ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 511.9

АППРОКСИМАЦИЯ ЧИСЕЛ Ω–ДРОБЯМИ [1]

О. А. Горкуша (ХО ИПМ ДВО РАН г. Хабаровск)

Аннотация

Пусть вещественное число x из $(0,1)$ представлено в виде $\Omega-$ дроби $x = [0;\varepsilon_1/b_1,\ldots,\varepsilon_1/b_n,\ldots]$, которая относится к одному из классов полурегулярных дробей. Обозначим через $\{A_n/B_n\}_{n\geqslant 1}$ последовательность подходящих дробей $\Omega-$ дроби числа x и через $\{\Upsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ последовательность коэффициентов аппроксимации с $\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n^2|x - A_n/B_n|$. В работе мы доказываем, что $\min(\Upsilon_{n-1},\Upsilon_n,\Upsilon_{n+1}) \leqslant 1/\sqrt{5}$ для всех натуральных чисел n.

Ключевые слова: непрерывные дроби, полурегулярные непрерывные дроби, коэффициенты аппроксимации, теорема Валена, Ω-непрерывные дроби, аналог теоремы Бореля.

APPROXIMATION BY $\Omega-$ CONTINUED FRACTIONS

O. A. Gorkusha (c. Khabarovsk)

Abstract

Let $x \in (0,1)$ be a real number, $x = [0;\varepsilon_1/b_1,\ldots,\varepsilon_1/b_n,\ldots]$ be its expansion in $\Omega-$ continued fraction. Let A_n/B_n be its nth convergent and $\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n^2|x - A_n/B_n|$. In this note we prove the analog of the classical theorems by Borel and Hurwitz on the quality of the approximations for $\Omega-$ continued fractions: $\min(\Upsilon_{n-1},\Upsilon_n,\Upsilon_{n+1}) \leqslant 1/\sqrt{5}$. The result is best possible.

Keywords: continued fractions, semi-regular continued fractions, approximation coefficients, Vahlen's theorem, Ω-continued fraction expansion, analogue of Borel's theorem.

[1] Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты № 11-01-00628-а, № 11-01-12004-офи-м-2011.

§1. Введение

В 1891 году А. Гурвиц опубликовал работу [1], в которой он доказал фундаментальный результат, касающийся аппроксимации иррациональных чисел рациональными: для каждого иррационального числа x существует бесконечно много рациональных чисел p/q таких, что

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

В 1903 году Е. Борель в работе [2] предпринял попытку найти эти числа. Борель доказал следующее утверждение: пусть $x=[a_0;a_1,\dots,a_n,\dots]$ — представление числа x в виде регулярной непрерывной дроби, где a_0 — целое и $a_i (i\geqslant 1)$ — натуральные числа. Пусть $P_n/Q_n=[a_0;a_1,\dots,a_{n-1}]$ — подходящая дробь этой непрерывной дроби с номером n и $\Theta_n=\Theta_n(x)=Q_n^2|x-P_n/Q_n|$ — коэффициент аппроксимации с номером n числа x регулярной дробью. Тогда

$$\min(\Theta_{n-1},\Theta_n,\Theta_{n+1})\leqslant\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Как видим, теорема Бореля утверждает, что по крайней мере одна из трех последовательных подходящих дробей удовлетворяет результату Гурвица.

Кроме регулярных непрерывных дробей существует множество других методов аппроксимации. Среди них — представление числа x в виде полурегулярной непрерывной дроби

$$x=[b_0;\varepsilon_1/b_1,\dots,\varepsilon_n/b_n,\dots],$$

где b_0— целое число, $b_i (i\geqslant 1)$ — натуральные числа, $\varepsilon_i\in\{-1,1\} (i\geqslant 1)$. Обозначим через $\{A_n/B_n\}_{n\geqslant 1}$ с

$$\frac{A_n}{B_n}=[b_0;\varepsilon_1/b_1,\dots,\varepsilon_1/b_{n-1}]$$

— последовательность подходящих дробей рассматриваемой непрерывной дроби, а через $\{\Upsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ с

$$\Upsilon_n=B_n^2\left|x-\frac{A_n}{B_n}\right|$$

— последовательность коэффициентов аппроксимации этой же непрерывной дроби. Хорошо известно, что последовательность $\{A_n/B_n\}_{n\geqslant 1}$ образует подпоследовательность последовательности $\{P_n/Q_n\}_{n\geqslant 1}$ подходящих дробей регулярной непрерывной дроби числа x. Поэтому возникает опасность потери точности аппроксимации числа x подходящими дробями соответствующих непрерывных дробей. В качестве примера приведем результат для полурегулярных дробей с выбором минимального по модулю остатка.

В работе [3] H. Jager и C. Kraaikamp получили любопытный результат: для каждого $n\geqslant 1$

$$\min(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \leqslant \frac{5(5\sqrt{5}-11)}{2}.$$

А в работе [4] J. Tong показал, что для любого числа $k \geqslant 1$ и для каждого $n \geqslant 1$

$$\min(\Upsilon_{n-1}, \ldots, \Upsilon_{n+k}) \leqslant \frac{2}{3+\sqrt{5}-2\alpha_k},\ \alpha_1 = \frac{2}{5},\ \alpha_i = \frac{1}{3-\alpha_{i-1}}.$$

Из всех этих результатов следует, что есть "разрыв"между аппроксимациями двух видов при любой длине последовательности коэффициентов аппроксимации дробей полурегулярных дробей с выбором минимального по модулю остатка. Тоже можно сказать и о других классах полурегулярных непрерывных дробей — работы [5], [6].

В этой статье мы показываем, что аппроксимируя вещественное число $\Omega-$ дробями, мы не теряем качество аппроксимации.

Теорема 1. *Для каждого иррационального числа x*

$$\min(\Upsilon_{n-1}(x), \Upsilon_n(x), \Upsilon_{n+1}(x)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}},\ n \geqslant 1,$$

где $\{\Upsilon_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность коэффициентов аппроксимации для $\Omega-$ дроби числа x.

§2. Некоторые свойства $\Omega-$ дробей

Все утверждения, приведенные в этом параграфе, доказываются в работах [7], [8] и поэтому мы приводим их без доказательств. В перечисленных работах было показано, что $\Omega-$ дробь вещественного числа x — полурегулярная дробь, полученная из регулярной дроби в результате процесса сжатия относительно фиксированной области сжатия $S \subset D$, где $D = ([0,1] \setminus \mathbf{Q}) \times [0,1]$. Определим области $\Delta, \Delta^-, \Delta^+$ и Y, Y_+, Y_- следующим образом:

$$\Delta = D \setminus S,\ \Delta^- = \{(T,V)|(V,T) \in S\}, \Delta^+ = \Delta \setminus \Delta^-;$$

$$Y_+ = \Delta^+, Y_- = F(\Delta^-), Y = Y_+ \bigcup Y_-,\ F(t,v) = \left(-\frac{T}{1+T}, 1-V\right).$$

Свойство 1.[8, §2], [8, Лемма 2]

1. *Область S лежит в $([1/2,1] \setminus \boldsymbol{Q}) \times [0,1]$.*

2. *Области S и Δ^- не пересекаются.*

Далее определим операторы $\Psi_+ : Y_+ \mapsto \Psi_+(Y_+)$, $\Psi_- : Y_- \mapsto \Psi_-(Y_-)$, $\Psi : Y \mapsto \Psi(Y)$ соотношениями

$$\Psi_+(t,v) = \left(\frac{v}{1+tv}, \frac{t}{1+tv}\right),$$

$$\Psi_-(t,v) = \left(\frac{v}{1+tv}, \frac{-t}{1+tv}\right),$$

$$\Psi_(t,v) = \begin{cases} \Psi_+(t,v), & (t,v) \in Y_+; \\ \Psi_-(t,v), & (t,v) \in Y_-. \end{cases}$$

Свойство 2. [8, §5] *Для любого вещественного числа x и для каждого $n \geqslant 1$ точка $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n)$, где $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n$ — коэффициенты аппроксимации числа x $\Omega-$ дробью этого числа, распределена в области $\Psi_+(Y_+)$, если $\varepsilon_n = 1$ и в области $\Psi_-(Y_-)$, если $\varepsilon_n = -1$.*

Кроме этого нам понадобятся свойства полурегулярных дробей, которые мы приведем без доказательств. Полное изложение представлено, в частности, в работе [9]: Для каждого $n \geqslant 1$

$$\Upsilon_n = \frac{v_{n+1}}{1+t_{n+1}v_{n+1}},\ \Upsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}t_{n+1}}{1+t_{n+1}v_{n+1}}, \tag{1}$$

$$t_n = [0; \varepsilon_n/b_n, \varepsilon_{n+1}/b_{n+1}, \ldots], v_n = [0; 1/b_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/b_{n-2}, \ldots, \varepsilon_2/b_1]. \tag{2}$$

§3. Доказательство основного результата

Лемма 1. *Точка $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ не принадлежит области $\Psi_-(Y_-)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда, согласно определению оператора Ψ_-, точке P_1 соответствует точка $P_2 = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ в области Y_-. А из определения множества Δ^- следует, что этой точке соответствует точка $P_3 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ в области Δ^-.

С другой стороны, если принять во внимание свойство 1, то получим, что область Δ^- лежит выше отрезка $\{(T,T) | T \in [0,1]\}$. Этот вывод противоречит полученному утверждению. Лемма доказана.

□

Лемма 2. *Для каждого $n \geqslant 1$*

$$\Upsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(\varepsilon_n \Upsilon_{n-1} + b_n\sqrt{1 - 4\varepsilon_n \Upsilon_{n-1}\Upsilon_n} - b_n^2 \Upsilon_n).$$

Доказательство. Воспользуемся формулами (1), (2) и выразим коэффициенты аппроксимаци $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}$ через $t_n, v_n, t_{n+1}, v_{n+1}$. Затем, учитывая соотношение $t_n = \frac{\varepsilon_n}{b_n + t_{n+1}}$, получаем зависимость $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}$ от v_n, t_{n+1}, v_{n+1}, в том числе и равенство

$$\Upsilon_n = \frac{1}{b_n + t_{n+1} + \varepsilon_n v_n}.$$

Выражая отсюда v_n и из равенства $\Upsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}t_{n+1}}{1+t_{n+1}v_{n+1}}$ выражая v_{n+1}, получим равенства

$$\varepsilon_n\Upsilon_{n-1} = (b_n + t_{n+1}) - \Upsilon_n(b_n + t_{n+1})^2,$$
$$\Upsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(t_{n+1} - \Upsilon_n t_{n+1}^2).$$

С учетом неравенства $t_n v_n < 1$ выразим t_{n+1} :

$$t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon_n\Upsilon_{n-1}\Upsilon_n}}{2\Upsilon_n} - b_n.$$

Отсюда сейчас же получаем утверждение леммы.

□

Теперь мы в состоянии доказать теорему, сформулированную во введении.

Доказательство. Из свойства 2 следует, что для каждого $n \geqslant 1$

$$(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n) \in \Psi_+(Y_+), \quad \varepsilon_n = 1;$$
$$(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n) \in \Psi_-(Y_-), \quad \varepsilon_n = -1.$$

Если хотя бы одна из точек $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n), (\Upsilon_n, \Upsilon_{n+1})$ не лежит в области

$$\Psi' = \left\{(w_1, w_2) \in \Psi_+(Y_+) \middle| w_1, w_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\right\},$$

то доказывать нечего. И если $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n)$ принадлежит области $\Psi_-(Y_-)$, то справедливость теоремы вытекает из леммы 1.

Осталось рассмотреть случай, когда $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n), (\Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \in \Psi'$. При таких условиях $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = 1$ и $b_n = 1$. Из леммы 2 следует, что функция относительно переменных $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n$, по которой вычисляется Υ_{n+1}, имеет максимальное значение, равное $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Следовательно

$$\min(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}},$$

из чего следует утверждение теоремы.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hurwitz A. Über die angenäherte Darstekkung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche // Math. Ann. 1891. №39. P. 279-284.

2. Borel E. Contribution *á* l'analyse arithm*é*tique do continu // J. Math. Pures. Appl. 1903. №9. P. 329-375.

3. Jager H., Kraaikamp C. On the approximation by continued fractions // J. Math. Pures. Appl. 1989. №92. P. 289-307.

4. Tong J. Approximation by nearest integer continued fractions // Math. Scand. 1992. №71. P. 161-166.

5. Kraaikamp C., Shmidt T., Smeets L. Tong's spectrum for Rosen continued fractions // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2007. №19. P. 641-661.

6. Hartono Y. Ergotic Properties of Continued Fraction Algorithms. Delft University Press 2003. ISBN 90-407-2381-8

7. Горкуша О. А. О конечных цепных дробях специального вида // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1(25). С. 80-108.

8. Горкуша О. А. Некоторые метрические свойства $\Omega-$ дробей // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, №2. С. 28-58.

9. Dajani K., Kraaikamp C. Ergotic Theory of Numbers Carus Mathematical Monographs, 29. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002. 190 p.

Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.
Поступило 12.09.2013