

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 514

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-138-160

**Преобразования метрик, сохраняющие геометрические
характеристики конечных метрических пространств**

С. Ю. Липатов

Липатов Степан Юрьевич — Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: stepa.lipatov@yandex.ru***Аннотация**

Задан класс F псевдометрических пространств и семейство преобразований T псевдометрики. Нужно было описать семейство преобразований $T' \subset T$, которые переводят F в себя и сохраняют некоторые типы минимальных заполнений. Был рассмотрен случай, когда F — класс всех конечных псевдометрических пространств, класс T состоит из отображений $M \mapsto AM + \tau$, где матрицы A и τ задают отображение матрицы псевдометрики M , а элементы T' сохраняют типы G минимальных заполнений псевдометрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G , и доказано, что $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$, а τ является матрицей псевдометрики, одно из минимальных заполнений которой — звезда; когда F — класс всех конечных псевдометрических пространств, класс T состоит из отображений $\rho \rightarrow A\rho$, где A — диагонализируемая матрица с двумя собственными числами $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} \geq 0$, наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ которой имеет кратность 1, собственное пространство, соответствующее значению $\lambda_{\min}$, не содержит ненулевых псевдометрик, а элементы T' сохраняют типы G минимальных заполнений псевдометрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G . И доказано, что для любой матрицы отображения из T' существует псевдометрика, являющаяся собственным вектором с собственным значением $\lambda_{\max}$, среди минимальных заполнений для которой есть заполнение типа звезда.

Ключевые слова: минимальные заполнения, конечные псевдометрические пространства.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. Ю. Липатов. Преобразования метрик, сохраняющие геометрические характеристики конечных метрических пространств // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 138–160.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 514

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-138-160

Transformations of metrics that preserve the geometric characteristics of finite metric spaces

S. Yu. Lipatov

Lipatov Stepan Yur'evich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: stepa.lipatov@yandex.ru***Abstract**

Given a class F of metric spaces and a family of transformations T of a metric, one has to describe a family of transformations $T' \subset T$ that transfer F into itself and preserve some types of minimal fillings. The article considers two cases. First, when F is the class of all finite pseudometric spaces, the class T consists of the maps $M \mapsto AM + \tau$, where the matrices A and τ define the mapping of pseudometric matrix M , and the elements of T' preserve any type G of minimal fillings of pseudometric spaces whose points correspond to vertices of degree 1 of the graph G , and we prove that $A = \lambda E$ for some $\lambda \geq 0$, and τ is a pseudometric matrix, one of the minimal fillings of which is a star. Second when F is the class of all finite pseudometric spaces, the class T consists of the maps $\rho \rightarrow A\rho$, where A is a diagonalizable matrix with two eigenvalues $\lambda_{max} > \lambda_{min} \geq 0$, the largest eigenvalue λ_{max} of which has multiplicity 1, the eigenspace corresponding to the value λ_{min} , does not contain nonzero pseudometrics, and the elements of T' preserve the types G of minimal fillings of the pseudometric space, whose points correspond to vertices of degree 1 of graphs G . And we prove that for any mapping matrix from T' there is a pseudometrics that is an eigenvector with the eigenvalue λ_{max} , among the minimum fillings of which there is a filling of the star type. Second, when F is the class of all finite metric spaces, the class T consists of the maps $\rho \rightarrow N\rho$, where the matrix N is the sum of a positive diagonal matrix A and a matrix with the same rows of non-negative elements. The elements of T' preserve all minimal fillings of the type of non-degenerate stars. It has been proven that T' consists of maps $\rho \rightarrow N\rho$, where A is scalar. Third, when F is the class of all finite additive metric spaces, T is the class of all linear mappings given by matrices, and the elements of T' preserve all non-degenerate types of minimal fillings, and we proved that for metric spaces consisting of at least four points T' is the set of transformations given by scalar matrices. Fourth, when F is the class of all finite ultrametric spaces, T is the class of all linear mappings given by matrices, and we proved that for three-point spaces the matrices have the form $A = R(B + \lambda E)$, where B is a matrix of identical rows of positive elements, and R is a permutation of the points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ and $(0, 0, 1)$.

Keywords: minimal fillings, finite pseudometric spaces.*Bibliography:* 18 titles.**For citation:**

S. Yu. Lipatov, 2021, "Transformations of metrics that preserve the geometric characteristics of finite metric spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 138–160.

1. Введение

Теория минимальных заполнений активно развивается, ей посвящено много работ: [1]–[14]. Проблема Штейнера — это задача об оптимальном соединении конечного множества точек

метрического пространства. По-видимому, первые формулировки этого типа возникли в трудах Ферма, поставившего вопрос о поиске такого расположения точки на плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин заданного треугольника наименьшая из возможных. В течении нескольких столетий был получен полный ответ, из которого ясно, что, соединяя три точки на плоскости, бывает выгодно добавить четвертую точку-развилку. Важность таких дополнительных точек прекрасно понимал Гаусс, обсуждавший в переписке с Шумахером задачу о том, как соединить Гамбург, Бремен, Ганновер и Брауншвейг кратчайшей системой дорог. В 1934 году Ярник и Кесслер сформулировали общую задачу, которая теперь известна как классическая проблема Штейнера. Фактически, их задача представляет собой обобщение задачи Ферма и Гаусса о кратчайшем соединении на случай произвольного конечного множества точек плоскости. Что касается самого Штейнера, то он занимался другим обобщением задачи Ферма: найти в пространстве такую точку, для которой сумма расстояний до заданных точек будет наименьшей возможной. Отметим, что недоразумение о приоритете возникло благодаря популярной книге Куранта и Роббинса “Что такое математика?”, где задача Ферма была приписана Штейнеру, а задача Ярника и Кесслера была названа просто обобщением проблемы Штейнера.

Сетью в псевдометрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, d)$, *параметризованной* произвольным связным *графом* $G = (V, E)$, или *сетью типа G* , называется отображение $\Gamma : V \rightarrow X$ ([2]). *Вершинами* и *ребрами* сети Γ называются ограничения отображения Γ соответственно на вершины и ребра графа G . *Длиной ребра* $\Gamma : vw \rightarrow X$ назовем число $d(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а *длиной $d(\Gamma)$ сети Γ* — сумму длин всех ее ребер. *Границей $\partial\Gamma$ сети Γ* назовем ограничение отображения Γ на ∂G . Если $M \subset X$ — конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то будем говорить, что *сеть Γ соединяет множество M* . Вершины графов и сетей, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*. Число $\text{smt}(M) = \inf\{d(\Gamma) \mid \Gamma \text{ — сеть, соединяющая } M\}$ назовем *длиной кратчайшей сети*. Сеть, для которой $d(\Gamma) = \text{smt}(M)$, называется *кратчайшей сетью* ([3]). Понятие минимального заполнения появилось в работах Громова [19] в следующем виде: пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$, где M — замкнутое многообразие с функцией расстояния ρ на нём, а $\mathcal{W} = (W, d)$, где W — компактное многообразие с краем, равным M , таково, что d не уменьшает расстояния между точками из M , тогда $\mathcal{W}$ называется *заполнением $\mathcal{M}$* . Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объемов заполнений, а также описании тех пространств $\mathcal{W}$, называемых *минимальными заполнениями*, на которых эта нижняя грань достигается.

В контексте проблемы Штейнера естественно рассмотреть в качестве M конечное метрическое пространство. Тогда возможные заполнения — метрические пространства, имеющие структуру одномерных стратифицированных многообразий (которые можно рассматривать как реберно взвешенные графы с неотрицательными весовыми функциями). Графы отдельно от весовых функций будем называть *типами заполнений*. При этом будем рассматривать только такие типы, в которых вершинам степени 1 и 2 соответствуют точки метрического пространства M .

Ивановым и Тужилиным [2] было доказано, что преобразования типа $\rho \mapsto \lambda\rho + a$ для $a > \lambda a_\rho$, $\lambda > 0$, где a_ρ — некоторое число, зависящее от метрики ρ , сохраняют типы G минимальных заполнений метрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G . Число a может быть отрицательным; существует такое $a_\rho \leq 0$, для которого $\lambda\rho + a$ — метрика при всех $a > \lambda a_\rho$, и не является метрикой при всех $a < \lambda a_\rho$ (при $a = \lambda a_\rho$ можем получить как метрику, так и псевдометрику).

Общая задача была сформулирована следующим образом: задан класс F псевдометрических пространств и семейство преобразований T псевдометрики. Нужно было описать семейство преобразований $T' \subset T$, которые переводят F в себя и сохраняют некоторые типы минимальных заполнений. Был рассмотрен случай,

- когда F — класс всех конечных метрических пространств,

$T = \{(M, \rho) \rightarrow (M, f \circ \rho) \mid f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}\}$, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений четырехточечных метрических пространств и конечных невырожденных звезд, и доказано, что $T' = \{(M, \rho) \rightarrow (M, \lambda\rho + a) \mid a > \lambda a_\rho\}$ (опубликовано в [5]);

- когда F — класс всех конечных метрических пространств, класс T состоит из отображений $\rho \rightarrow N\rho$, где матрицы N имеют вид 5 (сумма положительной диагональной матрицы A и матрицы с одинаковыми строками из неотрицательных элементов), а элементы T' сохраняют все минимальные заполнения типа невырожденных звезд, и доказано, что T' состоит из таких отображений $\rho \rightarrow N\rho$, где A — скалярна (опубликовано в [6]);
- когда F — класс всех конечных аддитивных метрических пространств, T — класс всех линейных отображений, задаваемых матрицами, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений, и доказано, что T' — множество преобразований, заданных скалярными матрицами (опубликовано в [6]);
- когда F — класс всех конечных псевдометрических пространств, класс T состоит из отображений $M \mapsto AM + \tau$, где матрицы A и τ задают отображение матрицы псевдометрики M , а элементы T' сохраняют типы G минимальных заполнений псевдометрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G , и доказано, что $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$, а τ является матрицей псевдометрики, одно из минимальных заполнений которой — звезда;
- когда F — класс всех конечных метрических пространств, класс T состоит из отображений $\rho \rightarrow A\rho$, где матрицы A — диагонализируемые с двумя собственными числами $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} \geq 0$, наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ которой имеет кратность 1, собственное пространство, соответствующее значению $\lambda_{\min}$, не содержит ненулевых псевдометрик, а элементы T' сохраняют типы G минимальных заполнений псевдометрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G . И доказано, что для любой матрицы отображения из T' среди собственных векторов, соответствующих значению $\lambda_{\max}$, есть псевдометрика, среди минимальных заполнений для которой есть заполнение типа звезда.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Тужилину А.А., а также профессору Иванову А.О. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Предварительные результаты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты. Подробности см. в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Псевдометрикой на множестве M называют такую симметричную функцию $\rho: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\rho(a, a) = 0$ при всех a и выполнены неравенства треугольника: $\rho(i, j) \leq \rho(i, k) + \rho(k, j)$ для любых $i, j, k \in M$. Метрикой на множестве M называют такую псевдометрику d , что для любых различных $a, b \in M$ выполнено $d(a, b) \neq 0$. Если в определении заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, то будем называть такие функции обобщёнными псевдометриками и обобщёнными метриками.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из неравенства треугольника вытекает неотрицательность псевдометрики ρ , так как $0 = \rho(a, a) \leq 2\rho(a, b)$.

Множество неотрицательных вещественных чисел будем обозначать как $\mathbb{R}_+$.

Пусть M — произвольное конечное множество и $G = (V, E)$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G соединяет M , а M — граница графа G , если $M \subset V$. Границу графа

G будем также обозначать через ∂G ¹. Вершины графов и сетей, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*. Пусть теперь $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство, $G = (V, E)$ — связный граф, соединяющий M , и $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа, называемое обычно *весовой функцией* и порождающее *взвешенный граф* $\mathcal{G} = (G, \omega)$. *Весом* взвешенного графа $\mathcal{G}$ называется величина $\omega(\mathcal{G})$, равная сумме весов всех ребер этого графа. Функция ω задает на V псевдометрику d_ω , а именно, расстоянием между вершинами графа $\mathcal{G}$ назовем наименьший из весов путей, соединяющих эти вершины. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p, q) \leq d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого *заполнения*. Число $\text{mf}(\mathcal{M}) = \inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ для $\mathcal{M}$ назовем *весом минимального заполнения*, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \text{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением*.

В дальнейшем мы будем иметь дело с конечными псевдометрическими пространствами $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Преобразования псевдометрик всегда будут действовать только на (индексированный парами из M) набор расстояний между различными точками, оставляя M тем же. Поэтому для любого n будем считать множество M из n точек, на котором задана псевдометрика, фиксированным. Для любого n -точечного (M, ρ) существует биекция $\phi: M \rightarrow \mathbb{N}$ с множеством $\{1, \dots, n\}$, которое вместе с индуцированной на нём псевдометрикой $\bar{\rho}(i, j) = \rho(\phi^{-1}(i), \phi^{-1}(j))$ является его изометричным образом. Свойства точек из M никак не влияют на преобразования псевдометрик и их свойства. В таком случае, каким бы ни было пространство (M, ρ) , зафиксировав некоторую биекцию ϕ , мы можем рассматривать вместо него изометричное ему пространство $(\{1, \dots, n\}, \bar{\rho})$, подразумевая $\phi^{-1}(i)$ вместо $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\rho(a, b) = \bar{\rho}(\phi(a), \phi(b))$ вместо $\bar{\rho}$.

Для конечных псевдометрических пространств $\mathcal{M} = (M, \rho)$ из n точек и типов их заполнений $G = (V, E)$ будем также считать, что $V = \{1, \dots, \#V\}$, причём $M = \{1, \dots, n\}$ и $\rho(i, j) = \rho_{ij}$. Обозначая через ρ ещё и вектор $\rho = (\rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{n-1,n})$ расстояний между различными точками, будем отождествлять его с $\mathcal{M} = (M, \rho)$, так как $\mathcal{M}$ восстанавливается по этому вектору единственным образом. Типы заполнений для $M = \{1, \dots, n\}$ будем считать *изоморфными*, если существует изоморфизм их графов, тождественный на M . Такие изоморфизмы соответствуют перестановкам внутренних вершин.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вектор $\rho = (\rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{n-1,n})$ расстояний между различными точками задаёт на множестве $M = \{1, \dots, n\}$ симметричную функцию для которой $\rho: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\rho(a, a) = 0$ при всех $a \in M$. По замечанию 1 из неравенств треугольника следует, что ρ — метрика. Поэтому если эта функция не является метрикой, то существуют такие a, b и c , для которых не выполнено неравенство треугольника, то есть $\rho_{ab} + \rho_{bc} < \rho_{ac}$.

Обозначим через $\Omega(\rho, G)$ все весовые функции $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что (G, ω) — заполнение для пространства ρ . Положим

$$\text{mpf}(\rho, G) = \inf_{\omega \in \Omega(\rho, G)} \omega(G)$$

и назовем полученное число *весом минимального параметрического заполнения типа G для пространства ρ* .

¹Здесь автор использует обозначения и терминологию, которая сложилась в так называемой теории экстремальных сетей. Эта теория, возникшая на стыке геометрии, дискретной оптимизации и теории графов, см. [ITUMN], рассматривает проблему Штейнера, ее аналоги и обобщения как граничные задачи: оптимизируются (в том или ином смысле) графы с фиксированным подмножеством вершин. Терминальные вершины называется граничными, остальные — подвижными или внутренними. Множество всех граничных вершин называется границей и обозначается так же как топологическая граница, хотя и не совпадает с ней. В этом контексте граница графа не определена однозначно. Какое именно подмножество вершин графа выбирать в качестве границы зависит от конкретной задачи. (Примечание А. Иванова.)

Будем называть дерево *бинарным*, если каждая его вершина имеет степень 1 или 3, а граница состоит в точности из всех вершин степени 1. Взвешенные графы и заполнения с положительными весами будем называть *невыврожденными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В [2] доказано, что при изучении минимальных заполнений и кратчайших сетей всегда можно ограничиться рассмотрением деревьев, у которых все вершины степени 1 и 2 принадлежат границе. Класс всех таких деревьев обозначим через T_o ; у которых граница соответствует вершинам степени 1 — через T_1 и бинарных через T_b . Соответствующие классы деревьев с n -точечной границей обозначим через $T_o(n)$, $T_1(n)$ и $T_b(n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([4]). Для любого натурального $n \geq 2$ классы $T_o(n)$, $T_1(n)$ и $T_b(n)$ являются конечными множествами.

Конечное псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *аддитивным*, если M можно соединить взвешенным деревом $\mathcal{G} = (G, \omega)$ для которого ρ совпадает с ограничением d_ω на M ([2]). Дерево $\mathcal{G}$ в этом случае называется *порождающим*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 ([2]). У каждого аддитивного пространства единственным невыврожденным минимальным заполнением является его невыврожденное порождающее дерево.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$, минимальное заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ которого представляет собой звезду, в которой внутренняя вершина v соединена со всеми точками $p_i \in M$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$, аддитивно.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольное дерево. Пусть $v \in V$ — внутренняя вершина степени $(k+1) \geq 3$, смежная с k вершинами $w_1, \dots, w_k$ из ∂G . Тогда множество вершин $\{w_1, \dots, w_k\}$, а также множество ребер $\{vw_1, \dots, vw_k\}$, называются *усами*. Число k назовём *степенью*, а v — *общей вершиной* этих усов.

ТЕОРЕМА 1 ([2]). Преобразования типа $\rho \mapsto \lambda\rho + a$ для $a > \lambda a_\rho$ сохраняют типы G минимальных заполнений метрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 ([2]). Пусть $M = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, и ρ — произвольная псевдометрика на M . Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Тогда вес минимального заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ дается формулой

$$\frac{1}{2}(\min\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\} + \max\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\}).$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij} + \rho_{rs}$, то тип минимального заполнения — бинарное дерево, усы которого суть $\{p_i, p_j\}$ и $\{p_r, p_s\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 ([2]). Критерием аддитивности пространства является правило четырех точек: для любых четырех точек p_i, p_j, p_k, p_l величины $\rho(p_i, p_j) + \rho(p_k, p_l)$, $\rho(p_i, p_k) + \rho(p_j, p_l)$, $\rho(p_i, p_l) + \rho(p_j, p_k)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны.

Точку p конечного псевдометрического пространства (M, ρ) назовем *вырожденной*, если в этом пространстве существуют точки q и r отличные от p и такие, что $\rho(q, r) = \rho(q, p) + \rho(p, r)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6 ([2]). Пусть $\mathcal{G}$ — минимальное заполнение конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$. Тогда каждая граничная вершина степени больше 1 — вырожденная точка пространства $\mathcal{M}$. В частности, если пространство $\mathcal{M}$ невыврождено, то степень каждой граничной вершины дерева $\mathcal{G}$ равна 1 и все граничные ребра невыврождены.

Обозначим r -окрестность множества S в произвольном метрическом пространстве (E, ρ) через $U_r(S) = \{x \in E : \inf_{y \in S} \rho(x, y) < r\}$ и пусть $B_r(S) = \{x \in E : \inf_{y \in S} \rho(x, y) \leq r\}$, и для любой точки $x \in E$ положим $B_r(x) = \{y \in E : \rho(x, y) \leq r\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 ([20]). Пусть A и B — подмножества метрического пространства. Расстоянием по Хаусдорфу между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\}.$$

Будем также использовать эквивалентное определение

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B_r(B) \text{ и } B \subset B_r(A)\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7 ([20]). Расстояние по Хаусдорфу является обобщённой псевдометрикой на 2^E

Множество 2^E всех подмножеств E будем также обозначать через $\mathcal{P}(E)$, а множество всех непустых замкнутых подмножеств E будем обозначать через $\mathcal{F}(E)$.

Пусть ρ — конечное псевдометрическое пространство, соединённое некоторым (связным) графом $G = (V, E)$. Как и выше, через $\Omega(\rho, G)$ обозначим множество, состоящее из всех весовых функций $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которых $\mathcal{G} = (G, \omega)$ является заполнением пространства ρ , а через $\Omega_m(\rho, G)$ — его подмножество, состоящее из весовых функций, для которых $\mathcal{G}$ — минимальное параметрическое заполнение пространства ρ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 8 ([2]). Множество $\Omega(\rho, G)$ замкнуто и выпукло в линейном пространстве $\mathbb{R}^E$ всех функций на E , а $\Omega_m(\rho, G) \subset \Omega(\rho, G)$ — непустой выпуклый компакт.

Для любого $a \in \mathbb{R}$ положим $\mathbb{R}_{>a} = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

Положим $D = \{(x, x) : x \in M\} \subset M^2$. Для функций $\rho: M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ определим функцию $\rho_f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, равную нулю на D и $f \circ \rho$ на $M^2 \setminus D$.

Рассмотрим случай, когда F — класс всех конечных метрических пространств, $T = \{(M, \rho) \rightarrow (M, \rho_f) \mid f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}\}$, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений четырехточечных метрических пространств и конечных невырожденных звёзд. В этом случае был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2 ([6]). Пусть $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ — такая функция, что для каждого метрического пространства (M, ρ) функция ρ_f по-прежнему является метрикой на M , и сохраняются невырожденные звезды (из 8 точек) и типы минимальных заполнений четырёхточечных пространств. Тогда f имеет вид $f(x) = kx + b$.

В данной статье мы будем рассматривать другие преобразования метрики: аффинные преобразования матриц метрики и линейные преобразования векторов метрики.

3. Аффинные преобразования матриц метрики

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть матрицы A и τ задают преобразование матриц $f: M \mapsto AM + \tau$. Тогда если это преобразование переводит любую матрицу метрики в матрицу псевдометрики, то матрица A диагональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_0 — матрица метрики, в которой все ненулевые расстояния равны 1, а A_i — матрица псевдометрики, в которой все расстояния до i равны 1, а остальные 0.

$$(A_0)_{kl} = \begin{cases} 1, & k \neq l \\ 0, & k = l \end{cases} \quad (A_i)_{kl} = \begin{cases} 1, & i \in \{k, l\}, k \neq l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $A_0 + A_i$ — матрица метрики для любого i . Так как преобразование, заданное матрицами A и τ переводит любую метрику в псевдометрику, то у матриц $AA_0 + \tau$ и $A(A_0 + A_i) + \tau = AA_0 + AA_i + \tau$ все диагональные элементы равны 0. Следовательно, и у матрицы AA_i все диагональные элементы равны 0.

Покажем, что все внедиагональные элементы матрицы A равны 0. Рассмотрим произвольные $i \neq j$. Положим $B = AA_j$, тогда в силу сказанного выше $b_{ii} = 0$. По определению b_{ii} — произведение i -той строки матрицы A на i -тый столбец A_j , в котором на j -том месте стоит 1, а на остальных расположены нули. Таким образом, $a_{ij} = b_{ii} = 0$. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть матрицы A и τ задают преобразование матриц $f: M \mapsto AM + \tau$. Тогда если это преобразование переводит любую матрицу метрики в матрицу псевдометрики, то $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Усилим утверждение 9. Согласно утверждению 9, матрица A диагональна, поэтому $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Выберем произвольную матрицу метрики $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ и пусть

$$M' = f(M) = (m'_{ij})_{i,j=1}^n = AM + \tau, \quad M'' = f(2M) = (m''_{ij})_{i,j=1}^n = 2AM + \tau.$$

Тогда для любых i и j выполнено $m'_{ij} = \lambda_i m_{ij} + \tau_{ij}$ и $m''_{ij} = 2\lambda_i m_{ij} + \tau_{ij}$. Покажем, что $\lambda_i = \lambda_j$ для любых $i \neq j$.

Из симметричности матриц псевдометрики следует, что для любых $i \neq j$ выполнено $m_{ij} = m_{ji}$ и $m'_{ij} = m'_{ji}$, отсюда

$$\lambda_i m_{ij} + \tau_{ij} = m'_{ij} = m'_{ji} = \lambda_j m_{ji} + \tau_{ji},$$

тогда $\lambda_i m_{ij} - \lambda_j m_{ji} = (\lambda_i - \lambda_j) m_{ij} = \tau_{ji} - \tau_{ij}$. Аналогично,

$$2\lambda_i m_{ij} + \tau_{ij} = m''_{ij} = m''_{ji} = 2\lambda_j m_{ji} + \tau_{ji},$$

откуда $2\lambda_i m_{ij} - 2\lambda_j m_{ji} = 2(\lambda_i - \lambda_j) m_{ij} = \tau_{ji} - \tau_{ij}$. Применяя к $\tau_{ji} - \tau_{ij}$ оба равенства, получаем $2(\lambda_i - \lambda_j) m_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) m_{ij}$, поэтому $(\lambda_i - \lambda_j) m_{ij} = 0$, откуда с учётом $m_{ij} \neq 0$ следует $\lambda_i = \lambda_j$.

Таким образом, все диагональные элементы матрицы A равны некоторому λ , что означает $A = \lambda E$.

Покажем, что $\lambda \geq 0$. Пусть $\lambda < 0$. Обозначим наименьший внедиагональный элемент τ_{ij} матрицы τ через t . Возьмём в качестве M матрицу метрики правильного симплекса, у которой все внедиагональные элементы равны друг другу и больше $-t/\lambda$. Рассмотрим ij -ый элемент $f(M)$. Он равен $m'_{ij} = \lambda m_{ij} + t$. По построению $m_{ij} > -t/\lambda$, поэтому $\lambda m_{ij} < -t$, отсюда $m'_{ij} = \lambda m_{ij} + t < 0$. Это означает, что $f(M)$ не является матрицей псевдометрикой — противоречие. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пусть матрицы A и τ задают преобразование матриц $f: M \mapsto AM + \tau$. Тогда если это преобразование переводит любую матрицу метрики в матрицу псевдометрики, то матрица τ является матрицей псевдометрики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как это преобразование переводит любую метрику в псевдометрику, то по утверждению 10, $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$. Так как для любой матрицы метрики M по предположению $f(M) = \lambda M + \tau$ — матрица псевдометрики, то $\tau = f(M) - \lambda M$ — симметричная матрица, все диагональные элементы которой равны 0.

Пусть τ не является матрицей псевдометрики, тогда существуют различные a , b и c , для которых не выполнено неравенство треугольника, то есть $\tau_{ab} + \tau_{bc} < \tau_{ac}$. Положим $\varepsilon = \tau_{ac} - \tau_{ab} - \tau_{bc}$, тогда $\varepsilon > 0$. Пусть $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица метрики правильного симплекса,

все элементы которой меньше $d = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. Обозначим $M' = f(M) = (m'_{ij})_{i,j=1}^n = \lambda M + \tau$. Из неравенства треугольника для тех же a, b и c получаем

$$\begin{aligned} 0 &\geq m'_{ac} - m'_{ab} - m'_{bc} = \lambda m_{ac} - \lambda m_{ab} - \lambda m_{bc} + \tau_{ac} - \tau_{ab} - \tau_{bc} = \\ &= \varepsilon - \lambda(m_{ab} + m_{bc} - m_{ac}) \geq \varepsilon - \lambda(m_{ab} + m_{bc}) > \varepsilon - 2d\lambda = 0, \end{aligned}$$

то есть $0 > 0$. Получили противоречие. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть матрицы A и τ задают преобразование матриц $f: M \mapsto AM + \tau$. Тогда это преобразование переводит любую матрицу метрики в матрицу псевдометрики, если и только если $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$, а τ является матрицей псевдометрики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как это преобразование переводит любую метрику в псевдометрику, то по утверждению 10, $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$ и следствию 11, τ является матрицей псевдометрики.

Пусть $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ — некоторая матрица метрики, τ является матрицей псевдометрики и $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$. Обозначим $M' = f(M) = (m'_{ij})_{i,j=1}^n$, при этом $m'_{ij} = \lambda m_{ij} + \tau_{ij}$. Для любых $i \neq j$ из того, что τ и M — матрицы псевдометрик, следует $m'_{ij} = \lambda m_{ij} + \tau_{ij} = \lambda m_{ji} + \tau_{ji} = m'_{ji}$ и $m'_{ii} = \lambda m_{ii} + \tau_{ii} = 0$, то есть M' — симметричная матрица, все диагональные элементы которой равны нулю. В силу неравенств треугольника $m_{ab} + m_{bc} \geq m_{ac}$ и $\tau_{ab} + \tau_{bc} \geq \tau_{ac}$ для любых a, b и c , из $\lambda \geq 0$ следует $\lambda m_{ab} + \lambda m_{bc} + \tau_{ab} + \tau_{bc} \geq \lambda m_{ac} + \tau_{ac}$, то есть $m'_{ab} + m'_{bc} \geq m'_{ac}$.

Таким образом, любое преобразование такого вида переводит любую метрику в псевдометрику. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть матрицы A и τ задают преобразование матриц $f: M \mapsto AM + \tau$. Тогда это преобразование переводит любую матрицу метрики в матрицу метрики, если и только если, либо $A = 0$ и τ является матрицей метрики, либо $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda > 0$ и τ является матрицей псевдометрики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала необходимость. Так как это преобразование переводит любую метрику в псевдометрику, то по 3, $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$ и τ является матрицей псевдометрики. Если $\lambda = 0$, тогда любая метрика переходит в τ , поэтому τ является матрицей метрики.

Покажем достаточность. Пусть $\lambda > 0$, тогда любая матрица метрики M переходит в сумму матрицы псевдометрики τ и матрицы метрики λM , поэтому $f(M) = \lambda M + \tau$ является матрицей метрики. Если $\lambda = 0$, а τ является матрицей метрики, то любая матрица метрики M переходит в матрицу метрики τ . $\square$

3.1. Сумма псевдометрических пространств

Будем считать $n \in \mathbb{N}$ фиксированным, а все псевдометрики по умолчанию заданными на $\{1, \dots, n\}$. Введём следующие обозначения: для заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$, где $G \in T_1$, псевдометрического пространства $(\{1, \dots, n\}, \rho)$ и любого $i = 1, \dots, n$ определим ω_i как вес выходящего из вершины i ребра графа G . Вес взвешенного графа $\mathcal{G}$ будем обозначать как $|\mathcal{G}|$. Также для псевдометрики s , одно из минимальных заполнений которой имеет тип звезды, определим s_i как вес выходящего из вершины i ребра и $|s|$ как вес этого заполнения. Для любой такой псевдометрики s и заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ типа $G = (V, E)$ определим функции $\omega^s, \omega^{-s} \in \mathbb{R}^E$: для любого внутреннего ребра $e \in E$ положим $\omega^s(e) = \omega^{-s}(e) = \omega(e)$, а для всех граничных рёбер пусть $\omega_i^s = \omega_i + s_i$ и $\omega_i^{-s} = \omega_i - s_i$. Положим $\mathcal{G}^s = (G, \omega^s)$ и $\mathcal{G}^{-s} = (G, \omega^{-s})$. Отметим, что ω^{-s} не обязана быть неотрицательной, поэтому $\mathcal{G}^{-s} = (G, \omega^{-s})$ не всегда взвешенное дерево.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сумма $\rho' = \rho + \tau$ любых двух псевдометрик, определённых на одном и том же множестве, является псевдометрикой, причём неравенство треугольника для некоторых a, b и c вырождается в равенство $\rho'_{ab} + \rho'_{bc} = \rho'_{ac}$ тогда и только тогда, когда $\rho_{ab} + \rho_{bc} = \rho_{ac}$ и $\tau_{ab} + \tau_{bc} = \tau_{ac}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — заполнение типа $G = (V, E) \in T_1$ для псевдометрики ρ , а среди минимальных заполнений для псевдометрики s есть звезда. Тогда $\mathcal{G}^s$ является заполнением для $\rho + s$, и если $\rho - s$ — псевдометрика и $\omega_i \geq s_i$ для любой граничной вершины i , то $\mathcal{G}^{-s}$ является заполнением для $\rho - s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых вершин $i \neq j$ из $\{1, \dots, n\}$ положим $I_{ij} \subset E$ — множество внутренних рёбер в пути, соединяющем i и j . Заметим, что $\omega^s \in \mathbb{R}_+^E$, поэтому $\mathcal{G}^s$ является взвешенным деревом. Так как $\mathcal{G}$ — заполнение для ρ , то для любых $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\rho_{ij} \leq \omega_i + \omega_j + \sum_{e \in I_{ij}} \omega(e).$$

Так как $s_{ij} = s_i + s_j$ и $\sum_{e \in I_{ij}} \omega(e) = \sum_{e \in I_{ij}} \omega^s(e)$, то

$$(\rho + s)_{ij} = \rho_{ij} + s_{ij} \leq \omega_i + \omega_j + s_i + s_j + \sum_{e \in I_{ij}} \omega(e) = \omega_i^s + \omega_j^s + \sum_{e \in I_{ij}} \omega^s(e),$$

то есть $\mathcal{G}^s$ является заполнением для $\rho + s$.

Если $\rho - s$ — псевдометрика, и $\omega_i \geq s_i$ для любой граничной вершины i , то $\omega^{-s} \in \mathbb{R}_+^E$ и $\mathcal{G}^{-s}$ является взвешенным деревом. Аналогично в этом случае получаем

$$(\rho - s)_{ij} = \rho_{ij} - s_{ij} \leq \omega_i + \omega_j - s_i - s_j + \sum_{e \in I_{ij}} \omega(e) = \omega_i^{-s} + \omega_j^{-s} + \sum_{e \in I_{ij}} \omega^{-s}(e),$$

то есть $\mathcal{G}^{-s}$ является заполнением для $\rho - s$. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — минимальное заполнение типа из T_1 для псевдометрики ρ , а среди минимальных заполнений для псевдометрики s есть звезда, причём $\rho - s$ — псевдометрика и $\omega_i \geq s_i$ для любой граничной вершины i . Тогда $\mathcal{G}^{-s}$ является минимальным заполнением для $\rho - s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 12, взвешенный граф $\mathcal{G}^{-s}$ является заполнением пространства $\rho - s$. Кроме того, $|\mathcal{G}^{-s}| = |\mathcal{G}| - |s|$.

Предположим противное, т.е. заполнение $\mathcal{G}^{-s}$ не является минимальным. Рассмотрим минимальное заполнение $\mathcal{G}' = (G', \omega')$ пространства $\rho - s$, являющееся бинарным деревом. Тогда $|\mathcal{G}'| < |\mathcal{G}^{-s}| = |\mathcal{G}| - |s|$. По утверждению 12, взвешенный граф $\mathcal{G}'^s$ является заполнением для ρ и

$$|\mathcal{G}'^s| = |\mathcal{G}'| + |s| < |\mathcal{G}^{-s}| + |s| = |\mathcal{G}|,$$

что противоречит минимальности заполнения $\mathcal{G}$.

$\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Пусть $\mathcal{G}$ — минимальное заполнение типа из T_1 для псевдометрики ρ , а среди минимальных заполнений для псевдометрики s есть звезда. Тогда $\mathcal{G}^s$ является минимальным заполнением для $\rho + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 12, взвешенный граф $\mathcal{G}^s$ является заполнением пространства $\rho + s$. Кроме того, $|\mathcal{G}^s| = |\mathcal{G}| + |s|$.

Предположим противное, т.е. заполнение $\mathcal{G}^s$ не является минимальным для $\rho + s$. Рассмотрим минимальное заполнение $\mathcal{G}' = (G', \omega')$ пространства $\rho + s$, являющееся бинарным деревом. Для него выполнено $|\mathcal{G}'| < |\mathcal{G}^s|$.

Положим $I = \{i : s_i > 0\}$ и $m = \min_{k \in I} \frac{\omega'_k}{s_k}$, тогда существует $i \in I$, на котором этот минимум достигается.

Предположим, что в этом заполнении есть хотя бы одно граничное ребро, вес которого меньше, чем вес соответствующего ребра в s , то есть выполнено $\omega'_l < s_l$ для некоторого l . Тогда выполнено $0 \leq \omega'_l < s_l$, поэтому $l \in I$ и $m \leq \frac{\omega'_l}{s_l} < 1$. Для любого j будет

$$\begin{cases} \omega'_j - s_j m \geq \omega'_j - s_j \frac{\omega'_j}{s_j} = 0 & \text{при } j \in I, \\ \omega'_j - s_j m = \omega'_j \geq 0 & \text{при } j \notin I, \end{cases}$$

то есть $\omega'_j \geq s_j m$, и так как $\rho + s - ms = \rho + s(1 - m)$ — псевдометрика, то, по утверждению 13, $\mathcal{G}' - ms$ является минимальным заполнением пространства $\rho + s(1 - m)$, у которого граничное ребро при вершине i имеет нулевой вес. По утверждению 6 из этого следует, что i — вырожденная точка этого пространства, соответствующее вырожденное неравенство треугольника по замечанию 3 вырождается в ρ и s . Тогда $s_i = 0$, что противоречит $s_i > 0$.

Таким образом, $\omega'_i \geq s_i$ выполнено для всех i . Тогда так как ρ — псевдометрика, по утверждению 13, $\mathcal{G}' - s$ является минимальным заполнением для $\rho + s - s = \rho$ и $|\mathcal{G}' - s| = |\mathcal{G}'| - |s| < |\mathcal{G}^s| - |s| = |\mathcal{G}|$, что противоречит минимальности $\mathcal{G}$ для ρ . $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть матрицы A и τ задают преобразование матриц $f: M \mapsto AM + \tau$. Тогда это преобразование переводит любую матрицу псевдометрики в матрицу псевдометрики и сохраняет типы T_1 минимальных заполнений, если и только если $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$, а τ является матрицей псевдометрики, одно из минимальных заполнений которой — звезда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если преобразование f переводит любую матрицу псевдометрики в матрицу псевдометрики, то по теореме 3, $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$, а τ является матрицей псевдометрики. Так как звезда является одним из типов минимальных заполнений из T_1 для нулевой псевдометрики, а $f(0) = \tau$, то одно из минимальных заполнений τ — звезда.

Обратно, пусть $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \geq 0$, а τ является матрицей псевдометрики, одно из минимальных заполнений которой — звезда. Тогда f имеет вид $f(M) = \lambda M + \tau$, по замечанию 3 матрица $f(M)$ является матрицей псевдометрики, и по утверждению 14, для любого минимального заполнения типа из T_1 для λM , а, следовательно и M , среди минимальных заполнений для $f(M)$ есть заполнение того же типа. То есть преобразование f сохраняет все типы T_1 минимальных заполнений. $\square$

4. Преобразования векторов расстояний между различными точками

Пусть теперь псевдометрика задаётся вектором ρ расстояний между различными точками $\rho = (\rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{n-1,n})$, а преобразование задаётся матрицей A и имеет вид $\rho \mapsto A\rho$. Как мы увидим ниже, рассмотрение псевдометрики как вектора расстояний между различными точками даёт более разнообразные классы преобразований, сохраняющих типы минимальных заполнений, чем рассмотрение псевдометрики как матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 ([6]). Обозначим через $K(n) \subset \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ множество всех векторов псевдометрик. Каждое условие неотрицательности и неравенство треугольника задаёт (замкнутое) подпространство, ограниченное гиперплоскостью, проходящий через начало координат

О, поэтому $K(n)$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в O . Заметим, что метрикам соответствуют в точности все точки конуса $K(n)$, не лежащие на координатных гиперплоскостях. В частности, все внутренние точки этого конуса соответствуют метрикам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 ([6]). Объединением k -мерных граней множества $X \subset \mathbb{R}^N$ назовём такое подмножество $E_k(X)$ в X , что для любой $x \in E_k(X)$ существует лежащий в X шар размерности k с центром в x , но не существует лежащего в X шара размерности $k+1$ с центром в x . Положим $E(X) = E_1(X)$ и назовём его объединением рёбер. Легко видеть, что $E(K(n))$ — объединение лучей с началом в нуле. Каждый из них будем называть ребром $K(n)$.

ЛЕММА 1 ([6]). Для того, чтобы линейное отображение $A: \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ переводило псевдометрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы

$$A(E(K(n))) \subset K(n).$$

ЛЕММА 2. Для того, чтобы непрерывное отображение $A: \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ переводило метрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы оно переводило псевдометрику в псевдометрику.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как любая метрика является псевдометрикой, достаточность очевидна.

Пусть отображение A переводит любую метрику в псевдометрику. Рассмотрим псевдометрику ρ и её образ $A(\rho)$. Для любого i пусть s_i — метрика правильного симплекса, все расстояния между различными вершинами которого равны $1/i$. Заметим, что $\rho + s_i$ — метрика и $\lim_i(\rho + s_i) = \rho$. Тогда в силу непрерывности отображения A , имеем $A(\rho) = A(\lim_i(\rho + s_i)) = \lim_i A(\rho + s_i)$. По замечанию 4 множество псевдометрик $K(n)$ — замкнуто, и так как оно содержит $A(\rho + s_i)$ для любого i , то оно содержит и предел $A(\rho) = \lim_i A(\rho + s_i) \in K(n)$. То есть любая псевдометрика ρ переходит в псевдометрику. $\square$

ЛЕММА 3. Для того, чтобы линейное отображение $A: \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ переводило метрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы

$$A(E(K(n))) \subset K(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности линейного отображения A по лемме 2, для того, чтобы оно переводило метрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы оно переводило псевдометрику в псевдометрику. А по лемме 1, для того, чтобы линейное отображение A переводило псевдометрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы

$$A(E(K(n))) \subset K(n).$$

Доказательство закончено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассмотрим отображение $f: \rho \mapsto A\rho + \tau$, которое переводит любую метрику в псевдометрику. В силу непрерывности отображения f по лемме 2 оно переводит любую псевдометрику в псевдометрику. Поэтому τ является вектором псевдометрики, так как $f(0) = \tau$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Если отображение $f: \rho \mapsto A\rho + \tau$ переводит любую метрику в псевдометрику, то и $\rho \mapsto A\rho$ переводит любую метрику в псевдометрику.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторой метрики ρ её образ $\rho' = A\rho$ не псевдометрика. Тогда по замечанию 2 существуют такие a, b и c , для которых не выполнено неравенство треугольника, то есть $\rho'_{ab} + \rho'_{bc} < \rho'_{ac}$. Положим $\varepsilon = \rho'_{ac} - \rho'_{ab} - \rho'_{bc}$, тогда $\varepsilon > 0$. Так как по замечанию 5 τ — псевдометрика, $\delta = \tau_{ac} - \tau_{ab} - \tau_{bc} \leq 0$. Для любого $\lambda > -\delta/\varepsilon$ рассмотрим образ ρ'' метрики $\lambda\rho$, равный $f(\lambda\rho) = \lambda A\rho + \tau$. Тогда

$$\rho''_{ac} - \rho''_{ab} - \rho''_{bc} = \lambda(\rho'_{ac} - \rho'_{ab} - \rho'_{bc}) + \tau_{ac} - \tau_{ab} - \tau_{bc} = \lambda\varepsilon + \delta > 0,$$

то есть $\lambda\rho$ — метрика, а $f(\lambda\rho)$ не псевдометрика, что противоречит условию на отображение f . $\square$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим множество $K(3)$ псевдометрик, заданных на трёх точках. Так как по замечанию 1 условия неотрицательности следуют из неравенств треугольника, это множество является пересечением 3 полупространств, заданных неравенствами треугольника. Поэтому $K(3)$ является трёхгранным конусом, натянутым на векторы $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$. Обозначим через P матрицу, в столбцах которой записаны координаты этих векторов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Отображение $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданное как $f: \rho \mapsto A\rho + \tau$ переводит любую метрику в псевдометрику тогда и только тогда, когда τ является вектором псевдометрики, а матрица A имеет вид $A = P\bar{A}P^{-1}$, где $\bar{A}$ — произвольная матрица с неотрицательными компонентами, а $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 5 вектор τ является псевдометрикой, по утверждению 15 отображение $\rho \mapsto A\rho$ переводит любую метрику в псевдометрику.

По лемме 3, для того, чтобы отображение вида $\rho \mapsto A\rho$ переводило любую метрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы образами векторов $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$ были псевдометрики. Легко убедиться, что матрица P , в столбцах которой записаны координаты этих векторов, обратима и задаёт биекцию между положительным октантом и $K(3)$, поэтому матрицу преобразования можно представить как $A = P\bar{A}P^{-1}$ где $\bar{A} = P^{-1}AP$. Поэтому A переводит $K(3)$ в себя тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ переводит положительный октант в себя, что равносильно неотрицательности компонентов $\bar{A}$. Следовательно, для того, чтобы отображение вида $\rho \mapsto A\rho$ переводило любую метрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы матрица A имела вид $A = P\bar{A}P^{-1}$, где $\bar{A}$ — произвольная матрица с неотрицательными компонентами.

То есть то, что $A = P\bar{A}P^{-1}$, где $\bar{A}$ — произвольная матрица с неотрицательными компонентами, а τ — псевдометрика, является необходимым условием для отображения $\rho \mapsto A\rho + \tau$, чтобы оно переводило любую метрику в псевдометрику. Но оно и достаточное, так как сумма псевдометрик является псевдометрикой. $\square$

Из того, что единственным типом T_1 для трёхточечных пространств является звезда, мгновенно следует, что отображения полученного вида являются решением задачи описания всех аффинных отображений, которые переводят любую метрику в псевдометрику и сохраняют все типы T_1 минимальных заполнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 ([6]). Пусть N — сумма положительной диагональной матрицы $A = \text{diag}(\lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{n-1,n})$ и матрицы B с одинаковыми строками из неотрицательных элементов.

В [6] были рассмотрены отображения вида $\rho \mapsto N\rho$. Вообще говоря они не обязаны переводить любую метрику в псевдометрику, но в отличие от преобразований вида $\rho \mapsto A\rho + \tau$, где

критерий для τ не требует рассмотрения матрицы A , аналогичные условия на B не были получены. Однако сохранение типов T_1 минимальных заполнений накладывает дополнительные ограничения на матрицу A .

ТЕОРЕМА 5 ([6]). *Матрица N вида $A + B$ в обозначениях 5 сохраняет метрики и минимальные заполнения, типы которых — невырожденные звёзды, тогда и только тогда, когда A — скалярная матрица.*

В [6] были рассмотрены линейные отображения общего вида $\rho \mapsto A\rho$, но требовалось от них больше: сохранения аддитивности пространств и всех типов минимальных заполнений T_o .

ТЕОРЕМА 6 ([6]). *При $n \geq 4$ линейное отображение A переводит аддитивные метрические пространства в аддитивные с тем же невырожденным типом минимального заполнения тогда и только тогда, когда A — скалярная матрица.*

4.1. Непрерывность веса минимальных заполнений

В этом разделе мы покажем, что функции $\rho \mapsto \text{mpf}(\rho, G)$ и $\text{mf}(\rho)$, определяющие вес минимального параметрического заполнения типа G для псевдометрики ρ и вес минимального заполнения для ρ , непрерывно зависят от ρ для любого типа G . Это понадобится для описания минимальных заполнений предельных псевдометрик в следующем разделе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $G = (V, E) \in T_o(n)$ — тип заполнения с границей $M = \{1, \dots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\frac{n(n-1)}{2}$ через l , а $\#E$ через m , и пусть $\rho \in \mathbb{R}^l$ — псевдометрика, то есть $\rho \in K(n)$. На пространстве $\mathbb{R}^E$ введём норму $|\cdot|_1$, равную сумме модулей координат, а на пространстве псевдометрик — норму $|\cdot|_\infty$, равную максимуму модуля координат, и соответствующие метрики. Пусть ρ^0 — произвольная псевдометрика, такая, что $\varepsilon = |\rho - \rho^0|_\infty > 0$. Введём на пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}^E)$ расстояние Хаусдорфа. Пусть отображение $g: K(n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^E)$ сопоставляет каждой псевдометрике ρ множество $\Omega(\rho, G) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^E)$ всех весовых функций параметрических заполнений типа G для ρ . Положим $\Omega = \Omega(\rho, G)$ и $\Omega^0 = \Omega(\rho^0, G)$. Определим функцию $W: \mathcal{F}(\mathbb{R}^E) \rightarrow \mathbb{R}$, положив $W(\Omega) = \inf \{|\omega|_1 : \omega \in \Omega\}$.

ЛЕММА 4. *Отображение g в обозначениях 6 является m -липшицевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого граничного пути γ в G обозначим множество рёбер в γ через $E(\gamma)$, а пару (i, j) из начальной и конечной вершины пути γ через $\partial\gamma$. Напомним, что функции $M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, принимающие на парах (i, j) и (j, i) , $i > j$ значение ij -той координаты вектора из $K(n)$ и 0 для любых $i = j$, обозначаются тем же символом, что и соответствующий вектор из $K(n)$. Множество весовых функций задаётся следующим образом:

$$\Omega(\rho, G) = \left\{ \omega \in \mathbb{R}_+^E : \sum_{e \in E(\gamma)} \omega(e) \geq \rho(\partial\gamma), \gamma - \text{граничный путь в } G \right\}.$$

Для любых $\omega \in \mathbb{R}^E$ и $C \in \mathbb{R}$ определим функции $\omega + C$ и C_E из $\mathbb{R}^E$, положив $(\omega + C)(e) = \omega(e) + C$ и $C_E(e) = C$ для любого $e \in E$. При этом расстояние между ω и $\omega + C$ равно $|C_E|_1 = |C| m$. Положим

$$E_\varepsilon(\Omega) = \{\omega \in \mathbb{R}^E : \omega + \varepsilon \in \Omega\}.$$

Заметим, что $E_\varepsilon(\Omega) \subset B_{m\varepsilon}(\Omega)$. Для любого $\omega \in \Omega^0$ и любого граничного пути γ в G выполнено

$$\sum_{e \in E(\gamma)} (\omega + \varepsilon)(e) = \sum_{e \in E(\gamma)} (\omega(e) + \varepsilon) \geq \varepsilon + \sum_{e \in E(\gamma)} \omega(e) \geq \rho^0(\partial\gamma) + \varepsilon \geq \rho(\partial\gamma),$$

так как $|\rho - \rho^0|_\infty = \varepsilon$. Следовательно, $\omega + \varepsilon \in \Omega$, откуда $\Omega^0 \subset E_\varepsilon(\Omega) \subset B_{m\varepsilon}(\Omega)$. Аналогично, $\Omega \subset E_\varepsilon(\Omega^0) \subset B_{m\varepsilon}(\Omega^0)$. Следовательно, $d_H(\Omega^0, \Omega) \leq m\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ и любых псевдометрик $|\rho - \rho^0|_\infty \leq \varepsilon$ выполнено $d_H(\Omega^0, \Omega) \leq m\varepsilon$, что означает m -липшицевость отображения g . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для любого $\Omega \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^E)$ точная нижняя грань в определении отображения $W(\Omega) = \inf \{|\omega|_1 : \omega \in \Omega\}$ достигается, так как для любой $\omega_0 \in \Omega$ выполнено $\inf \{|\omega|_1 : \omega \in \Omega\} = \inf \{|\omega|_1 : \omega \in \Omega \cap B_{|\omega_0|_1}(0)\}$, а $\Omega \cap B_{|\omega_0|_1}(0)$ — компакт.

ЛЕММА 5. Отображение W в обозначениях 6 является 1-липшицевым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольные $\Omega, \Omega_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^E)$, для которых $d_H(\Omega, \Omega_0) = \varepsilon$, и пусть минимум нормы по Ω достигается в точке $\omega \in \Omega$. Тогда из $d_H(\Omega, \Omega_0) = \varepsilon$ следует, что для любого $\delta > 0$ существуют такая $\omega' \in \Omega_0$, для которой $|\omega - \omega'|_1 \leq \varepsilon + \delta$. Из этого следует, что

$$W(\Omega_0) \leq |\omega'|_1 = |\omega + \omega' - \omega|_1 \leq |\omega|_1 + |\omega' - \omega|_1 \leq |\omega|_1 + \varepsilon + \delta = W(\Omega) + \varepsilon + \delta,$$

то есть $W(\Omega_0) - W(\Omega) \leq \varepsilon + \delta$. Аналогично получаем $W(\Omega) - W(\Omega_0) \leq \varepsilon + \delta$, итого $|W(\Omega_0) - W(\Omega)| \leq \varepsilon + \delta$. Так как последнее неравенство выполнено для любого $\delta > 0$, то $|W(\Omega_0) - W(\Omega)| \leq \varepsilon$. Таким образом, $|W(\Omega_0) - W(\Omega)| \leq d_H(\Omega_0, \Omega)$, что и означает 1-липшицевость отображения W . $\square$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $G \in T_o(n)$ — тип заполнения с границей $M = \{1, \dots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, тогда вес минимального параметрического заполнения типа G для псевдометрики $\rho \in K(n)$ непрерывно зависит от псевдометрики ρ , то есть функция $\rho \mapsto \text{mpf}(\rho, G)$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f: K(n) \rightarrow \mathbb{R}$, переводящее любую псевдометрику ρ в $\text{mpf}(\rho, G)$, в обозначениях 6, является композицией отображения $g: K(n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^E)$ и функции $W: \mathcal{F}(\mathbb{R}^E) \rightarrow \mathbb{R}$.

По лемме 4, первое отображение m -липшицево, а по лемме 5, второе 1-липшицево, поэтому оба отображения непрерывны. Отображение f как композиция непрерывных отображений является непрерывным, то есть вес минимального параметрического заполнения типа G непрерывно зависит от псевдометрики.

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ вес $\text{mf}(\rho)$ минимального заполнения для псевдометрики $\rho \in K(n)$ непрерывно зависит от ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по замечанию 1 множество $T_o(n)$ — конечно, вес минимального заполнения $\text{mf}(\rho) = \min\{\text{mpf}(\rho, G) : G \in T_o(n)\}$ — минимум конечного числа функций, каждая из которых непрерывна по теореме 7. Поэтому функция $\text{mf}(\rho)$, как минимум конечного числа непрерывных функций, непрерывна. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой псевдометрики $\rho \in K(n)$ обозначим множество всех типов минимальных заполнений для ρ из $T_o(n)$ через $T_m(\rho)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любой псевдометрики $\rho \in K(n)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой псевдометрики $\rho' \in K(n)$ из ε -окрестности ρ выполнено $T_m(\rho') \subset T_m(\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T_\rho = T_o(n) \setminus T_m(\rho)$. По определению, для каждого $G_i \in T_\rho$, $i = 1, \dots, \#T_\rho$ выполняется

$$\text{mpf}(\rho, G_i) > \text{mf}(\rho).$$

Пусть $\delta = \frac{1}{2} \inf \{ \text{mpf}(\rho, G_i) - \text{mf}(\rho) : G_i \in T_\rho \}$. В силу замечания 1 множество $T_\rho(n)$ — конечно, следовательно эта точная нижняя грань достигается на некотором G_i , поэтому $\delta > 0$. Так как, по следствию 2, функция $\text{mf}(\rho)$ непрерывно зависит от ρ , то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой псевдометрики $\rho' \in K(n)$ из ε_0 -окрестности ρ выполнено

$$|\text{mf}(\rho) - \text{mf}(\rho')| < \delta.$$

А так как по теореме 7 функции $\text{mpf}(\rho, G_i)$ непрерывно зависят от ρ , то существуют такие $\varepsilon_i > 0$, $1 \leq i \leq \#T_\rho$, что для любой псевдометрики $\rho' \in K(n)$ из ε_i -окрестности имеем

$$|\text{mpf}(\rho, G_i) - \text{mpf}(\rho', G_i)| < \delta.$$

Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : 0 \leq i \leq \#T_\rho\}$, тогда $\varepsilon > 0$ и для любой псевдометрики $\rho' \in K(n)$ из ε -окрестности псевдометрики ρ выполнено

$$\text{mpf}(\rho', G_i) > \text{mpf}(\rho, G_i) - \delta \geq \text{mf}(\rho) + \delta > \text{mf}(\rho'),$$

то есть среди заполнений для ρ' типов $G_i \in T_\rho$, $i = 1, \dots, \#T_\rho$ нет минимальных, что и требовалось доказать. $\square$

4.2. Минимальные заполнения предельных псевдометрик

Применим полученные результаты для описания минимальных заполнений предельных псевдометрик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Пусть $(\rho_k)_{k=1}^\infty$ — сходящаяся к псевдометрике ρ' последовательность псевдометрик из $K(n)$. Предположим, что для каждой псевдометрики ρ_k есть заполнение типа $G \in T_\rho(n)$. Тогда среди минимальных заполнений для ρ' также есть заполнение типа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все отличные от G графы $G_i \in T_\rho(n)$. Для них будет выполнено

$$\text{mpf}(\rho_k, G_i) \geq \text{mpf}(\rho_k, G).$$

Так как, по теореме 7, отображение $\rho \mapsto \text{mpf}(\rho, G)$ является непрерывным, то

$$\begin{aligned} \text{mpf}(\rho', G_i) &= \text{mpf}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k, G_i\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mpf}(\rho_k, G_i) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mpf}(\rho_k, G) = \text{mpf}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k, G\right) = \text{mpf}(\rho', G), \end{aligned}$$

то есть

$$\text{mpf}(\rho', G_i) \geq \text{mpf}(\rho', G),$$

что и требовалось доказать. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Для любого вектора $\rho \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ с ненулевой суммой координат положим

$$N(\rho) = \frac{\rho}{\sum_{i < j} \rho_{ij}}.$$

N переводит любую псевдометрику $\rho \in K(n) \setminus \{0\}$ в псевдометрику $N(\rho)$, которую мы будем называть нормированной псевдометрикой ρ .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Как уже было сказано в замечании 4, множество n -точечных псевдометрик $K(n)$ замкнуто. Гиперплоскость $\pi = \{\rho \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} : \sum_{i < j} \rho_{ij} = 1\}$ также замкнута, а пересечение $P(n) = K(n) \cap \pi$ — замкнуто и ограничено, и, следовательно, компактно. Поэтому любая последовательность в $P(n)$ имеет сходящуюся подпоследовательность. В частности, для любой псевдометрики $\rho \neq 0$ и любого преобразования псевдометрик $f: K(n) \setminus \{0\} \rightarrow K(n) \setminus \{0\}$ последовательность $\rho_k = N(f^k(\rho))$ имеет сходящуюся подпоследовательность ρ_{k_i} , причём предел любой сходящейся подпоследовательности принадлежит $P(n)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть преобразование псевдометрик $f: K(n) \setminus \{0\} \rightarrow K(n) \setminus \{0\}$ сохраняет тип $G \in T_o(n)$ минимальных заполнений. Тогда для любой псевдометрики $\rho \in K(n) \setminus \{0\}$, среди минимальных заполнений которой есть заполнение типа G , и любой сходящейся подпоследовательности ρ_{k_i} последовательности $\rho_k = N(f^k(\rho))$, среди минимальных заполнений предельной псевдометрики $\rho' = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{k_i}$ есть заполнение типа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что преобразование псевдометрик f сохраняет тип G минимальных заполнений следует, что для любого натурального k среди минимальных заполнений псевдометрики $f^k(\rho)$ и, следовательно, псевдометрики ρ_k будут заполнения типа G . Применяя к последовательности $(\rho_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ утверждение 17, получаем, что среди минимальных заполнений для псевдометрики ρ' есть заполнение типа G . $\square$

Напомним, что типы T_1 являются типами T_o , у которых степень любой граничной вершины равна 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для любой псевдометрики $\rho' \in K(n)$, среди минимальных заполнений для которой есть заполнение

$$s = \left((M \cup \{u\}, \{uv\}_{v \in M}), \omega \right)$$

типа звезда, также есть минимальные заполнения любого типа $G \in T_1(n)$, так как $G = (V, E)$ вместе с весовой функцией, определяемой на инцидентном любой вершине $v \in M$ ребре $e \in E$ как $\omega(uv)$, а на внутренних рёбрах как 0, является заполнением того же веса u , следовательно, минимальным. Например, отображение, которое переводит любую псевдометрику в правильный симплекс, у которого все расстояния между различными точками равны 1, сохраняет все типы из T_1 .

Далее будем рассматривать отображения, сохраняющие все типы заполнений из T_1 .

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть для преобразования псевдометрик

$$f: K(n) \setminus \{0\} \rightarrow K(n) \setminus \{0\},$$

сохраняющего типы $T_1(n)$ минимальных заполнений, существует такая псевдометрика ρ' , что для любой псевдометрики $\rho \neq 0$ последовательность $\rho_k = N(f^k(\rho))$ сходится к ρ' при $k \rightarrow \infty$. Тогда среди минимальных заполнений для псевдометрики ρ' есть заполнение типа звезда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём в качестве ρ произвольную псевдометрику такую, что одно её минимальных заполнений имеет тип звезды, например, правильный симплекс, у которого все расстояния между различными точками равны 1. Так как $\rho \neq 0$, то по предположению, последовательность $\rho_k = N(f^k(\rho))$ сходится к ρ' при $k \rightarrow \infty$. Причём так как звезда является типом заполнения из T_1 , из сохранения типов T_1 следует, что для любого натурального k среди минимальных заполнений псевдометрики $f^k(\rho)$ и, следовательно, псевдометрики ρ_k будут заполнения типа звезда. Применяя к последовательности $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ утверждение 17, получаем, что среди минимальных заполнений для псевдометрики ρ' есть заполнение типа звезда. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. Для преобразования f псевдометрик, сохраняющего типы $T_o(n)$ минимальных заполнений, не может существовать предельной псевдометрики ρ' , что для любой псевдометрики $\rho \neq 0$ последовательность $\rho_k = N(f^k(\rho))$ сходится к ρ' при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых различных $a, b \in M = \{1, \dots, n\}$ при $n \geq 3$ рассмотрим два соединяющих M дерева G_a и G_b без внутренних вершин, где в G_a все вершины соединены с вершиной a , а в G_b — с вершиной b . Весовые функции ω_a и ω_b , тождественно равные 1 на этих деревьях, порождают метрики ρ_a и ρ_b на M , и, по утверждению 2, взвешенные деревья (G_a, ω_a) и (G_b, ω_b) являются минимальными заполнениями для ρ_a и ρ_b . Эти типы принадлежат $T_o(n) \setminus T_1(n)$. Пусть предел ρ' существует, тогда, так как по следствию 5 некоторая звезда с весами $\omega_1, \dots, \omega_n$ является минимальным заполнением для ρ' , то ρ' аддитивно и

$$\rho'_{ij} = \omega_i + \omega_j. \quad (1)$$

Из сохранения типов минимальных заполнений для ρ_a и ρ_b следует существование минимальных заполнений типов G_a и G_b для ρ' , а из аддитивности ρ' следует, что вместе с некоторыми весами, G_a и G_b являются порождающими деревьями. Для $i \in \{a, b\}$ обозначим через x_i и y_i два различных элемента из M , отличных от i . Из того, что G_a — порождающее дерево для ρ' , следует, что $\rho'_{x_a y_a} = \rho'_{a x_a} + \rho'_{a y_a}$. Выражая расстояния из последнего равенства по формуле (1), получаем $\omega_{x_a} + \omega_{y_a} = \omega_a + \omega_{x_a} + \omega_a + \omega_{y_a}$, отсюда $\omega_a = 0$. Аналогично получается, что $\omega_b = 0$, поэтому $\rho'_{ab} = \omega_a + \omega_b = 0$. В силу того, что последнее равенство верно для любых различных $a, b \in M = \{1, \dots, n\}$, сумма расстояний между различными точками равна 0, что противоречит тому, что ρ' — предел псевдометрик с суммой расстояний равной 1. $\square$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим преобразование f , прибавляющее 1 ко всем компонентам вектора псевдометрики. По теореме 1, оно сохраняет типы T_1 минимальных заполнений. Последовательность $\rho_k = N(f^k(\rho))$ имеет вид:

$$N(f^k(\rho)) = \frac{\rho + (1, \dots, 1)k}{k|(1, \dots, 1)|_1 + \sum_{i < j} \rho_{ij}} = \frac{\frac{\rho}{k} + (1, \dots, 1)}{|(1, \dots, 1)|_1 + \frac{\sum_{i < j} \rho_{ij}}{k}}.$$

Как мы видим, числитель этой дроби стремится к $(1, \dots, 1)$, а знаменатель к $| (1, \dots, 1) |_1$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \frac{(1, \dots, 1)}{|(1, \dots, 1)|_1}$, то есть предельной метрикой является правильный симплекс с равной 1 суммой координат.

4.3. Преобразования псевдометрик, задаваемые домножением вектора псевдометрики на диагонализруемую матрицу

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть P — произвольная обратимая матрица. Запишем матрицу P в блочной форме: $P = (v_1, \dots, v_m)$, где $(v_1, \dots, v_m)$ — последовательность векторов столбцов матрицы P . Тогда для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ и любого $\rho \in \mathbb{R}^m$ выполнено

$$\begin{aligned} P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) P^{-1} \rho &= \\ &= (v_1, \dots, v_m) (\lambda_1 (P^{-1} \rho)_1, \dots, \lambda_m (P^{-1} \rho)_m)^T = \sum_{j=1}^m \lambda_j (P^{-1} \rho)_j v_j, \end{aligned}$$

в частности, $\rho = PEP^{-1} \rho = \sum_{j=1}^m (P^{-1} \rho)_j v_j$. Для любого $1 \leq i \leq m$ выполняется

$$v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m (P^{-1} \rho)_j v_j + (P^{-1} \rho)_i v_i,$$

то есть

$$0 = \sum_{j=1, j \neq i}^m (P^{-1}\rho)_j v_j + ((P^{-1}\rho)_i - 1)v_i.$$

Так как матрица P — обратимая, то её столбцы линейно независимы, поэтому из последнего равенства следует, что $(P^{-1}\rho)_j = 0$ для любого $j \neq i$, а $(P^{-1}\rho)_i = 1$. Из этого вытекает, что $P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) P^{-1} v_i = \lambda_i v_i$, то есть v_i является собственным вектором матрицы $P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) P^{-1}$, соответствующим собственному значению λ_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть A — диагонализируемая матрица, наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_{\max}$ которой положительно и имеет кратность 1, а линейное пространство V , натянутое на остальные собственные векторы, не содержит ненулевых псевдометрик. Тогда для некоторой обратимой матрицы $P = (v_1, \dots, v_m)$, где $(v_1, \dots, v_m)$ — последовательность векторов столбцов матрицы P и некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ выполнено $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) P^{-1}$. По замечанию 9, для любого $1 \leq i \leq m$ выполняется $Av_i = \lambda_i v_i$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть преобразование псевдометрик задаётся домножением вектора псевдометрики на матрицу A вида 9. Тогда если это преобразование псевдометрик сохраняет типы минимальных заполнений, то для ненулевого собственного вектора ρ' , соответствующего значению $\lambda_{\max}$, вектор $N(\rho')$ — псевдометрика, для любой псевдометрики $\rho \neq 0$ последовательность $N(A^n \rho)$ сходится к $N(\rho')$ и среди минимальных заполнений для $N(\rho')$ есть заполнение типа звезда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A сохраняет типы минимальных заполнений, то и $\bar{A} = \frac{1}{\lambda_{\max}} A$ сохраняет типы минимальных заполнений. Пусть i таково, что $\lambda_i = \lambda_{\max}$, тогда $v_i = \alpha \rho'$ для некоторого $\alpha \neq 0$. Заметим, что

$$\bar{A}^n = P \operatorname{diag} \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}} \right)^n, \dots, \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \right)^n \right) P^{-1}.$$

и так как по замечанию 9 выполнено $\rho = \sum_{j=1}^m (P^{-1}\rho)_j v_j$, то пространство V определяется как $V = \{\rho : (P^{-1}\rho)_i = 0\}$.

Далее, для любой псевдометрики ρ с учётом замечания 9 получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}^n \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \operatorname{diag} \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}} \right)^n, \dots, \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \right)^n \right) P^{-1} \rho = \\ &= P \left(\operatorname{diag} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}} \right)^n, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{\max}} \right)^n \right) \right) P^{-1} \rho = \\ &= P \operatorname{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0) P^{-1} \rho = (P^{-1}\rho)_i v_i = \alpha (P^{-1}\rho)_i \rho'. \end{aligned}$$

Пусть $\rho \neq 0$. Так как по предположению $\rho \notin V$, то $(P^{-1}\rho)_i \neq 0$. Поэтому предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}^n \rho$ последовательности псевдометрик является ненулевой псевдометрикой $\alpha (P^{-1}\rho)_i \rho'$. Тогда $N(\rho')$ — также псевдометрика и $\lim_{n \rightarrow \infty} N(\bar{A}^n \rho) = N(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}^n \rho) = N(\alpha (P^{-1}\rho)_i \rho') = N(\rho')$ в силу непрерывности N в точке $\alpha (P^{-1}\rho)_i \rho'$. Таким образом, для любой псевдометрики $\rho \neq 0$ последовательность $N(\bar{A}^n \rho) = N(A^n \rho)$ сходится к $N(\rho')$. Применяя следствие 5, получаем, что среди минимальных заполнений для $N(\rho')$ есть заполнение типа звезда. $\square$

ТЕОРЕМА 9. Пусть преобразование псевдометрик из $\mathbb{R}^m$ задаётся домножением вектора псевдометрики на матрицу A вида 9 с двумя собственными числами $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} > 0$. Тогда если для ненулевого собственного вектора v , соответствующего значению $\lambda_{\max}$, нормированный вектор $\rho' = N(v)$ — псевдометрика и среди минимальных заполнений для ρ' есть заполнение типа звезда, то это преобразование псевдометрик переводит любую псевдометрику в псевдометрику и сохраняет типы T_1 минимальных заполнений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i таково, что $\lambda_i = \lambda_{\max}$, тогда $v_i = \alpha\rho'$ для некоторого $\alpha \neq 0$. Для ненулевой псевдометрики ρ положим $u = \sum_{j=1, j \neq i}^m (P^{-1}\rho)_j v_j$ и $x = (P^{-1}\rho)_i \alpha$, тогда по замечанию 9,

$$\rho = \sum_{j=1}^m (P^{-1}\rho)_j v_j = \sum_{j=1, j \neq i}^m (P^{-1}\rho)_j v_j + (P^{-1}\rho)_i \alpha \rho' = u + x\rho'.$$

По определению, $u \in V$. Покажем, что $x > 0$. Если $u = 0$, то так как для ρ выполнено $\sum_{i < j} \rho_{ij} = \sum_{i < j} x\rho'_{ij} = x$, то $x > 0$. Если $u \neq 0$, то в силу выпуклости множества псевдометрик, для любого $\lambda \in [0, 1]$ линейная комбинация $\lambda\rho + (1-\lambda)\rho'$ является псевдометрикой. Подставляя выражение для ρ , получаем, что $\lambda(u + x\rho') + (1-\lambda)\rho' = \lambda u + (1 + \lambda(x-1))\rho'$ является псевдометрикой. Заметим, что $\frac{1}{1-x} \in (0, 1]$ при $x \leq 0$. Поэтому при $\lambda = \frac{1}{1-x}$ эта линейная комбинация является псевдометрикой и принимает значение λu . Так как $\lambda > 0$ и $u \neq 0$, то $\lambda u \in V$ — ненулевая псевдометрика, что противоречит условию на V . Итак, мы показали, что $x > 0$.

Матрица A сохраняет типы минимальных заполнений тогда и только тогда, когда $\bar{A} = \frac{1}{\lambda_{\min}} A$ сохраняет типы минимальных заполнений. Вычислим образ ρ при заданном матрицей $\bar{A}$ преобразовании:

$$\begin{aligned} \bar{A}\rho &= P \operatorname{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_i, \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, 1, \dots, 1 \right) P^{-1}\rho = \\ &= P \left(E + \operatorname{diag} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_i, \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1, 0, \dots, 0 \right) \right) P^{-1}\rho = \\ &= \rho + P \operatorname{diag} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_i, \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1, 0, \dots, 0 \right) P^{-1}\rho = \\ &= \rho + \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 \right) (P^{-1}\rho)_i v_i = \rho + \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 \right) (P^{-1}\rho)_i \alpha \rho' = \rho + \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 \right) x \rho', \end{aligned}$$

где третье равенство вытекает из замечания 9. Так как $x > 0$ и $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 > 0$, то $\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1 \right) x \rho'$ — псевдометрика, среди минимальных заполнений для которой есть заполнение типа звезда. Тогда $\bar{A}\rho$ — псевдометрика и по утверждению 14, для любого минимального заполнения для ρ типа из T_1 среди минимальных заполнений для $\bar{A}\rho$ есть заполнение того же типа. То есть преобразование, заданное матрицей $\bar{A}$, а следовательно и A , сохраняет все типы T_1 минимальных заполнений. $\square$

ТЕОРЕМА 10. Пусть преобразование псевдометрик из $\mathbb{R}^m$ задаётся домножением вектора псевдометрики на матрицу A вида 9 с двумя собственными числами $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} > 0$. Тогда для ненулевого собственного вектора v , соответствующего значению $\lambda_{\max}$, нормированный вектор $\rho' = N(v)$ — псевдометрика, и среди минимальных заполнений для ρ' есть заполнение типа звезда, если и только если это преобразование псевдометрик переводит любую псевдометрику в псевдометрику и сохраняет типы T_1 минимальных заполнений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть преобразование указанного вида сохраняет типы T_1 минимальных заполнений, тогда по теореме 8, вектор ρ' — псевдометрика и среди минимальных заполнений для ρ' есть заполнение типа звезда. Обратно, если для ненулевого собственного вектора v , соответствующего значению $\lambda_{\max}$, нормированный вектор $\rho' = N(v)$ — псевдометрика и среди

минимальных заполнений для ρ' есть заполнение типа звезда, то по теореме 9, это преобразование псевдометрик переводит любую псевдометрику в псевдометрику и сохраняет типы T_1 минимальных заполнений. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть преобразование псевдометрик из $\mathbb{R}^m$ задаётся матрицей N равной сумме положительной скалярной матрицы λE и матрицы B с одинаковыми строками $(b_1, \dots, b_m)$ из неотрицательных элементов. Положим $v = (1, 1, \dots, 1)^T$. Тогда матрица N является матрицей вида 9 с двумя собственными числами $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} > 0$, причём v является собственным вектором, соответствующим значению $\lambda_{\max}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_{\max} = \lambda + \sum_i b_i$, а $\lambda_{\min} = \lambda$, легко видеть, что они удовлетворяют условию $\lambda_{\max} > \lambda_{\min} > 0$. Заметим что для любого вектора x выполнено

$$Nx = \lambda x + \sum_i b_i x_i v,$$

отсюда

$$Nv = \lambda v + \sum_i b_i v = \left(\lambda + \sum_i b_i \right) v = \lambda_{\max} v,$$

то есть v является собственным вектором, соответствующим значению $\lambda_{\max}$. Пусть вектор x принадлежит гиперплоскости V , ортогональной вектору $(b_1, \dots, b_m)^T$, тогда $\sum_i b_i x_i = 0$ и, следовательно $Nx = \lambda x = \lambda_{\min} x$, то есть V является собственным подпространством с числом $\lambda_{\min}$. Остается заметить, что для любой ненулевой псевдометрики ρ выполнено $\sum_i b_i \rho_i > 0$ по определению B , то есть $\rho \notin V$, что и требовалось доказать. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. Character sums over integers with restricted g -ary digits // Illinois J. Math. 2002. Vol. 46, №3. P. 819-836.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*. Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, с. 65-118.
3. Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*. Ижевск, ИКИ, с. 1-424.
4. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations*. CRC Press, 1994
5. Липатов С.Ю., *Функции, не меняющие типы минимальных заполнений*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2015, 42–45
6. S. Yu Lipatov. *Metrics transformations preserving the types of one-dimensional minimal fillings*. Filomat, 33(4):1081–1089, 2019.
7. Рублева О.В. *Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения*, Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ., 2012. №2. 8-11. (Moscow Univ. Math. Bull., 67:2 (2012), 52-54).
8. З.Н.Овсянников, *Открытое семейство множеств, для которых минимальное заполнение не единственно*, Фунд. и прикл. матем., 18: 2 (2013), 153-156.
9. И. Л. Лаут, З. Н. Овсянников *Вид минимальных разветвлённых геодезических в нормированном пространстве определяет норму*, Фунд. и прикл. матем., 18: 2 (2013), 67-77.

10. В. А. Мищенко *Оценки отношения Штейнера–Громова римановых многообразий*, Фунд. и прикл. матем., 18: 2 (2013), 119-124.
11. З. Н. Овсянников *Отношения Штейнера, Штейнера–Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа*, Фунд. и прикл. матем., 18: 2 (2013), 157-165.
12. З. Н. Овсянников *Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырёх точек в пространстве*, Фунд. и прикл. матем., 18: 2 (2013), 167-179.
13. А.С.Пахомова, *Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа*, Матем. заметки, 96:1 (2014), 126-137 [Mathematical Notes, 96:1 (2014), 130–139].
14. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // Успехи математических наук. — 1992. — Т. 47, № 2.
15. A.Ivanov, and A.Tuzhilin, *Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art*, Contemporary Mathematics, 625 (2014), 9-35.
16. *Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса* / А. Иванов, З. Овсянников, Н. Стрелкова, А. Тужилин // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. — 2012. — № 5. — С. 3–8.
17. *Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства* А. Ю. Еремин Матем. сб., 2013, 204:9, 51–72
18. D. Z. Du, F. K. Hwang, *A proof of Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner ratio*, Algorithmica, 7 (1992), 121–135. Матем. сб., 2013, 204:9, 51–72
19. М. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., 18:1 (1983), 1–147.
20. Д.Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004, 512 с.

REFERENCES

1. Banks, W.D., Conflitti, A. & Shparlinski, I.E. 2002, “Character sums over integers with restricted g -ary digits“, *Illinois J. Math.*, vol. 46, no. 3, pp. 819-836.
2. A.O. Ivanov, A.A. Tuzhilin. 2012, “One-Dimensional Gromov Minimal Filling Problem,” *Matem. Sbornik*, **203** (5), 65 (2012) [Sbornik: Math., **203** (5), 677 (2012)].
3. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, 2003, *Extreme Networks Theory* (IKI, Izhevsk, [in Russian]).
4. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. 1994, *Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations*. CRC Press
5. S. Yu. Lipatov, 2015, “The functions that do not change types of minimal fillings”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 6, 42–45; *Moscow University Mathematics Bulletin*, 70:6 (2015), 267–269
6. S. Yu Lipatov, 2019. “Metrics transformations preserving the types of one-dimensional minimal fillings”. *Filomat*, 33(4):1081–1089.

7. O. V. Rubleva, 2012. "The Additivity Criterion for Finite Metric Spaces and Minimal Fillings," *Vestnik Mosk. Un-ta, Matem., Mekh.*, № 2, 8 (2012) [*Moscow Univ. Math. Bull.*, **67** (2), 52 (2012)].
8. Z. N. Ovsyannikov, 2013. "An Open Family of Sets That Have Several Minimal Fillings," *Fundam. i Prikl. Matem.*, **18** (2), 153 (2013) [*J. of Math. Sci.*, **203** (6), 855 (2014)].
9. I. L. Laut, Z. N. Ovsyannikov, 2013. "The Type of Minimal Branching Geodesics Defines the Norm in a Normed Space," *Fundam. i Prikl. Matem.*, **18** (2), 67 (2013) [*J. of Math. Sci.*, **203** (6), 799 (2014)].
10. V. A. Mishchenko, 2013. "Estimates for the Steiner-Gromov Ratio of Riemannian Manifolds," *Fundam. i Prikl. Matem.*, **18** (2), 119 (2013) [*J. of Math. Sci.*, **203** (6), 833 (2014)].
11. Z. N. Ovsyannikov, 2013. "The Steiner and Gromov-Steiner Ratios and Steiner Subratio in the Space of Compacta in the Euclidean Plane with Hausdorff Distance," *Fundam. i Prikl. Matem.*, **18** (2), 157 (2013) [*J. of Math. Sci.*, **203** (6), 858 (2014)].
12. Z. N. Ovsyannikov, 2013. "The Steiner Subratio of Five Points on a Plane and Four Points in Three-Dimensional Space," *Fundam. i Prikl. Matem.*, **18** (2), 167 (2013) [*J. of Math. Sci.*, **203** (6), 864 (2014)].
13. A. S. Pakhomova, 2014. "A Continuity Criterion for Steiner-Type Ratios in the Gromov-Hausdorff Space," *Matem. Zametki*, **96** (1), 126 (2014) [*Math. Notes*, **96** (1), 130 (2014)].
14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., 1992, "The geometry of minimal networks and the one-dimensional Plateau problem", *Uspekhi Mat. Nauk.* T. 47, No. 2.
15. A. Ivanov, A. Tuzhilin, 2014. "Minimal Fillings of Finite Metric Spaces, The State of the Art", in *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, ed. O. Musin and A. Bark, series Contemporary Mathematics, v. 625 (AMS Press, RI, 2014) pp. 9–35.
16. A. O. Ivanov, Z. N. Ovsyannikov, N. P. Strelkova, A. A. Tuzhilin, 2012. "One-Dimensional Minimal Fillings with Negative Edge Weights," *Vestnik Mosk. Un-ta, Matem. Mekhan.*, № 5, 3 (2012) [*Moscow Univ. Math. Bull.*, **67** (5–6), 189 (2012)].
17. A. Yu. Eremin, 2013. "A Formula for the Weight of a Minimal Filling of a Finite Metric Space," *Matem. Sbornik*, **204** (9), 51 (2013) [*Sbornik: Math.*, **204** (9), 1285 (2013)].
18. D. Z. Du, F. K. Hwang, 1992 *A proof of Gilbert-Pollak Conjecture on the Steiner ratio*, *Algorithmica*, 7 (1992), 121–135.
19. M. Gromov, 1983. *Filling Riemannian manifolds*, *J. Diff. Geom.*, 18:1 (1983), 1–147.
20. D. Burago, Yu. D. Burago, S. Ivanov, 2004. *A Course in Metric Geometry*, Institute of Computer Research, Moscow-Izhevsk, 512 p.

Получено 20.09.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.