmetica*, vol. 90, no. 2, pp. 97–112.

6. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2010, “The distribution of close conjugate algebraic numbers“ *Compositio Mathematica*, vol. 146, no. 5, pp. 1165–1179.

7. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2016, “Integral polynomials with small discriminants and resultants“ *Advances in Mathematics*, vol. 298, pp. 393–412.

8. Beresnevich V. 2012, “Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation“ *Annals of Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp. 187–235.

9. Bernik V. I. 1983, “Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation“ *Acta Arithmetica*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.

10. Mahler K. 1932, “Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen“ *Math. Ann.*, vol. 106, pp. 131–139.

11. Kubilius Y. P. 1949, “On the application of the method acad. Vinogradov to the solution of one problem of metric number theory“ *DAN USSR*, vol. 67, pp. 783–786.

12. Schmidt WM. 1964, “Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Größen“ *Monatshefte für Mathematik*, vol. 68, no. 2, pp. 154–166.

13. Sprindzhuk V. G. 1965, “Proof of Mahler’s conjecture on the measure of the set of S-numbers“ *Izv. Academy of Sciences of the USSR*, vol. 29, no. 2, pp. 379–436.

14. Volkmann, B. 1960, “Ein metrischer Beitrag über Mahlerschen $S-$Zahlen, I“ *J. reine und angew. Math.*, vol. 203, no. 3–4, pp. 154–156.

15. Baker, A. 1966, On a Theorem of Sprindzuk *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 292, no. 1428, pp. 92–104.

16. Sprindzhuk V. G. 1967, “Mahler’s problem in metric number theory“ *Minsk: Science and technology*, 181 p.

17. Khintchine, A. 1924, “Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen“ *Mathematische Annalen*, vol. 92, no. 1–2, pp. 115–125.

18. Bernik V. I. 1989–1990, “On the Exact Order of Approximation of Zero by Values of Integer Polynomials“ *Acta Arithmetica*, vol. 53, no. 1, pp. 17–28.

19. Beresnevich V. 2002, “A Groshev type theorem for convergence on manifolds“ *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 94, no. 1—2, pp. 99 –130.

20. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. 2001, “Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions“ *International Mathematics Research Notices*, vol. 9, pp. 453– 486.

21. Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. 2002, “Metric Diophantine approximation: The Khintchine – Groshev theorem for nondegenerate manifolds“ *Moscow Mathematical Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 203–225.

22. Bernik V, Götze F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“ *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1. pp. 18–39.

Получено 7.08.2021 г.
Принято в печать 27.02.2022 г.