

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 1.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-33-44

**О геометрии обобщенных почти кватернионных многообразий
вертикального типа**

О. Е. Арсеньева

Арсеньева Ольга Евгеньевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: highgeom@yandex.ru

Аннотация

В работе исследуются обобщенные почти кватернионные многообразия вертикального типа. Приведены примеры этого типа многообразий. Доказано, что на обобщенном почти кватернионном многообразии всегда существует почти α -кватернионная связность, которая в главном расслоении индуцирует метрическую связность. Получен критерий автодуальности проектируемой вертикальной 2-формы на почти α -кватернионном многообразии. Получены компоненты структурного эндоморфизма на пространстве G -структуры. Получен ответ на вопрос: когда эндоморфизм Римана-Кристоффеля сохраняет келеров модуль многообразия. Доказано, эндоморфизм Римана-Кристоффеля эрмитова почти α -кватернионного многообразия вертикального типа сохраняет келеров модуль многообразия тогда и только тогда, когда структурный пучок этого многообразия является эйнштейновским. Откуда как следствие получаем, что четырёхмерное многообразие с римановой либо нейтральной псевдоримановой метрикой является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда его модуль автодуальных форм инвариантен относительно эндоморфизма Римана-Кристоффеля. Полученное следствие показывает, что предыдущий результат является широким обобщением теоремы Атьи-Хитчина-Сингера, дающей критерий эйнштейновости 4-мерных римановых многообразий в терминах автодуальных форм, поскольку результат обобщает эту теорему на случай нейтральной псевдоримановой метрики. С другой стороны, этот результат тесно связан с известным результатом Берже, который уточняет её в частном случае кватернионно-келеровых многообразий: если многообразие M кватернионно-келерово, то его риманова связность (а не только оператор Римана-Кристоффеля) сохраняет келеров модуль многообразия. В этом случае M является многообразием Эйнштейна.

Ключевые слова: алгебра обобщенных кватернионов, обобщенная почти кватернионная структура, кватернионно-келерово многообразие, многообразие Эйнштейна.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

О. Е. Арсеньева. О геометрии обобщенных почти кватернионных многообразий вертикального типа // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 1, с. 33–44.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 1.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-1-33-44

On the geometry of generalized almost quaternionic manifolds of vertical type

О. Е. Arsenyeva

Arsenyeva Olga Evgenievna — candidate of physical and mathematical sciences, docent, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: highgeom@yandex.ru

Abstract

We study generalized almost quaternionic manifolds of vertical type. Examples of this type of manifolds are given. It is proved that on a generalized almost quaternionic manifold there always exists an almost α -quaternionic connection, which in the main bundle induces a metric connection. The criterion of the auto-duality of the projected vertical 2-form on an almost α -quaternion manifold is obtained. The components of the structural endomorphism on the space of the G -structure are obtained. The answer to the question is obtained: when does the Riemann-Christoffel endomorphism preserve the Kähler module of a variety. It is proved that the Riemann-Christoffel Hermitian endomorphism of an almost α -quaternionic variety of vertical type preserves the Kähler module of a variety if and only if the structural sheaf of this variety is Einstein. Hence, as a consequence, we obtain that a four-dimensional manifold with a Riemannian or neutral pseudo-Riemannian metric is an Einstein manifold if and only if its module of auto-dual forms is invariant with respect to the Riemann-Christoffel endomorphism. The resulting corollary shows that the previous result is a broad generalization of the Atiyah-Hitchin-Singer theorem, which gives the Einstein criterion for 4-dimensional Riemannian manifolds in terms of auto-dual forms, since the result generalizes this theorem to the case of a neutral pseudo-Riemannian metric. On the other hand, this result is closely related to the well-known result of Berger, who clarifies it in the special case of quaternionic-Kähler manifolds: if a variety M is quaternionic-Koehler, then its Riemann connectivity (and not just the Riemann-Christoffel operator) preserves the Koehler modulus of the variety. In this case, M is an Einstein manifold.

Keywords: algebra of generalized quaternions, generalized almost quaternionic structure, quaternionic-Kaehler manifold, Einstein manifold.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

О. Е. Arsenyeva, 2022, “On the geometry of generalized almost quaternionic manifolds of vertical type”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 33–44.

1. Введение

Почти кватернионной структурой на многообразии M называется подрасслоение расслоения линейных операторов на M , типовым слоем которого является алгебра кватернионов. Особый интерес представляют собой так называемые кватернионно-эрмитовы структуры. Геометрия таких структур представляет интерес, прежде всего потому, что она естественным образом обобщает геометрию 4-мерных римановых многообразий, играющих особую роль в теоретической физике. В частности, с почти кватернионными многообразиями естественным

образом ассоциируется твисторная геометрия, обобщающая знаменитую твисторную программу Пенроуза.

В настоящей работе рассмотрены обобщенные почти кватернионные структуры, типовым слоем структурного расслоения которых является алгебра обобщенных кватернионов. Наиболее подробно рассмотрены обобщенные почти кватернионные структуры вертикального типа, естественно обобщающие кватернионно-келеровы структуры. Основной результат работы показывает, что структурный пучок такого многообразия является эйнштейновским тогда и только тогда, когда его келеров модуль инвариантен относительно оператора кривизны Римана-Кристоффеля. Это, с одной стороны, широко обобщает классический результат Пенроуза-Хитчина-Сингера об эйнштейновости 4-мерных автодуальных римановых многообразий [1], и, с другой стороны, тесно связано с известным результатом Берже об эйнштейновости кватернионно-келеровых многообразий [2].

2. Алгебра обобщенных кватернионов

Напомним [3], что алгебра обобщенных кватернионов получается двукратным применением процедуры удвоения Кэли-Диксона из поля R вещественных чисел:

$$((\mathbf{R}, \alpha), \beta) = \mathbf{R} \otimes i\mathbf{R} \otimes k\mathbf{R}, i = (0, 1) \in (\mathbf{R}, \alpha) = \text{Re}_\alpha, j = (0, 1) \in (\text{Re}_\alpha, \beta), k = ij; \alpha, \beta \neq 0$$

и с точностью до умножения i и j на константы $\sqrt{|\alpha|}$ и $\sqrt{|\beta|}$ соответственно представляет собой либо тело $\mathbf{H}$ кватернионов ($\alpha = \beta = -1$), либо кольцо $\mathbf{AH}$ антикватернионов ($\alpha = \beta = 1$). Обозначим её $\mathbf{H}_\alpha$, $\mathbf{H}_{-1} = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{AH}$, а ее элементы q назовём α -кватернионами. С геометрической точки зрения эта алгебра представляет собой 4-мерное вещественное псевдоевклидово пространство, снабженное канонической метрикой $g = (\cdot, \cdot)$, $(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 q_2 + \bar{q}_2 q_1)$, где $q \rightarrow \bar{q}$ — оператор сопряжения. Метрика g положительно определена в случае $\alpha = -1$ и нейтральна в случае $\alpha = 1$. Ортогональное дополнение единицы в этой метрике представляет собой 3-мерное подпространство $\mathcal{IQ}_\alpha$ чисто мнимых α -кватернионов, характеризующихся тем, что $q \in \mathcal{IQ}_\alpha \leftrightarrow \bar{q} = -q$. В частности, система $\{j_1, j_2, j_3\} \in \mathcal{IQ}_\alpha$ образует ортонормированный базис пространства $\mathcal{IQ}_\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$j_k j_m + j_m j_k = \begin{cases} \pm 2 (k = m); \\ 0 (k \neq m); \end{cases} \quad k, m = 1, 2, 3.$$

3. Обобщённые почти кватернионные структуры

Пусть M — гладкое многообразие, $\mathcal{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M над кольцом $C^\infty(M)$ гладких на M функций, $TM = \cup_{p \in M} T_p(M)$ — касательное расслоение над M , $\mathcal{T}(M) = \oplus_{r,s=0}^\infty T_r^s(M)$ — тензорная алгебра, а $\Lambda(M) = \oplus_{r=0}^\infty \Lambda^r(M)$ — алгебра Грассмана многообразия M , $\{E\}$ — модуль гладких сечений расслоения (E, M, π) над M . Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Почти α -кватернионной (короче, $\mathcal{AQ}_\alpha$ -) структурой на M называется подрасслоение $\mathcal{L}$ расслоения $\mathcal{T}_1^1(M)$ с типовым слоем $\mathbf{H}_\alpha$.

При $\alpha = -1$ это понятие совпадает с классическим понятием почти кватернионной структуры [4]. Многообразие, несущее почти α -кватернионную структуру, называется *почти α -кватернионным многообразием*. Расслоение $\mathcal{L}$ назовем структурным. Сечения этого расслоения, так же, как и элементы его произвольного слоя, будем называть α -кватернионами. Естественно возникают также подрасслоение $\mathcal{J}$ чисто мнимых α -кватернионов и $\mathcal{I}$ чисто мнимых α -кватернионов единичного модуля, называемое расслоением твисторов над M .

Очевидно, $\mathcal{L}$ — четырехмерное векторное расслоение, ассоциированное главному расслоению $B\mathcal{L} = (B(\mathcal{L}), M, \pi, G_\alpha)$, элементами тотального пространства которого служат четверки $\{id, J_1, J_2, J_3\}$ α -кватернионов в произвольной точке $p \in M$, удовлетворяющие тождествам $J_1^2 = J_2^2 = \alpha id$; $\alpha = \pm 1$, $J_1 \circ J_2 + J_2 \circ J_1 = 0$, $J_3 = J_1 \circ J_2$, которые в силу сказанного выше образуют ортонормированный базис слоя расслоения $\mathcal{L}$, а структурной группой G_α является группа автоморфизмов алгебры α -кватернионов.

Алгебра $\mathbf{H}_\alpha$ допускает каноническое представление $\lambda : \mathbf{H}_\alpha \rightarrow \text{End}(\mathbf{H}_\alpha)$, $\lambda(q)(X) = q \cdot X$, где $X \in \mathbf{H}_\alpha$. В самом деле, $\lambda(q_1 q_2)(X) = (q_1 q_2)(X) = q_1(q_2 X) = \lambda(q_1)\lambda(q_2)X$, т.е. $\lambda(q_1 q_2) = \lambda(q_1)\lambda(q_2)$.

Пусть $\{1, j_1, j_2, j_3\}$ — ортонормированный базис пространства $\mathbf{H}_\alpha$ указанного выше вида, $q = a + bj_1 + cj_2 + dj_3 \in \mathbf{H}_\alpha$. Тогда в этом базисе

$$(\lambda(q)_j^i) = \begin{pmatrix} a & ab & ac & -d \\ b & a & ad & -ac \\ c & -ad & a & ab \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Таким образом, всякий α -кватернион допускает отождествление с некоторым эндоморфизмом 4-мерного вещественного пространства $\mathbf{H}_\alpha$. Опуская индекс у этого эндоморфизма, получим тензор типа $(2,0)$ на этом линейном пространстве, который будет кососимметрическим тогда и только тогда, когда $a = 0$, т.е. α -кватернион чисто мнимый. В свою очередь, расслоение $\mathcal{L}$ имеет естественную метрику $g = (\cdot, \cdot)$, порожденную метрикой алгебры $\mathbf{H}_\alpha$. Опуская с её помощью индекс у чисто мнимого α -кватерниона, рассматриваемого в своем каноническом представлении, получим 2-форму на пространстве расслоения $\mathcal{L}$, которую назовём фундаментальной формой этого α -кватерниона. Эту форму ω можно рассматривать как тензор t типа $(2,2)$ на M : $t(X, Y, u, v) = \omega(q_1(X, u), q_2(Y, v))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Связность на $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии $(M, \mathcal{L})$ называется почти α -кватернионной, или $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связностью если модуль $\{\mathcal{L}\}$ инвариантен относительно всех параллельных переносов, порождённых этой связностью.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *На $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии M всегда существует $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\mathcal{U}_\beta\}_{\beta \in B}$ — покрытие многообразия M , тривиализирующее расслоение $\mathcal{L}$, и пусть $\{id, \mathcal{I}_{(\beta)}, \mathcal{J}_{(\beta)}, \mathcal{K}_{(\beta)}\}$ — локальный ортонормированный базис модуля $\mathbb{X}(U_\beta)$, $\beta \in B$. Как известно, на $\mathcal{U}_\beta$ существует связность $\nabla_{(\beta)}$, в которой тензоры $\mathcal{I}_{(\beta)}$, $\mathcal{J}_{(\beta)}$ и $\mathcal{K}_{(\beta)}$ ковариантно постоянны, в частности, $\nabla_{(\beta)}$ — $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность на $\mathcal{U}_\beta$. Пусть $\{\phi_\beta\}_{\beta \in B}$ — разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{\mathcal{U}_\beta\}_{\beta \in B}$. Тогда очевидно, что $\nabla = \sum_{\beta \in B} \phi_\beta \nabla_{(\beta)}$ — $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность на M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякая $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность ∇ на $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии M индуцирует метрическую связность в расслоении $\mathcal{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C^\infty(M)$, $q \in \{\mathcal{L}\}$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Тогда $\nabla_X(fq)(Y) = \nabla_X(fq(Y)) - fq(\nabla_X Y) = X(f)q(Y) + f\nabla_X(q)Y + fq(\nabla_X Y) - fq(\nabla_X Y) = X(f)q(Y) + f\nabla_X(q)Y$, и в силу произвола $Y \in \mathcal{X}(M)$, $\nabla_X(fq) = X(f)q + f\nabla_X(q)$, т.е. ∇ — линейная связность в расслоении $\mathcal{L}$. Далее, пусть $q_1, q_2 \in \{\mathcal{L}\}$. Поскольку $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность порождает дифференцирование алгебры $\mathcal{T}(M)$, перестановочное со свертками, то $\forall X \in \mathcal{X}(M) \Rightarrow \nabla_X(q_1 q_2) = \nabla_X(q_1)q_2 + q_1 \nabla_X(q_2)$. Кроме того, легко видеть, что $\nabla_X \bar{q} = \overline{\nabla_X q}$, $q \in \mathcal{L}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} 1) \nabla_X(\bar{q}_1 q_2) &= \overline{\nabla_X(q_1)} q_2 + \bar{q}_1 \nabla_X q_2; \\ 2) \nabla_X(\bar{q}_2 q_1) &= \overline{\nabla_X(q_2)} q_1 + \bar{q}_2 \nabla_X q_1. \end{aligned}$$

Почленно складывая эти равенства, с учетом определения метрики $(\cdot, \cdot)$ получим:

$$\nabla_X(q_1, q_2) = (\nabla_X q_1, q_2) + (q_1, \nabla_X q_2),$$

т.е. ∇ — метрическая связность в $\mathcal{L}$. В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что на $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии фиксирована $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -связность. Тогда $\mathbb{X}(\mathcal{L}) = V \oplus H$, где V и H , соответственно, вертикальное и горизонтальное распределения индуцированной метрической связности в расслоении $\mathcal{L}$, $V = \{\mathcal{L}\}$.

Напомним, что тензор $t \in \mathcal{T}_r^s(\mathcal{L})$ называется вертикальным, если он обращается в нуль, когда хотя бы один из аргументов этого тензора, рассматриваемого как полилинейная функция, горизонтален. Иначе говоря, для $\forall X_1, \dots, X_r \in \mathbb{X}(\mathcal{L})$ и $\forall \omega^1, \dots, \omega^s \in \mathbb{X}^*(\mathcal{L}) \Rightarrow t(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = t(X_1^V, \dots, X_r^V, \omega_V^1, \dots, \omega_V^s)$, где X^V , ω_V — вертикальные составляющие вектора X и ковектора ω соответственно. Вертикальные тензоры определяют подалгебру тензорной алгебры $\mathcal{T}(\mathcal{L})$, которую мы назовем вертикальной тензорной алгеброй и обозначим $\mathcal{T}_V(\mathcal{L})$. Аналогичные замечания относятся к алгебре Грассмана $\Lambda(\mathcal{L}) \supset \Lambda_V(\mathcal{L})$. В частности, точечная локализация модуля $\Lambda_V^r(\mathcal{L})$ имеет размерность $C_4^r = \frac{4!}{r!(4-r)!}$, $0 \leq r \leq 4$, и нулевую размерность при $r > 4$. Таким образом, естественно определена алгебра Грассмана $\Lambda_V(\mathcal{L}) = \bigoplus_{r=0}^4 \Lambda_V^r(\mathcal{L})$, которую мы назовем вертикальной алгеброй Грассмана.

Заметим, что модуль $\Lambda_V^4(\mathcal{L})$ одномерен; в качестве его базиса естественно взять форму τ , определенную равенством

$$\tau_p = \sqrt{\det(g)_p} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4,$$

где $(g)_p$ — матрица Грамма метрики g , $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ — кобазис, дуальный базису $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ пространства $V_p = \mathcal{L}_p$ ($p \in \mathcal{L}$). Стандартным образом проверяется независимость τ_p от выбора базиса. Назовём форму τ вертикальной формой объема. Очевидно, она порождает ориентацию пучка $V = \{\mathcal{L}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Оператором Ходжа в расслоении $\mathcal{L}$ называется оператор $*$: $\Lambda_V(\mathcal{L}) \rightarrow \Lambda_V(\mathcal{L})$, определяемый тождеством*

$$\omega \wedge (*\omega) = (\omega, \omega)\tau; \quad \omega \in \Lambda_V^r(\mathcal{L}), \quad r = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\Lambda_V(\mathcal{L})$, индуцированное метрикой в $\mathcal{L}$.

В частности, $*$: $\Lambda_V^2(\mathcal{L}) \rightarrow \Lambda_V^2(\mathcal{L})$, причём $(\omega, \omega) = \frac{1}{4!} \omega_{ij} \tilde{\omega}^{ij}$ и, значит, $(*\omega)_{ab} = \omega_{cd}$, где $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ — чётная перестановка. Отсюда следует, что $(*)^2 = id$ на $\Lambda_V^2(\mathcal{L})$ и, значит, имеет собственные значения ± 1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Вертикальная 2-форма на $\mathcal{L}$ называется автодуальной (соответственно, антиавтодуальной), если она является собственным вектором оператора Ходжа с собственным значением 1 (соответственно, -1). Если она к тому же параллельна вдоль слоев расслоения (т.е. проектируема), она называется формой на M .*

Модуль автодуальных (соответственно, антиавтодуальных) форм на M будем обозначать $\Lambda^+(M)$ (соответственно, $\Lambda^-(M)$).

ТЕОРЕМА 1. *Проектируемая вертикальная 2-форма автодуальна на $\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразии M тогда и только тогда, когда она является фундаментальной формой чисто мнимого α -кватерниона. При этом ориентация пучка $\mathcal{L}$, порождённая внешним квадратом этой формы, согласована с канонической ориентацией этого пучка тогда и только тогда, когда этот α -кватернион имеет положительную норму.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω — проектируемая вертикальная 2-форма. Согласно определению, $\omega \in \Lambda^+(M) \Leftrightarrow *\omega = \omega$, т.е. $g_{\beta\gamma}g_{\delta\epsilon}\tau^{\gamma\epsilon\xi\eta}\omega_{\xi\eta} = \omega_{\beta\delta}$. В ортонормированном базисе

$\{J_0 = id, J_1, J_2, J_3\}$ пространства $\mathcal{L}_p$ ($p \in M$), в котором $(g_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, эта фор-

мула означает, что $\epsilon_{\beta\epsilon\gamma}\omega_{\beta\gamma} = \omega_{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}$, где $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \beta & \gamma & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}$ — чётная перестановка, $\beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$, $\epsilon_{\xi} = (J_{\xi}, J_{\xi})$. Отсюда следует, что

$$\omega \in \Lambda^+(M) \Leftrightarrow (\omega_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x & \alpha y & -z \\ -\alpha x & 0 & -z & y \\ -\alpha y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Поднимая индекс у этой формы, получим эндоморфизм пучка $\mathcal{L}$, который в силу сказанного выше может быть отождествлён с чисто мнимым α -кватернионом $q = xJ_1 + yJ_2 + zJ_3$. Очевидно, верно и обратное: в силу (1), фундаментальная форма чисто мнимого α -кватерниона автодуальна. Заметим, что в силу определения автодуальной формы, $\omega \wedge \alpha = \omega \wedge (*\omega) = (\omega, \omega)\tau$, и, следовательно, ориентация пучка $\mathcal{L}$, порождённая формой $\omega \wedge \omega$, совпадает с канонической ориентацией этого пучка тогда и только тогда, когда $\|\omega\|^2 > 0$, т.е. $\|q\|^2 > 0$.

Пусть $(M, \mathcal{L})$ — α -кватернионное многообразие. Задание $\mathcal{AQ}_{\alpha}$ -структуры на M равносильно заданию G -структуры на нем со структурной группой $\mathcal{G} = GL(n, \mathbb{H}_{\alpha}) \times SP_{\alpha}(1)$, где $SP_{\alpha}(m)$ — симплектическая группа порядка m над кольцом $\mathbb{H}_{\alpha}$. Элементы этой $\mathcal{G}$ -структуры, называемые адаптированными реперами, или А-реперами, строятся следующим образом. Пусть $p \in M$, $(J_0 = id, J_1, J_2, J_3)$ — ортонормированный базис слоя $\mathcal{L}_p$, $(e_1, \dots, e_n)$ — базис пространства $T_p(M)$, рассматриваемого как $\mathbb{H}_{\alpha}$ -модуль: если $q = a + bj_1 + cj_2 + dj_3 \in \mathbb{H}_{\alpha}$, $X \in T_p(M)$, то $qX = aX + bJ_1(X) + cJ_2(X) + dJ_3(X)$. Условимся, что греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, а латинские — от 1 до n . Обозначим $e_{\beta a} = \tau_{\beta}(e_a)$. Тогда $\{p, e_{\beta a}; \beta = 0, \dots, 3; a = 1, \dots, n\}$ есть репер пространства $T_p(M)$, называемый адаптированным. Очевидно, в этом репере

$$(J_1) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}; \quad (J_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(J_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \alpha I & 0 \\ 0 & -\alpha I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

и значит, $(J_k) = (j_k) \otimes I$; $k = 1, 2, 3$; I — единичная матрица порядка n .

Очевидно, задание тензора t типа (1,1) на M определяется заданием набора функций $\{t_{\gamma i}^{\beta j}\}$ на пространстве G -структуры, являющихся компонентами этого тензора в соответствующем А-репере. Из (2) следует, что такой тензор является α -кватернионом $q = aid + bJ_1 + cJ_2 + dJ_3$

тогда и только тогда, когда $t_{\gamma i}^{\beta j} = q_{\gamma}^{\beta} \delta_i^j$, где $(q_{\gamma}^{\beta}) = \begin{pmatrix} a & \alpha b & \alpha c & -d \\ b & a & \alpha d & -\alpha c \\ c & -\alpha d & a & \alpha b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ — матрица

α -кватерниона q в базисе $\{id, J_1, J_2, J_3\}$, рассматриваемого как эндоморфизм структурного пучка. Рассмотрим естественное представление алгебры эндоморфизмов касательного пучка

$\mathcal{AQ}_\alpha$ -многообразия $(M, \mathcal{L})$ в алгебру эндоморфизмов модуля этой алгебры, порождённое левыми сдвигами. Именно, если $f \in \mathcal{T}_1^1(M)$, сопоставим ему эндоморфизм $\hat{f}$, действующий по формуле $\hat{f}(g) = f \circ g$, где $g \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Очевидно, отображение $f \rightarrow \hat{f}$ является представлением в силу ассоциативности алгебры эндоморфизмов. Возникает естественный вопрос: когда элемент $f \in \mathcal{T}_1^1(M)$ в этом представлении сохраняет структурный пучок и, следовательно, индуцирует эндоморфизм структурного пучка? Ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть M — $\mathcal{AQ}_\alpha$ -многообразие. Эндоморфизм $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$ индуцирует эндоморфизм структурного пучка тогда и только тогда, когда его компоненты на пространстве G -структуры имеют вид:

$$t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется тождество (3), $q \in \{\mathcal{L}\}$. Положим $\hat{t}(q) = t \circ q$. Зафиксируем реперы $(p, J_\alpha; \alpha = 0, 1, 2, 3)$ в $\mathcal{L}_p$ и соответствующий ему А-репер $(p, e_{\beta b} \in \mathcal{G})$. Имеем: $\hat{t}(J_\beta)(e_b) = t \circ J_\beta(e_b) = t(J_\beta(e_b)) = t(e_{\beta b}) = t_{\beta b}^{\gamma c} e_{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c e_{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} e_{\gamma b} = J_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}(e_b) \forall b = 1, \dots, n$, откуда $\hat{t}(J_\beta) = t_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}$, т.е. эндоморфизм $\hat{t} : f \rightarrow t \circ f$ пучка $\mathcal{T}_1^1(M)$ сохраняет структурный пучок и, значит, индуцирует его эндоморфизм. Обратно, пусть $\hat{t} : f \rightarrow t \circ f$ сохраняет структурный пучок. Тогда $\hat{t}(J_\beta) = t_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}$ и, значит, $t(e_{\beta b}) = t(J_\beta(e_b)) = t \circ J_\beta(e_b) = \hat{t}(J_\beta)(e_b) = t_{\beta}^{\gamma} J_{\gamma}(e_b) = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c J_{\gamma}(e_c) = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c e_{\gamma c}$. Таким образом, $t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c$.

Очевидно, задание эндоморфизма $\hat{t}$ структурного пучка равносильно заданию вертикального тензора $t_V \in (\mathcal{T}_1^1)_V(\mathcal{L})$ и, таким образом, теорему 2 можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА 3. Пусть M — $\mathcal{AQ}_\alpha$ -многообразие. Эндоморфизм $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$ порождает вертикальный тензор $t_V \in (\mathcal{T}_1^1)_V(\mathcal{L})$ тогда и только тогда, когда его компоненты на пространстве G -структуры имеют вид:

$$t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c.$$

В связи с этим эндоморфизм $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$, обладающий свойством (3), назовем вертикальным, а его образ t_V , при указанном соответствии — базисным эндоморфизмом.

Как мы уже видели, всякий α -кватернион удовлетворяет условию теоремы 3 и, следовательно, является вертикальным эндоморфизмом. Справедливость (3) в этом случае можно показать и несколько иначе. Пусть $q \in \mathcal{L}$. Тогда $q(e_{\beta b}) = q(J_\beta(e_b)) = q^{\gamma} J_{\gamma}(J_\beta(e_b)) = q^{\gamma} (J_{\gamma} \circ J_\beta) e_b = q^{\gamma} c_{\gamma\beta}^{\epsilon} J_{\epsilon}(e_b) = q^{\gamma} c_{\gamma\beta}^{\epsilon} \delta_b^c J_{\epsilon}(e_c) = q_{\beta}^{\epsilon} \delta_b^c e_{\epsilon c}$, т.е. $q_{\beta b}^{\epsilon c} = q_{\beta}^{\epsilon} \delta_b^c$, где $q_{\beta}^{\epsilon} = c_{\gamma\beta}^{\epsilon} q^{\gamma}$, $c_{\gamma\beta}^{\epsilon}$ — структурный тензор алгебры α -кватернионов.

Аналогичную терминологию сохраним для других типов тензоров, полученных из вертикальных эндоморфизмов с помощью классических операций тензорной алгебры. В частности, 2-форму $\omega \in \Lambda^2(M)$ назовём вертикальной, если она при операции поднятия индекса (в случае фиксации псевдоримановой метрики на M) соответствует вертикальному эндоморфизму. Очевидно, совокупность всех вертикальных 2-форм на M образуют подмодуль $\Lambda_V^2(M) \subset \Lambda^2(M)$, который мы назовём модулем вертикальных 2-форм на M , а его образ при композиции операций поднятия индекса, естественного представления и опускания индекса с помощью метрики g — модулем базисных тензоров. Подмодуль кососимметрических базисных тензоров назовём модулем базисных 2-форм и обозначим $\Lambda_B^2(\mathcal{L})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ([4]) $\mathcal{AQ}_\alpha$ -структура $\mathcal{L}$ на M называется эрмитовой, или $\mathcal{HAQ}_\alpha$ -структурой, если на M фиксирована псевдориманова метрика $G = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такая, что $\forall J \in \{\mathcal{I}\} \Rightarrow \langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0$; $X, Y \in \mathbb{X}(M)$.

В этом случае для любого чисто мнимого α -кватерниона q тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, q(Y) \rangle$ является вертикальной 2-формой, которую мы назовем келеровой формой α -кватерниона q .

Келеровы 2-формы на M образуют подмодуль $\mathcal{K}(M) \subset \Lambda_V^2(M)$, который мы назовём келеровым модулем. Очевидно, образ келерова модуля в естественном представлении есть модуль $\Lambda^+(M)$ автодуальных форм и, таким образом, $\Lambda^+(M) \subset \Lambda_V^2(M)$.

Задание $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -структуры на многообразии M равносильно заданию $\mathcal{G} = Sp_\alpha(n) \cdot Sp_\alpha(1)$ -структуры на M , элементами которой служат А-реперы, векторы $e_1, \dots, e_n$ которых образуют ортонормированную систему в кватернионно-эрмитовой метрике

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + i \langle X, IY \rangle + j \langle X, JY \rangle + k \langle X, KY \rangle,$$

где id, I, J, K — ортонормированный базис слоя $\mathcal{L}_p$, где $p \in M$.

Пусть $(M, \mathcal{L}, G)$ — $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразие, R — тензор Римана-Кристоффеля метрики G . Этот тензор можно рассматривать как эндоморфизм модуля 2-форм на M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -структуру $(\mathcal{L}, G)$ на многообразии M назовём структурой вертикального типа, если эндоморфизм R Римана-Кристоффеля, порождённый метрикой G , сохраняет модуль вертикальных 2-форм на M .

ПРИМЕР 1. Кватернионно-келерово многообразие определяется как $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_1$ -многообразие, структурный пучок которого инвариантен относительно параллельных переносов в римановой связности. Тем более этим свойством обладают модуль вертикальных эндоморфизмов и модуль вертикальных 2-форм. Значит, всякое кватернионно-келерово многообразие является $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразием вертикального типа.

Пусть M — $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразие вертикального типа. Тогда эндоморфизм R Римана-Кристоффеля индуцирует эндоморфизм r модуля базисных тензоров. Найдём матрицу этого эндоморфизма как систему функций $\{r_{\beta\gamma\delta\epsilon}\}$ на пространстве расслоения $B\mathcal{L}$. Пусть $\{G_{\beta b\gamma c}\}$ и $\{R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h}\}$ — компоненты тензоров G и R на пространстве G -структуры соответственно, t — вертикальный кососимметрический эндоморфизм на M , $t_{\beta b}^{\gamma c} = t_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c$. Тогда

$$R(t)_{\beta b\gamma c} = R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} G^{\epsilon h\theta f} t_{\theta f}^{\delta d} = R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} G^{\epsilon h\theta d} t_{\theta}^{\delta}$$

и значит,

$$R(t)_{\gamma c}^{\chi r} = G^{\chi r\beta b} G^{\epsilon h\theta d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} t_{\theta}^{\delta}. \quad (4)$$

Учитывая, что $R(t)$ — тоже вертикальный тензор на M , имеем: $R(t)_{\gamma c}^{\chi r} = r(t)_{\gamma}^{\chi} \delta_c^r$. Поэтому, свёртывая (4) по индексам r и c , получим: $r(t)_{\gamma}^{\chi} = \frac{1}{n} G^{\chi r\beta b} G^{\epsilon h\theta d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} t_{\theta}^{\delta}$. Последнее равенство можно переписать в виде:

$$r(t)_{\eta\gamma} = \frac{1}{n} g_{\eta\theta} g_{\chi\kappa} G^{\theta c\beta b} G^{\epsilon h\kappa d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h} t_{\theta}^{\delta\chi}$$

и значит,

$$r_{\eta\gamma\delta\chi} = \frac{1}{n} g_{\eta\theta} g_{\chi\kappa} G^{\theta c\beta b} G^{\epsilon h\kappa d} R_{\beta b\gamma c\delta\epsilon h}, \quad (5)$$

что и даёт нужный результат. Кроме того, проведя в (5) следующие переобозначения индексов: $\theta \leftrightarrow \kappa$, $\beta b \leftrightarrow \epsilon h$, $c \leftrightarrow d$, и используя классические свойства тензора Римана-Кристоффеля, получаем, что матрица компонент эндоморфизма r обладает следующим свойством симметрии:

$$r_{\eta\gamma\delta\chi} = r_{\chi\delta\gamma\eta}, \quad (6)$$

откуда немедленно следует

ТЕОРЕМА 4. *Эндоморфизм Римана-Кристоффеля $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия вертикального типа индуцирует симметричный эндоморфизм модуля базисных 2-форм этого многообразия.*

Возникает естественный вопрос — когда эндоморфизм r сохраняет также модуль автодуальных форм многообразия? Мы уже знаем, что этот модуль в естественном соответствии отвечает келерову модулю многообразия, и, следовательно, вопрос можно переформулировать так: когда эндоморфизм Римана-Кристоффеля сохраняет келеров модуль многообразия?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Структурный пучок $\mathcal{L}$ $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия вертикального типа назовем эйнштейновским, если на пространстве расслоения $B\mathcal{L}$*

$$g^{\beta b} r_{\beta\gamma b\epsilon} = c g_{\gamma\epsilon}; \quad c \in C^\infty(\mathcal{L}). \quad (7)$$

Ясно, что если $\dim M = 4$, свойство эйнштейновости структурного пучка равносильно эйнштейновости многообразия M .

ТЕОРЕМА 5. *Эндоморфизм Римана-Кристоффеля $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия вертикального типа сохраняет келеров модуль многообразия тогда и только тогда, когда структурный пучок этого многообразия является эйнштейновским.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы, очевидно, равносильно следующему: эндоморфизм r сохраняет модуль $\Lambda^+(M)$ автодуальных форм $\mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{Q}_\alpha$ -многообразия M вертикального типа тогда и только тогда, когда на M справедливы соотношения (7). Пусть $\omega \in \Lambda^+(M)$. На пространстве $B(\mathcal{L})$ эта 2-форма характеризуется матрицей функций

$$(\omega_{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & -z & -\alpha y \\ y & z & 0 & \alpha x \\ z & \alpha y & -\alpha x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Следовательно, $r(\Lambda^+(M)) \subset \Lambda^+(M) \Leftrightarrow \forall \omega \in \Lambda^+(M) \Rightarrow r(?) \in \Lambda^+(M)$, т.е.

$$\begin{aligned} 1) & (\alpha r_{01\beta\gamma} + r_{23\beta\gamma}) \omega^{\beta\gamma} = 0; \\ 2) & (\alpha r_{02\beta\gamma} - r_{13\beta\gamma}) \omega^{\beta\gamma} = 0; \\ 3) & (\alpha r_{03\beta\gamma} - r_{12\beta\gamma}) \omega^{\beta\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, $\omega^{\beta\gamma} = g^{\beta\delta} g^{\gamma\kappa} \omega_{\delta\kappa} = \epsilon_{\beta\epsilon} \epsilon_{\gamma\eta} \omega_{\beta\gamma}$ и с учетом (8),

$$(\omega^{\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x & \alpha y & -z \\ -\alpha x & 0 & -z & y \\ -\alpha y & z & 0 & -x \\ z & -y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, соотношения (9) примут вид:

$$\begin{aligned} 1) & (\alpha r_{0101} + r_{2301}) \alpha x + (\alpha r_{0102} + r_{2302}) \alpha y - (\alpha r_{0103} + r_{2303}) z - \\ & - (\alpha r_{0112} + r_{2312}) z + (\alpha r_{0113} + r_{2313}) y - (\alpha r_{0123} + r_{2323}) x = 0. \end{aligned}$$

Ввиду того, что это соотношение должно выполняться тождественно относительно x, y, z , получим

$$\begin{cases} r_{0101} - r_{2323} = 0; \\ r_{0102} + \alpha r_{2302} + \alpha r_{0113} + r_{2313} = 0; \\ -\alpha r_{0103} - r_{2303} - \alpha r_{0112} - r_{2312} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$2) (\alpha r_{0201} - r_{1301})\alpha x + (\alpha r_{0202} - r_{2302})\alpha y - (\alpha r_{0203} - r_{1303})z - \\ - (\alpha r_{0212} - r_{1312})z + (\alpha r_{0213} - r_{1313})y - (\alpha r_{0223} - r_{1323})x = 0;$$

откуда

$$\begin{cases} r_{0201} - \alpha r_{1301} - \alpha r_{0223} + r_{1323} = 0; \\ r_{0202} - r_{1313} = 0; \\ -\alpha r_{0203} + r_{1303} - \alpha r_{0212} + r_{1312} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Далее

$$3) (r_{0301} - r_{1201})\alpha x + (\alpha r_{0302} - r_{1202})\alpha y - (r_{0303} - r_{1203})z - \\ - (r_{0312} - r_{1212})z + (r_{0313} - r_{1213})y - (r_{0323} - r_{1323})x = 0;$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha r_{0301} - \alpha r_{1201} - r_{0323} + r_{1223} = 0; \\ \alpha r_{0302} - \alpha r_{1202} + r_{0313} - r_{1213} = 0; \\ -r_{0303} + r_{1212} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Сравнивая (10₂) и (11₁), получим:

$$r_{0102} + r_{1323} = 0; \quad r_{2302} + r_{0113} = 0. \quad (13)$$

Аналогично, сравнивая (10₃) и (12₁), (11₃) и (12₂), получим, соответственно:

$$\alpha r_{0112} + r_{0323} = 0; \quad \alpha r_{0103} + r_{1223} = 0; \quad (14)$$

$$\alpha r_{0212} - r_{0313} = 0; \quad \alpha r_{0203} - r_{1213} = 0. \quad (15)$$

Равенства (13)-(15) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} r_{0102} + r_{1323} &= 0; \quad r_{1013} + r_{2023} = 0; \\ -\alpha r_{1012} + r_{3032} &= 0; \quad r_{0103} - \alpha r_{2123} = 0; \\ \alpha r_{2021} - r_{3031} &= 0; \quad r_{0203} - \alpha r_{1213} = 0; \end{aligned}$$

или $g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\epsilon} = 0$, т.е. $g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\epsilon} = cg_{\gamma\epsilon}$ ($\gamma \neq \epsilon$).

Утверждается, что система оставшихся равенств

$$r_{0101} = r_{2323}; \quad r_{0202} = r_{1313}; \quad r_{0303} = r_{1212} \quad (16)$$

равносильна соотношениям

$$g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\gamma} = cg_{\gamma\gamma},$$

т.е.

$$g^{\beta\delta}r_{\beta 0\delta 0} = -\alpha g^{\beta\delta}r_{\beta 1\delta 1} = -\alpha g^{\beta\delta}r_{\beta 2\delta 2} = g^{\beta\delta}r_{\beta 3\delta 3},$$

т.е.

$$\begin{aligned} -\alpha r_{1010} - \alpha r_{2020} + r_{3030} &= -\alpha r_{0101} + r_{2121} - \alpha r_{3131} = \\ &= -\alpha r_{0202} + r_{1212} - \alpha r_{3232} = r_{0303} - \alpha r_{1313} - \alpha r_{2323}. \end{aligned} \quad (17)$$

В самом деле, сравнивая первое и четвертое выражения в (17), получим:

$$r_{1010} + r_{2020} = r_{1313} + r_{2323}.$$

С другой стороны, сравнивая второе и третье выражения в (17), находим, что

$$r_{1010} - r_{2020} = -r_{1313} + r_{2323},$$

откуда

$$r_{1010} = r_{2323}; \quad r_{2020} = r_{1313}.$$

С учетом этого, сравнивая первое и второе выражения в (17), находим, что

$$-\alpha r_{2020} + r_{3030} = r_{2121} - \alpha r_{2020},$$

т.е. $r_{3030} = r_{1212}$.

Очевидно, что справедливо и обратное. Объединяя эти результаты, получим, что $g^{\beta\delta}r_{\beta\gamma\delta\epsilon} = cg_{\gamma\epsilon}$.

Обратно, из сказанного выше следует, что выполнение этих условий равносильно (13)-(16), которые, как мы видели, равносильны (9) в силу (8), т.е. инвариантности модуля $\Lambda^+(M)$ относительно эндоморфизма r .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Четырёхмерное многообразие с римановой либо нейтральной псевдоримановой метрикой является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда его модуль автодуальных форм инвариантен относительно эндоморфизма Римана-Кристоффеля.*

4. Заключение

В работе доказано, что эндоморфизм Римана-Кристоффеля эрмитова почти α -кватернионного многообразия вертикального типа сохраняет келеров модуль многообразия тогда и только тогда, когда структурный пучок этого многообразия является эйнштейновским. А значит, четырёхмерное многообразие с римановой либо нейтральной псевдоримановой метрикой является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда его модуль автодуальных форм инвариантен относительно эндоморфизма Римана-Кристоффеля.

Этот результат показывает, что доказанная нами теорема 5 является широким обобщением теоремы Атьи-Хитчина-Сингера, дающей критерий эйнштейновости 4-мерных римановых многообразий в терминах автодуальных форм [1], поскольку само обобщает эту теорему на случай нейтральной псевдоримановой метрики.

С другой стороны, теорема 5 тесно связана с известным результатом Берже [2], который уточняет её в частном случае кватернионно-келеровых многообразий: если многообразие M кватернионно-келерово, то его риманова связность (а не только оператор Римана-Кристоффеля) сохраняет келеров модуль многообразия. В этом случае M является многообразием Эйнштейна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry // Proc. Roy. London. 1978. Vol. 362, No. 1711. P. 425-461.
2. Berger M. Remarques sur le groupe d'holonomie des varietes Riemanniennes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1996. Vol. 262. P. 316-318.
3. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 431 с.
4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Том 2. 703 с.

REFERENCES

1. Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. & Singer, M. 1978, "Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry", Proc. Roy. Soc. London, vol. 362, no. 1711. pp. 425-461.
2. Berger, M. 1996, "Remarques sur le groupe d'holonomie des varietes Riemanniennes", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 262, pp. 316-318.
3. Zhevlakov, K. A., Slinko, A. M., Shestakov, I. P., Shirshov, A. I. 1978. "Rings that are nearly associative", Moscow, Nauka, 431 p.
4. Besse, A. L. 1987, "Einstein Manifolds", Springer, vol. 2, 703 p.

Получено 23.08.2021 г.

Принято в печать 27.02.2022 г.