ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-234-240

О вещественных нулях производной функции Харди

Ш. А. Хайруллоев

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич — кандидат физико-математических наук, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Аннотация

Одной из актуальных задач теории дзета-функции Римана является доказательство существования её нулей на коротких промежутках критической прямой или, что то же самое, вещественных нулей функции Харди $Z(t)$. Обобщением этой задачи является исследование нулей производных $Z^{(j)}(t)$ этой функции. Пусть $T > 0$. Определим величину $H_j(T)$ – расстояние от T до ближайшего вещественного нуля не меньшего T j-ой производной функции Харди. В работе доказана верхняя оценка для величины $H_j(T)$.

Ключевые слова: Функция Харди, дзета-функция Римана, экспоненциальная пара, тригонометрическая сумма, критическая прямая, нуль нечётного порядка.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Ш. А. Хайруллоев. О вещественных нулях производной функции Харди // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 234–240.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-234-240

On real zeros of the derivative of the Hardy function

Sh. A. Khayrulloev

Khayrulloev Shamsullo Amrulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tajik National University (Dushanbe).
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Abstract

The existence of the zeros of the Riemann zeta-function in the short segments of the critical line (or the real zeros of Hardy's function $Z(t)$, that is the same) is one of the topical problems in the theory of the Riemann zeta-function. The study of the zeros of Hardy function's derivatives $Z^{(j)}(t)$ is the generalization of such problem. Let $T > 0$. Let us define the quantity $H_j(T)$, the distance from T to the nearest real zero not less than T of the j-th derivative of the Hardy function. In the paper, an upper bound for $H_j(T)$ is proved.

Keywords: Hardy function, Riemann zeta function, exponential pair, trigonometric sum, critical line, odd order zero.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Sh. A. Khayrulloev, 2021, "On real zeros of the derivative of the Hardy function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 234–240.

1. Введение

Функция Харди $Z(t)$ задаётся равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает вещественные значения при вещественных значениях t, и вещественные нули $Z(t)$ являются ординатами нулей дзета-функции Римана, лежащих на критической прямой. Существование вещественных нулей функции Харди $Z(t)$ на коротких промежутках критической прямой является одной из актуальных проблем теории дзета-функции Римана. Существует гипотеза [1], что длина H промежутка $(T, T+H)$, содержащего нуль функции $Z(t)$, сверху ограничена величиной T^{ε}, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [2]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей*. Затем Харди и Литтлвуд [3] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечётного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [4] в 1976 г. показал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant cT^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба [5, 6] доказал теорему Харди-Литтлвуда уже при $H \geqslant cT^{5/32}\ln^2 T$.

При изучении нулей дзета-функция Римана в коротких промежутках критической прямой, основным моментом является оценка тригонометрических сумм вида

$$C(t, M) = \sum_{M < m \leqslant M_1} e\left(\frac{t\ln(P_1 - m)}{2\pi}\right), \tag{1}$$

где

$$t \geqslant t_0 > 0, \quad \sqrt{P_1} \leqslant M \leqslant \frac{P_1}{10}, \quad M_1 \leqslant 2M, \quad P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right].$$

А.А. Карацуба в [7] отметил, что если для оценки тригонометрических сумм (1) применить более сложные методы, например, метод экспоненциальных пар, то можно получить более точную оценку.

Автор [8, 9] доказал, что *промежуток* $(T, T+H)$ *при*

$$H \geqslant T^{\frac{5}{32} - \frac{\frac{5}{6}-R}{192(2R+1)}}\ln^2 T,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$, *постоянная Ранкина, имеет нуль нечётного порядка* $\zeta(1/2+it)$.

А.А.Карацуба [1, 10, 11], наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассматривая более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, доказал: *пусть* j *— натуральное число,* $T \geqslant T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$, *тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T,\, T+H)$, *если*

$$H \geqslant cT^{\frac{1}{6j+6}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}. \tag{2}$$

В работах [12, 13, 14] задача о величине промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$, сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть: *пусть* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара,* j *— натуральное число,* $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c_0(j) > 0$, *тогда функция* $Z^{(j)}(t)$ *имеет нуль нечётного порядка в промежутке* $(T,\, T+H)$, *если*

$$H \geqslant cT^{\omega_j(\kappa,\lambda)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \omega_j(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda-0.5}{2\kappa+4\lambda+2j-1}. \tag{3}$$

Заметим, что теорема А.А.Карацубы, то есть оценка (2) является следствием оценки (3), при

$$(\kappa, \lambda) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

Основным результатом работы является верхняя оценка величины $H_j(T)$.

Теорема 1. *Пусть $j \geqslant 3$ — натуральное число, $T \geqslant T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H_j(T))$, если*

$$H_j(T) \geqslant cT^{\frac{1}{6+6j} - \frac{1}{6(1+j)(19+18j)}} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

При доказательстве основной теоремы работы пользуемся алгоритмом определения экспоненциальных пар [15]. Применяя этот алгоритм, в случае $j = 1$ и $j = 2$ соответственно, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $T \gg 1$, тогда функция $Z'(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H_1(T))$, если*

$$H_1(T) \gg T^{\frac{1}{12} - \frac{65601}{810284}} \ln T.$$

Теорема 3. *Пусть $T \gg 1$, тогда функция $Z''(t)$ имеет нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H_2(T))$, если*

$$H_2(T) \gg T^{\frac{1}{18}} (\ln T)^{\frac{2}{3}}.$$

Выражаю глубокую благодарность академику Российской академии наук Юрий Владимировичу Матиясевичу и доктор физико-математических наук Максиму Александровичу Королеву за ценные замечания, которые улучшили качество работы.

2. Вспомогательные утверждения

Определение 1. *Если $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $F(u) \in C^{\infty}(B, 2B)$, $A \geq 1$,*

$$AB^{1-r} \tilde{\ell} |F^{(r)}(u) \mid \tilde{\ell} AB^{1-r}, \; r = 1, 2, 3, \ldots,$$

где постоянные под знаком $\tilde{\ell}$ зависят только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B \leq n \leq B+h} e(F(n)) \tilde{\ell} A^{\kappa} B^{\lambda}, \quad 0 \leq \kappa \leq 0.5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара (κ, λ) называется экспоненциальной парой.

Тривиальная оценка показывает, что $(0; 1)$ является экспоненциальной парой. E.Phillips [15] доказал, что если (κ, λ) экспоненциальная пара, то

$$A(\kappa, \lambda) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa + 2}, \; \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa + 2}\right), \quad B(\kappa, \lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, \; \kappa + \frac{1}{2}\right)$$

также являются экспоненциальными парами.

Пусть

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{a\kappa + b\lambda + c}{d\kappa + e\lambda + f},$$

где a, b, c, d, e, f — вещественные числа. Для минимизации дробно-линейной функции $\theta(\kappa, \lambda) = \theta\Lambda$ по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$, где

$$\theta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

пользуемся алгоритмом определения оптимальных экспоненциальных пар [15]. Основу этого алгоритма составляют леммы 1, 2 и 3 (см. [15], теоремы 5.5, 5.6 и 5.8), в формулировке которых используются обозначения:

$$u = bf - ce, \qquad v = af - cd, \qquad w = ae - bd, \qquad \xi(\theta) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть для всех $(\kappa, \lambda) \in \mathcal{P}$ выполняется $d\kappa + e\lambda + f > 0$, r — произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию $r \leqslant \inf\limits_{\mathcal{P}}(\kappa+\lambda)$, $Y = \max(wr+v-u,\ w+v-u)$, $Z = \min(wr + v - u,\ w + v - u)$. Тогда*

$$\inf\theta = \begin{cases} \inf\theta A, & \text{если } Z \geqslant 0; \\ \inf\theta BA, & \text{если } Y \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство см. [15], стр. 57.

Лемма 2. *Пусть r такое, как в лемме 1, C — некоторое конечное произведение A и B, что $\inf\theta BA = \inf\theta BAC$, и $\sup\{\kappa+\lambda : (\kappa, \lambda) \in CA\mathcal{P}\} = r_1$, а также $\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) \geqslant 0$, тогда $\inf\theta = \inf\theta A$.*

Доказательство см. [15], стр. 59.

Лемма 3. *Пусть u, v, w такие, как в лемме 1, тогда следующие условия эквивалентны:*
a) $\inf\theta = \inf\theta A^q$, $\forall\, q \geqslant 0$;
b) $\inf\theta = \theta(0, 1)$;
c) $w + v \geqslant u$, $u \leqslant 0$.

Доказательство см. [15], стр. 60.

Каждая итерация алгоритма состоит из следующих 6 шагов:

1. Проверяем условие $d\kappa + e\lambda + f \geqslant 0$.
2. Вычисляем $\xi(\theta)$.
3. Если условие $\inf\theta = \theta(0, 1)$ в лемме 3 выполняется, то останавливаемся.
4. Проверяем выполнение условия леммы 3 к θB, то есть, если выполняется условие $\inf\theta = \theta(0.5, 0.5)$, то останавливаемся.
5. Проверяем выполнения условия леммы 1, если лемма 1 не применима, то проверяем условие леммы 2, если и лемма 2 не применима, то завершаем алгоритм, ибо он не работает в этом случае.
6. Если $\inf\theta = \inf\theta A$, заменяем $\xi(\theta)$ на $\xi(\theta A)$, если же $\inf\theta = \inf\theta BA$, то $\xi(\theta)$ заменяем на $\xi(\theta BA)$, иначе, возвращаемся к шагу 5.

3. Доказательство теоремы 1.

Минимизируем функцию $\omega_j(\kappa,\lambda)$, определенной в (3) по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$. Воспользовавшись представлением

$$\omega_j(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}(\kappa,\lambda)}\right),\quad \delta_j(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+j}{0.5-\kappa+j},$$

эту минимизацию сводим к минимизации $\delta_j(\kappa,\lambda)$.

Минимизация по множеству всех экспоненциальных пар $\mathcal{P}$ функции

$$\delta_j(\kappa,\lambda)=\frac{\lambda+j}{0.5-\kappa+j}=\delta_j\Lambda,\qquad \delta_j=\begin{pmatrix}0&1&j\\-1&0&0.5+j\end{pmatrix}.$$

при помощи вышеуказанного алгоритма состоит всего из четырёх итераций, которые для удобства обозначим соответственно буквами D, E, F и G. Имеем

D1. Условия леммы 1, то есть неравенство $-\kappa+0.5+j>0$, выполняется.

D2. По формуле (3), вычисляя параметры u, v и w, составим вектор

$$\xi(\delta_j)=\begin{pmatrix}0.5+j\\j\\1\end{pmatrix}.$$

D3. $w+v=1+j$, $u=0.5+j$, то есть условия c) леммы 3, не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия a) и b) этой леммы.

D4. Применяя лемму 3 к $\delta_jB=\begin{pmatrix}1&0&0.5+j\\0&-1&1+j\end{pmatrix}$, и вычисляя параметры u, v и w, составим вектор

$$\xi(\delta_jB)=\begin{pmatrix}0.5+j\\1+j\\-1\end{pmatrix},$$

и имеем $w+v=j$ и $u=0.5+j$, то есть условия c) леммы 3, не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия a) и b) этой леммы.

D5. К δ_j применяя лемму 1 при $r=\frac{1}{2}$, $Y=0.5>0$, $Z=r-0.5>0$, имеем $\inf\delta_j=\inf\delta_jA$.

D6. Заменяя $\xi(\delta_j)$ на $\xi(\delta_jA)$, имеем

$$\delta_jA=\begin{pmatrix}1+2j&1&1+2j\\2j&0&1+2j\end{pmatrix},\qquad \xi(\delta_jA)=\begin{pmatrix}1+2j\\1+2j\\-2j\end{pmatrix}.$$

Отметим, что после первой итерации не обязательно проверять первые четыре шага алгоритма.

E5. Применяя лемму 1 к δ_jA при $Y=-2jr<0$, $Z=-2j<0$, имеем $\inf\delta_jA=\inf\delta_jABA$.

E6. Заменяя $\xi(\delta_jA)$ на $\xi(\delta_jABA)$, находим

$$\delta_jABA=\begin{pmatrix}4+4j&1+2j&3+4j\\2+4j&2j&2+4j\end{pmatrix},\qquad \xi(\delta_jABA)=\begin{pmatrix}2+2j\\2+4j\\-2\end{pmatrix}.$$

F5. Применяя лемму 1 к $\delta_j ABA$ при $Y = -2r+2j > 0$, $Z = -2+2j \geqslant 0$, получим $\inf \delta_j ABA = \inf \delta_j ABA^2$.

F6. Заменяя $\xi(\delta_j ABA)$ на $\xi(\delta_j ABA^2)$, имеем

$$\delta_j ABA^2 = \begin{pmatrix} 11+14j & 1+2j & 7+10j \\ 6+14j & 2j & 4+10j \end{pmatrix}, \qquad \xi(\delta_j ABA^2) = \begin{pmatrix} 4+4j \\ 2+8j \\ -6-4j \end{pmatrix}.$$

G5. Лемму 1 к $\delta_j ABA^2$ применить нельзя, так как $Y = -6r - 4rj - 2 + 4j > 0$, $Z = -8 < 0$. Поэтому при

$$\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) = -6r_1 - 4jr_1 - 2 + 4j < 0,$$

применяя лемму 2, завершаем алгоритм. Имеем

$$\inf \delta_j = \delta_j ABA^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \delta_j \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18}\right) = 1 + \frac{6}{7+18j}.$$

Следовательно,

$$\omega_j \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}\left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18}\right)}\right) = \frac{1}{6+6j} - \frac{1}{6(1+j)(19+18j)}.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

В работе получена верхняя оценка длины промежутка критической прямой, содержащего нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и её нули // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 19 – 70.

2. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt. Rend. Acad. Sci. 1914. V. 158. pp. 1012 – 1014.

3. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math.Z. 1921. V. 10. pp. 283 – 317.

4. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith. 1976. 31. pp. 31 – 43.

5. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 49 – 63.

6. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:3 1984. С. 569 -– 584.

7. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана – М.: Физматлит. 1994. –376с. –ISBN 5–02–014120–8.

8. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 5. С. 331 – 337.

9. Хайруллоев Ш. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Вестник Таджикского национального университета. Спецвыпуск посвящен году образования и технических знаний. 2010. С. 35 – 40.

10. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:6 1984. С. 1214 -– 1224.
11. Карацуба А.А. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки, 60:3 1996. С. 448 -– 449.
12. Хайруллоев Ш. А. О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 335 – 348.
13. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.
14. Хайруллоев Ш. А. О соседных нулях производной n–го порядка функции Харди // Доклады АН РТ. 2019. Т. 62. № 3 – 4. С. 145 – 149.
15. Graham S. W., Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums. Cambridge university press. 1991. Cambridge. New York. Port Chester. Melbourne. Sydney.

REFERENCES

1. Karatsuba, A. A., 1985, "The Riemann zeta function and its zeros", *Russian Math. Surveys* vol. 40, pp. 23 -– 82.
2. Hardy G. H., 1914, "Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", *Compt.Rend. Acad.Sci.,* vol. 158, pp. 1012 – 1014.
3. Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. 1921, "The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line", *Math.Z.,* vol. 10, pp. 283 – 317.
4. Moser, J., 1976, "On a certain sum in the theory of the Riemann zeta-function", *Acta Arith.,* pp. 31 – 43. (Russian).
5. Karatsuba, A. A., 1983, "On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line", *Proc. Steklov Inst. Math.,* vol. 157, pp. 51 — 66.
6. Karatsuba, A. A., 1984, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line", *Math. USSR-Izv.,* 24, no. 3, pp. 523 – 537.
7. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A., 1994, *The Riemann zeta function*, Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 376 pp. ISBN: 5-02-014120-8
8. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A., 2009, "The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.
9. Khayrulloev, Sh. A., 2010, "On the zeros of the Riemann zeta function on the critical line", *Bulletin of the Tajik National University*, pp. 35 – 40.
10. Karatsuba, A. A., 1985, "The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$", *Math. USSR-Izv.*, vol. 25, no. 3, pp. 519 – 529.
11. Karatsuba, A. A., 1996, "Density theorem and the behavior of the argument of the Riemann zeta function", *Math. Notes*, vol. 60, no. 3, pp. 333 – 334.
12. Khayrulloev, Sh. A., 2010, "On the functions of Hardy zeros and its derivatives lying on the critical line", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 20, Is. 4, pp. 335 -– 348.
13. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A., 2006, "Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.
14. Khayrulloev, Sh. A., 2019, "Neighboring zeros of the n–th order derivative of the Hardy function", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3 – 4, pp. 145 – 149.
15. Graham, S. W. & Kolesnik, G., 1991, "Van Der Corput's Method of Exponential Sums", *Cambridge University Press.* Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 119 p.

Получено 28.05.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.