ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-111-128

К вопросу о перечислении некоторых классов ориентированных и неориентированных деревьев и лесов

Е. И. Деца

Деца Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы перечисления остовных деревьев некоторых графов специального вида. Именно, доказан ряд новых результатов о числе остовных деревьев графов, играющих важную роль в прикладных задачах теории информации. Во-первых, рассмотрены свойства остовных сходящихся деревьев ориентированных графов, участвующих в построении квазиметрики среднего времени первого прохода — обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова. Во-вторых, изучены характеристики остовных корневых деревьев и остовных сходящихся деревьев неориентированных и ориентированных графов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности — одной из мер близости вершин графовых структур, играющей важную роль при решении прикладных задач. Рассуждения проведены на базе графов-гусениц и их ориентированных аналогов. Аналогичные результаты для простого пути и простого цикла (как в ориентированном, так и в неориентированном случаях) были получены ранее.

В первом разделе (введении) представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы. Рассмотрена роль графовых моделей в представлении и исследовании эргодических однородных цепей Маркова. Дано определение и раскрыта роль матрицы относительной лесной доступности неориентированных и ориентированных графов для решения прикладных задач теории информации.

Во втором разделе собраны базовые определения теории графов, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов работы. Дано определение графа и ориентированного графа, остовного подграфа, остовного корневого леса (для неориентированных графов) и остовного сходящегося леса (для ориентированных графов). Приведены примеры (простой путь, простой цикл, граф-гусеница и их ориентированные аналоги). В этом же разделе сформулирован ряд свойств чисел Фибоначчи, необходимых для получения основных результатов статьи в случае неориентированных графов-гусениц.

В третьем разделе доказаны две теоремы о перечислении графов, связанных с построением матрицы среднего времени первого прохода для однородной эргодической цепи Маркова. Именно, найдено количество остовных сходящихся деревьев для ориентированного графа-гусеницы и остовных корневых деревьев для неориентированного графа-гусеницы; произведен подсчет остовных лесов, состоящих из двух деревьев, для тех же графовых структур. Результаты, связанные с ориентированным случаем, сформулированы в терминах величин 2^k , $k \geq 0$; результаты для неориентированного случая сформулированы в терминах чисел Фибоначчи u_k , $k \geq 1$. Доказательства проведены на базе элементарных методов перечислительной комбинаторики.

В четвертом разделе представлены результаты, связанные с перечислением остовных лесов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности неориентированного графа-гусеницы и его ориентированного аналога. Найдено общее количество остовных сходящихся лесов для ориентированного графа-гусеницы и остовных корневых

лесов для неориентированного графа-гусеницы; произведен подсчет остовных сходящихся лесов, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j в ориентированном пути и цикле, и остовных корневых лесов, в которых вершина i принадлежит дереву с корнем j в неориентированном пути и цикле. Как и ранее, результаты, связанные с ориентированным случаем, сформулированы в терминах величин 2^k , $k \geq 0$; результаты для неориентированного случая сформулированы в терминах чисел Фибоначчи u_k , $k \geq 1$.

В пятом разделе представлены примеры матрицы относительной лесной доступности.

В шестом разделе (заключении) приведены основные выводы работы, намечены результаты дальнейших исследований.

Ключевые слова: граф, граф-гусеница, остовной сходящийся корневой лес ориентированного графа, остовной корневой лес неориентированного графа, цепь Маркова, среднее время первого прохода, матрица относительной лесной доступности.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. И. Деца К вопросу о перечислении некоторых классов ориентированных и неориентированных деревьев и лесов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 111 – 128.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-111-128

Questions of enumeration of selected classes of oriented and non-oriented trees and forests

E. I. Deza

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical Sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Abstract

In this article we consider questions of graph enumeration for some graphs of a special form. In fact, a number of new results have been proved on the number of spanning trees and spanning forests of graphs that play an important role in the applied problems of Information Theory. On the one hand, the properties of the spanning converging forests of oriented graphs involved in the construction of the mean first passage time quasi-metric, a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains, are considered. On the other hand, the characteristics of spanning rooted forests and spanning converging forests of non-oriented and oriented graphs needed for the construction of a matrix of relative connectivity via forests, one of the measures of proximity of the vertices of graph structures, which plays an important role in solving of applied problems, have been studied. The consideration is based on a simple graph model, so-called caterpillar, and its oriented analogues. The other simple graph models, including oriented and non-oriented simple cycles and simple paths, where considered before.

The first section (introduction) presents the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article. The role of graph models in the presentation and study of ergodic homogeneous Markov chains is considered. The matrix of relative connectivity via forests for non-oriented and oriented graphs is defined; its role for solving important applied problems of Information Theory is disclosed.

The second section contains the basic definitions of Graph Theory necessary to formulate and prove the main results of the article. The definitions of a graph and an oriented graph, a spanning

subgraph, a spanning rooted forest (for non-oriented graphs) and a spanning converging forest (for oriented graphs) are given. Some examples are represented (simple path, simple cycle, caterpillar and their oriented analogues). In the same section a number of properties of Fibonacci numbers necessary to obtain the main results of the article for the undirected case is formulated.

In the third section, two theorems on the enumeration of graphs related to the construction of the mean first passage time matrix for a homogeneous ergodic Markov chain are proved. In fact, the number of spanning converging trees for the oriented caterpillar and the number of spanning rooted trees for the non-oriented caterpillar are given; the spanning forests consisting of two trees for the same graph structures are counted. Results for the oriented case are formulated in terms of values 2^k , $k \geq 0$; results for the non-oriented case are formulated in terms of Fibonacci numbers u_k , $k \geq 1$. The proofs are based on elementary methods of enumerating Combinatorics.

The fourth section presents the results related to enumeration of spanning forests needed for construction of the matrix of relative connectivity via forests for the non-oriented caterpillar and its oriented analogue. Total number of spanning converging forests (for oriented caterpillar) and total number of spanning rooted forests (for non-oriented caterpillar) are found; enumeration of the spanning converging forests, in which a vertex i belongs to a tree converging to a vertex j (for the oriented caterpillar), and enumeration of the spanning rooted forests, in which a vertex i belongs to a tree with a root j (for the non-oriented caterpillar) are represented. As before, results for the oriented case are formulated in terms of values 2^k , $k \geq 0$; results for the non-oriented case are formulated in terms of Fibonacci numbers u_k , $k \geq 1$.

The fifth section contains the examples of the the matrix of relative connectivity via forests.

The sixth section (conclusion) presents the main conclusions of the article, outlines the ideas of further studies.

Keywords: graph, caterpillar, spanning converging forest of an oriented graph, spanning rooted forest of an non-oriented graph, Markov chain, mean first passage time, matrix of relative connectivity via forests.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

E. I. Deza, 2021, "Questions of enumeration of selected classes of oriented and non-oriented trees and forests", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 111 – 128.

1. Введение

Вопросы перечисления графовых структур представляют собой значительную и хорошо разработанную часть классической теории графов. Особое место среди перечислительных проблем занимают утверждения, связанные с подсчетом тех или иных деревьев и, как естественное обобщение, лесов.

Так, важное место в прикладных задачах теории информации занимают вопросы, связанные с исследованием обобщенных метрических структур на цепях Маркова. [6] Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги – переходам между ними. Вес дуги (i, j) , связывающей вершины s_i и s_j , будет равен вероятности p_{ij} перехода из первого состояния во второе. С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный ориентированный граф по следующему закону: если вершина i имеет степень k , то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

Важной характеристикой эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$ является *среднее время t_{ij} первого прохода* из состояния i в состояние j . Матрицу $M = ((t_{ij}))$ можно получить, пользуясь исследованием ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова ([11], [17], [18], [19]): *если $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$, а Γ – взвешенный*

орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода в T , то среднее время первого прохода из состояния i в состояние j имеет вид

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} – суммарный вес входящих лесов орграфа Γ , состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j , q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Таким образом, исследование количества сходящихся лесов ориентированных графов, используемых для моделирования марковских процессов, является естественной составной частью указанной проблематики. Представленные в статье (раздел 3) результаты в этой области – доказательство теорем о числе остовных деревьев и остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных графов-гусениц, являются продолжением наших предыдущих исследований: в работе [4] аналогичные результаты были получены для ориентированных и неориентированных путей и циклов.

Другой пример – матрица относительной лесной доступности, одна из классических мер близости между вершинами графов и орграфов. Для графа G на n вершинах матрица относительной лесной доступности определяется по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} – количество остовных корневых лесов графа G , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , а f – общее количество остовных корневых лесов графа G . Для орграфа Γ на n вершинах матрица относительной лесной доступности определяется по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} – количество остовных сходящихся лесов орграфа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному и тому же дереву, сходящемуся к j , а f – общее количество остовных сходящихся лесов орграфа G ([12], [10], [9]).

Из определения матрицы относительной лесной доступности следует, что информация о количестве тех или иных типов остовных лесов графов и ориентированных графов, использующихся при решении прикладных задач, существенна для проведения соответствующих исследований. Представленные в статье (раздел 4) результаты в этой области – доказательство теорем о числе остовных лесов ориентированных и неориентированных графов-гусениц, также являются продолжением предыдущих исследований: в работе [4] аналогичные результаты были получены для ориентированных и неориентированных путей и циклов. (Для неориентированных путей и циклов см. также работу [8].)

Заметим, что ряд результатов, связанных с матрицей относительной лесной доступности для неориентированных графов-гусениц, был получен в работе Чеботарева П.Ю. [8]. Однако соображения, положенные в основу доказательства, имели значительно более общую природу. Наши результаты получены с использованием простейших методов перечислительной комбинаторики и доказанных нами свойств рекуррентной последовательности чисел Фибоначчи. Кроме того, мы нашли для неориентированного графа-гусеницы на n вершинах все элементы матрицы $M = ((m_{ij}))$.

Раздел 2 работы носит вспомогательный характер. Здесь представлена необходимая в дальнейшем информация о графовых структурах, фигурирующих в исследовании, и перечислены простейшие свойства последовательности чисел Фибоначчи, существенно используемые при доказательстве теорем в неориентированном случае.

2. Базовые определения

Для формулировки и доказательства основных результатов статьи вспомним базовые понятия теории неориентированных и ориентированных графов. [7], [11]

Неориентированный граф (граф) G – пара $\langle V, E \rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – множество, называемое множеством вершин графа G , а $E \subset \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$ – некоторое подмножество множества неупорядоченных пар различных элементов из V , называемое множеством ребер графа G .

Простейшими графами являются *неориентированный путь $P_n = (V, E)$* (рис. 2.1), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, и *неориентированный цикл $C_n = (V, E)$* (рис. 2.2), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$. Несложное преобразование графа P_n дает нам *граф-гусеницу $T_n = (V, E)$* , где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 5), \dots, (n-1, n)\}$.

Подграфом графа G называется любой граф, множество вершин которого является подмножеством вершин графа G , а множество ребер является подмножеством множества ребер графа G . *Остовной подграф* графа G – подграф, содержащий все вершины графа G .

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует соединяющий их путь. *Компонентой* графа G называется максимальный связный подграф графа G .

Дерево – связный граф, не содержащий циклов. *Корневое дерево* – дерево, в котором выбрана одна вершина, называемая *корнем*. *Корневое остовное дерево* графа G – остовной подграф графа G , являющийся корневым деревом.

Лес – граф, каждая компонента которого является деревом. *Корневой остовной лес* графа G – остовной подграф графа G , все компоненты которого являются корневыми деревьями.

Ориентированный граф (орграф) Γ – пара $\langle V, E \rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – множество, называемое множеством вершин графа G , а $E \subset \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$ – некоторое подмножество множества упорядоченных пар различных элементов из V , называемое множеством дуг орграфа Γ . Другими словами, ориентированный граф – это граф, ребрам которого присвоено направление.

Простейшими орграфами являются *ориентированный путь $\vec{P}_n = \langle V, E \rangle$* (рис. 2.3), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 2, 1 \rangle\}$ и *ориентированный цикл $\vec{C}_n = \langle V, E \rangle$* (рис. 2.4), где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, n \rangle\}$. Простейшее преобразование ориентированного пути $\vec{P}_n$ дает нам *ориентированный граф-гусеницу $\vec{T}_n = \langle V, E \rangle$* , где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1 \rangle, \langle n-1, n-2 \rangle, \dots, \langle 5, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$.

Подорграфом орграфа Γ называется любой орграф, множество вершин которого является подмножеством вершин орграфа Γ , а множество дуг является подмножеством множества дуг орграфа Γ . *Остовной подорграф* графа Γ – подорграф, содержащий все вершины орграфа Γ .

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связан. *Слабой компонентой* орграфа называется любой его максимальный слабосвязный подграф.

Сходящееся дерево – слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для исходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для исходящей степени значение 1.

Сходящийся лес орграфа Γ – остовной подорграф орграфа Γ , все слабые компоненты которого являются сходящимися деревьями. Говорят, что сходящийся лес *сходится к корням* его сходящихся деревьев.

Числами Фибоначчи называются элементы рекуррентно задаваемой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots: u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, в то время как $u_1 = u_2 = 1$. Таким образом, последовательность Фибоначчи начинается с элементов 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Числа Фибоначчи обладают рядом интересных свойств, которые можно найти, например,

в [1]. В частности, они удовлетворяют многочисленным тождествам, некоторые из которых будут использованы в нашей работе при получении результатов, связанных с неориентированными графами-гусеницами:

- $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$;
- $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
- $u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$.

3. Перечисление деревьев и лесов, связанных с квазиметрикой среднего времени первого прохода

Пусть Γ – взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны вероятностям перехода некоторой однородной эргодической цепи Маркова, то среднее время m_{ij} первого прохода из состояния i в состояние j в данной цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} – суммарный вес входящих лесов орграфа Γ , состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j , q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Таким образом, для построения матрицы среднего времени первого прохода нам нужна информация о количестве корневых (сходящихся) остовных деревьев и корневых (сходящихся) остовных 2-деревьев лесов ориентированных и неориентированных графов. В этом разделе представлены доказательства полученных нами результатов для неориентированных и ориентированных графов-гусениц.

Теорема 3.1.

Для числа корневых остовных деревьев имеют место следующие утверждения:

- число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$, равно 1;
- число остовных корневых сходящихся деревьев неориентированного графа-гусеницы T_n , $n \geq 4$, равно n .

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4] аналогичные результаты были получены для ориентированных и неориентированных путей и циклов. Именно: число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, равно 1; число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, равно n ; число остовных корневых деревьев неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно n ; число остовных корневых деревьев неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно n^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$ существует ровно одно остовное корневое дерево: выбирая в качестве корня вершину 1, мы получаем остовное дерево, сходящееся к 1, которое совпадает с самим графом $\vec{T}_n$; выбирая в качестве корня любую вершину $i \neq 1$, мы убеждаемся, что в графе $\vec{T}_n$ не существует остовного дерева, сходящегося к i .

В. Для неориентированного графа-гусеницы T_n существует ровно одно остовное дерево с фиксированным корнем i : оно совпадает с T_n . Выбирая вершину i из n вершин графа T_n , мы получаем n остовных корневых деревьев графа T_n . $\square$

ТЕОРЕМА 3.2.

Для числа 2-деревьевых остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$, равно $n - 1$;
- число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного графа-гусеницы T_n , $n \geq 4$, равно $\frac{n(n^2-7)}{6} + 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4] аналогичные результаты были получены для ориентированных и неориентированных путей и циклов. Именно: число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, равно $n - 1$; число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, равно $\frac{n(n-1)}{2}$; число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно $\frac{n(n^2-1)}{6}$; число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов орграфа $\vec{T}_n$ рассмотрим две возможности. Сначала предположим, что одно из двух деревьев нашего леса сходится к вершине 1, а другое - к произвольной вершине $j \neq 1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае два дерева, образующие лес, определены однозначно; искомый 2-деревьевый сходящийся лес получается уничтожением дуги $\langle j, j - 1 \rangle$. При этом $n - 1$ возможный выбор j обеспечивает $n - 1$ лес. Предположив, что ни одно из двух деревьев 2-деревьевого леса не сходится к 1, мы убеждаемся, что такая ситуация невозможна.

В. Для подсчета остовных 2-деревьевых корневых лесов графа T_n выберем две вершины i, j в качестве корней соответствующих деревьев. Заметим, что при фиксированных i, j , $4 \leq i < j \leq n$, мы получаем ровно $j - i$ остовных 2-деревьевых корневых лесов графа T_n . Каждый из этих лесов может быть получен уничтожением одного из $j - i$ ребер $(i, i + 1), (i + 1, i + 2), \dots, (j - 1, j)$ графа T_n .

Так, существует ровно 1 остовный 2-деревьевый лес, в котором деревья имеют корни 4 и 5: одно дерево представляет собой граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе - путь на $n - 4$ вершинах 5, 6, ..., n с выделенной вершиной-корнем 5. Существует ровно 2 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 4 и 6: в первом случае одно дерево представляет граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе - путь на $n - 4$ вершинах 5, 6, ..., n с выделенной вершиной-корнем 6; во втором случае мы получаем граф-гусеницу на 5 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n - 5$ вершинах 6, ..., n с выделенной вершиной-корнем 6. Существует ровно 3 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 4 и 7: в первом случае одно дерево представляет собой граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе - путь на $n - 4$ вершине 5, 6, ..., n с выделенной вершиной-корнем 7; во втором случае мы получаем граф-гусеницу на 5 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n - 5$ вершинах 6, ..., n с выделенной вершиной-корнем 7; в третьем случае мы получаем граф-гусеницу на 6 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n - 6$ вершинах 7, ..., n с выделенной вершиной-корнем 7. Рассуждения легко продолжить, рассмотрев любую пару вершин i, j , $4 \leq i < j \leq n$. Существует ровно $j - i$ остовных 2-деревьевых лесов, в которых деревья имеют корни i и j : в первом случае одно дерево представляет собой граф-гусеницу на i вершинах с выделенной вершиной-корнем i , в то время как второе дерево является путем на вершинах $i + 1, i + 2, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем j ; во втором случае мы получаем граф-гусеницу на $i + 1$ вершине с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $i + 2, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем j ; ...; в последнем случае мы получаем граф-гусеницу на $j - 1$ вершине с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $j, \dots, n$ с выделенной вершиной-корнем j .

Таким образом, фиксируя вершину $i = 4$ и меняя вершину j от 5 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n - 4)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i = 5$ и меняя вершину j от 6 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n - 5)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i = 6$ и меняя вершину j от 7 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n - 6)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; ...; наконец, фиксируя вершину $i = n - 1$ и вершину $j = n$, мы получим ровно один остовной 2-деревьевый корневой лес. Непосредственный подсчет позволяет получить для числа 2-деревьевых корневых лесов графа T_n красивую формулу $1 \cdot (n - 4) + 2 \cdot (n - 5) + 3 \cdot (n - 6) + \dots + (n - 4) \cdot 1$:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-6) & + & (n-5) & + & (n-4) & + \\ 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-6) & + & (n-5) & + & & \\ 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-6) & + & & & & \\ & & & & & & & & \dots & & & + \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

$$= 1 \cdot (n - 4) + 2 \cdot (n - 5) + 3 \cdot (n - 6) + \dots + (n - 4) \cdot 1.$$

Для получения явной формулы произведем формальное суммирование. При $k = n - 3$ получим: $\sum_{i=1}^k i(k - i) = \sum_{i=1}^k (ik - i^2) = k \sum_{i=1}^k i - \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k^2(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(k-1)}{6} = \frac{k(k^2-1)}{6}$. Другими словами, вклад рассмотренных случаев в общий подсчет равен $\frac{(n-3)((n-3)^2-1)}{6}$.

Фиксируя вершину $i = 1$ и меняя вершину j от 4 до n , мы получим $1 + 2 + \dots + (n - 3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$ остовных 2-деревьевых корневых лесов.

Фиксируя вершину $i = 2$ и меняя вершину j от 1 до n , исключая 3, мы получим $1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ остовных 2-деревьевых корневых лесов. То же количество $1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ получится при фиксации вершины $i = 3$ и последовательном рассмотрении в качестве вершины j всех вершин от 1 до n , исключая 2.

Наконец, фиксируя в качестве корней вершины 2, 3, мы получим ровно две возможности, уничтожая либо ребро (1, 2), либо ребро (1, 3); в каждом из рассмотренных случаев остовной 2-деревьевый лес состоит из изолированной вершины-корня (2 и 3, соответственно), и простого пути, содержащего все остальные вершины графа T_n .

Общий подсчет дает теперь величину $\frac{(n-3)((n-3)^2-1)}{6} + \frac{(n-3)(n-2)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 2 = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} + (n-2)(n-1) + 2 = \frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{6} + 2 = \frac{n^3-7n+18}{6}$. $\square$

4. Перечисление деревьев и лесов, связанных с матрицей относительной лесной доступности

Матрица относительной лесной доступности графа G (орграфа Γ) на n вершинах определяется по закону $\frac{((f_{ij}))}{f}$, где f_{ij} - количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ), в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , а f - общее количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ). В этом разделе приведены доказательства теорем, дающих формулы для числа соответствующих остовных конструкций в ориентированных и неориентированных графах-гусеницах.

ТЕОРЕМА 4.1.

Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число остовных сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$, равно 2^{n-1} ;
- число остовных корневых лесов неориентированного графа-гусеницы T_n , $n \geq 4$, равно $4u_{2n-3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4] аналогичные результаты были получены для ориентированных и неориентированных путей и циклов. Именно: число остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, равно 2^{n-1} ; число остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, равно $2^n - 1$; число остовных корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, равно числу Фибоначчи u_{2n} ; число остовных корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, равно сумме $u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Для ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ всех $n-1$ дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из $n-1$ элемента равно 2^{n-1} , мы получим ровно 2^{n-1} остовных корневых сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$.

В. Для неориентированного графа-гусеницы T_n , $n \geq 4$, при получении остовного корневого леса воспользуемся соображениями индукции и представленными выше свойствами чисел Фибоначчи.

Для $n = 4$ мы имеем ровно 20 (то есть $4u_5 = 4u_{2.4-3}$) корневых лесов графа T_n : 4 леса содержат по одному дереву (выбираем только корень из четырех имеющихся вершин 1, 2, 3, 4); 9 лесов содержат по два дерева (одно из которых - изолированная вершина 2, 3 или 4, а другое - путь на остальных трех вершинах; выбор корня дает три возможности для каждого случая изолированной вершины, всего 9 вариантов); 6 лесов содержат по 3 дерева (две изолированные вершины и путь на остальных двух вершинах; сохранение одного из трех ребер даст три варианта, каждый из которых будет дублирован тем или иным выбором корня в пути на двух вершинах); наконец, один лес содержит 4 дерева, каждое из которых представляет собой изолированную вершину.

Для $n = 5$ мы имеем ровно 52 (то есть $4u_7 = 4u_{2.5-3}$) корневых леса графа T_n . Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 "расширяет" предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_5 = 20$ возможностей. Вершина 5, связанная с корнем 4, еще раз "расширяет" предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_5 = 20$ возможностей. Наконец, вершина 5, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 4, дает еще 12 случаев: уничтожив ребро (1, 4), мы получаем возможность построить 8 лесов, модифицируя полученный путь на вершинах 2, 1, 3 (три леса, состоящие из одного дерева, 4 леса, состоящие из двух деревьев и 1 лес, состоящий из трех деревьев); сохраняя ребро (1, 4), мы получим 4 возможных леса, сохраняя или уничтожая ребра (1, 2) и (3, 1) (оба сохранены, оба уничтожены, одно их двух сохранено). Замечая, что $8 = 4 \cdot u_3$, в то время как $4 = 4 \cdot u_1$, мы получаем для $n = 5$ величину $4(u_5 + u_5 + u_3 + u_1)$. Пользуясь свойствами чисел Фибоначчи, мы можем утверждать, что $u_5 + u_3 + u_1 = u_6$ и, следовательно, $4(u_5 + u_5 + u_3 + u_1) = 4(u_5 + u_6) = 4u_7 = 4u_{2.5-3}$.

Для доказательства общего случая заметим, что $u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \dots + u_3 + u_1$. Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n+1$ - изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то мы получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n , другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то мы вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n , другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если $n+1$ связана с n ребром и является корнем, то мы получаем следующие случаи.

Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-1$ вершине $n-1, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа T_{n-1}), всего $4u_{2(n-1)-3}$ возможностей. Дерево

(путь) на вершинах $n+1, n, n-1$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-2$ вершинах $n-2, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа T_{n-2}), всего $4u_{2(n-2)-3}$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1, n-2$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-3$ вершинах $n-3, \dots, 2, 1$ (то есть любой корневой лес графа T_{n-3}), всего $4u_{2(n-3)-3}$ возможностей. ... Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1, \dots, 5$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на 4 вершинах $1, 2, 3, 4$ (то есть любой корневой лес графа T_4), всего $4u_{2 \cdot 4 - 3} = 4u_5$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1, n, n-1, \dots, 5, 4$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на вершинах $2, 1, 3$ (то есть любой корневой лес графа P_3), всего $8 = 4u_3$ возможностей. Наконец, дерево на вершинах $n+1, n, n-1, \dots, 5, 4, 1$ с корнем $n+1$, к которому, возможно, "добавлены" вершины 2 и 3 (обе, одна или не одной; в первом случае получаем лес, состоящий из одного дерева, во втором и третьем - лес из двух деревьев, одно из которых представляет собой изолированную вершину, в последнем - лес из трех деревьев, два из которых представляют собой изолированные вершины 2 и 3), всего $4 = 4u_1$ возможности.

Данный пересчет дает число $4u_{2(n+1)-3}$ корневых остовных лесов графа T_{n+1} : $4u_{2n-3} + 4u_{2n-3} + 4u_{2(n-1)-3} + \dots + 4u_5 + 4u_3 + 4u_1 = 4(u_{2n-3} + u_{2n-2}) = 4u_{2n-1} = 4u_{2(n+1)-3}$.

Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

ТЕОРЕМА 4.2.

Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения:

- число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , равно:

$$f_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & i = 1, \\ 2^{n-2}, & 2 \leq i \leq n; \end{cases} \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{n-2}, & j = 1, i = 2, 3, \\ 2^{n-i+2}, & j = 1, i = 4, \dots, n, \\ 0, & j = 2, i = 1, 3, 4, \dots, n, \\ 0, & j = 3, i = 1, 2, 4, \dots, n, \\ 2^{n-i+j-2}, & 4 \leq j < i \leq n, \\ 0, & 1 \leq i < j \leq n; \end{cases}$$

- число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного графа-гусеницы T_n , $n \geq 4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно:

$$f_{ii} = \begin{cases} 4u_{2n-5}, & i = 1, \\ 4u_{2n-4}, & i = n, \\ u_{2n-1} - u_{2n-6}, & i = 2, 3, \\ 4u_{2k-4} \cdot u_{2(n-k)+1}, & 4 \leq i < n; \end{cases}$$

$$f_{ij} = \begin{cases} 2u_{2(n-3)+1}, & (i, j) = (1, 2), (1, 3), \\ 4u_{2(n-k)+1}, & (i, j) = (1, k), k = 4, \dots, n, \\ u_{2(n-3)+1}, & (i, j) = (2, 3), \\ 2u_{2(n-k)}, & (i, j) = (2, k), (3, k), k = 4, \dots, n, \\ 4u_{2 \max(i,j)-2} \cdot u_{2(n-\min(i,j))+1}, & 4 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4] аналогичные результаты были получены для ориентированных и неориентированных путей и циклов. Именно: число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j ,

равно:

$$f_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1, \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n; \end{cases} \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1, \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n, \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n; \end{cases}$$

число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , равно

$$f_{ii} = 2^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{(j-i)-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n-(i-j)-1}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n; \end{cases}$$

число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно $u_{2\min(i,j)-1} \cdot u_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i, j = 1, \dots, n$; число остовных корневых лесов неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j , равно $u_{2|j-i|} + u_{2(n-|j-i|)}$, $i, j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

А. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$, $n \geq 4$.

I. Рассматривая величину f_{11} , нетрудно убедиться в том, что в любом сходящемся остовном лесе ориентированного графа-гусеницы вершина 1 всегда принадлежит дереву, сходящемуся к вершине 1. Таким образом, f_{11} равно общему числу остовных сходящихся лесов орграфа $\vec{T}_n$, то есть 2^{n-1} .

II. Рассмотрим величину f_{ii} , $i \neq 1$. Чтобы получить дерево, сходящееся к i , нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного графа-гусеницы, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i , необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \dots, \langle i-1, i-2 \rangle, \langle i+1, i \rangle, \dots, \langle n, n-1 \rangle\}$ оставшихся $n-2$ дуг ориентированного графа $\vec{T}_n$. Это можно сделать 2^{n-2} способами.

III. Рассмотрим величину f_{i1} , $i \neq 1$. Если $i = 2$, то для получения дерева, содержащего 2 и сходящегося к 1, нужно сохранить дугу $\langle 2, 1 \rangle$ между 2 и 1. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного графа-гусеницы, в которых вершина 2 принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дугу $\langle 2, 1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества оставшихся $n-2$ дуг ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$; это можно сделать 2^{n-2} способами. Те же рассуждения имеют место, если $i = 3$. Чтобы получить дерево, содержащее i , $4 \leq i \leq n$, и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$ между 1 и i . Остальные $n-i+2$ дуг можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Это можно сделать 2^{n-i+2} способами.

IV. Рассмотрим величину f_{ij} , $4 \leq j < i \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j , нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j \rangle, \langle j+2, j+1 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$, между j и i . Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1 \rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j , $4 \leq j < i \leq n$, необходимо, сохранив дуги $\langle j+1, j \rangle, \langle j+2, j+1 \rangle, \dots, \langle i, i-1 \rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1 \rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества оставшихся $n-(i-j)-2$ дуг ориентированного графа-гусеницы $\vec{T}_n$. Это можно сделать $2^{n-(i-j)-2}$ способами.

V. Рассматривая величину f_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, нетрудно убедиться в том, что она равна нулю: деревьев, содержащих i и сходящихся к j , в данном случае не существует. Аналогичным образом, не существует деревьев, содержащих $i = 1, 3, 4, \dots, n$ и сходящихся к 2, как и деревьев, содержащих $i = 1, 2, 4, \dots, n$ и сходящихся к 3.

В. Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного графа-гусеницы T_n , $n \geq 4$.

И. Рассмотрим величину f_{11} . Чтобы получить дерево, содержащее 1 и имеющее корень 1, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ мы имеем ровно 8 (то есть $4u_3 = 4u_{2,4-5}$) корневых лесов графа T_n , один из корней которого равен 1: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, мы получим из него 4 корневых леса, одним из корней которого является 1 (один, содержащий одно дерево, два - содержащих два дерева и один - содержащий три дерева); добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 "расширяет" предыдущий случай, давая 4 возможности; вершина 4, связанная с корнем 1, еще раз "расширяет" предыдущий случай, давая 4 возможности.

Для $n = 5$ мы имеем ровно 20 (то есть $4u_5 = 4u_{2,5-5}$) корневых лесов графа T_n , один из корней которого равен 1. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 "расширяет" предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_3 = 8$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, еще раз "расширяет" предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_3 = 8$ возможностей. Наконец, вершина 5, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 4, дает еще 4 случая: уничтожив ребро (1, 4), мы получаем возможность построить 4 леса, одним из корней которого является 1, так, как описано выше.

Для доказательства общего случая заметим, что $u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \dots + u_3 + u_1$. Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n + 1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n + 1$ - изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то мы получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n , другими словами, $4u_{2n-5}$.

Если вершина $n + 1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то мы вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n , другими словами, $4u_{2n-5}$.

Если вершина $n + 1$ связана с вершиной n ребром и является корнем, то, отбросив ребро $(i, i + 1)$, $4 \leq i \leq n - 1$, мы получим дерево на i вершинах с корнем 1 слева, которое можно превращать в лес любым из u_{2i-5} способов, и путь на $n - i$ вершинах справа с корнем $n + 1$. Если слева мы уберем ребро (1, 4), мы получим слева простой путь на 3 вершинах, который даст нам $4 = 4u_1$ возможности. Пробегая по всем ребрам $(n - 1, n)$, ..., $(4, 5)$, $(1, 4)$, мы получим $4(u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2(n-1)-5})$ возможностей.

Суммируя, получим следующий результат: $4(u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2(n-1)-5}) + 4u_{2n-5} + 4u_{2n-5} = 4(u_1 + u_3 + \dots + u_5 + u_{2n-5}) + 4u_{2n-5} = 4(u_{2n-4} + u_{2n-5}) = 4u_{2n-3} = 4u_{2(n+1)-5}$.

II. Рассмотрим величину f_{22} . Чтобы получить дерево, содержащее 2 и имеющее корень 2, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ мы имеем ровно 12 (то есть $u_7 - u_2$) корневых лесов графа T_n , один из корней которого равен 2: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, мы получим из него $5 = u_5$ корневых лесов, один из корней которых равен 2 (один лес, представляющий собой дерево, три леса из двух деревьев и один лес из трех деревьев); добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 "расширяет" предыдущий случай, давая $5 = u_5$ возможностей; вершина 4, связанная с вершиной 1 и не являющаяся корнем, вновь "расширяет" предыдущий случай, давая $5 = u_5$ возможностей; наконец, вершина-корень 4, связанная с вершиной 1, дает $2 = u_2$ возможности (один лес, содержащий два дерева, и один - содержащий три дерева).

Для $n = 5$ мы имеем ровно 31 (то есть $u_9 - u_4$) корневых леса графа T_n , один из корней которого равен 2. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $12 = u_7 - u_2$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, вновь дает $12 = u_7 - u_2$ возможностей; наконец вершина-корень 5, связанная с вершиной 4, дает $5 = u_5$

возможностей, если уничтожено ребро $(1, 4)$, и $2 = u_2$ возможности, если ребро $(1, 4)$ сохранено.

Для доказательства общего случая получим граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n + 1$, рассмотрев следующие возможности.

Если $n + 1$ – изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то мы получаем ровно столько остовных лесов, сколько их существует для T_n , другими словами, $u_{2n-1} - u_{2n-6}$.

Если вершина $n + 1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то, отбросив ребро $(i, i + 1)$, $4 \leq i \leq n - 1$, мы получим дерево на i вершинах слева, которое можно превращать в лес, содержащий корень 2, любым из $u_{2i-1} - u_{2i-6}$ способов, и путь на $n - i$ вершинах справа с корнем $n + 1$. Если мы уберем ребро $(1, 4)$, то получим слева простой путь на 3 вершинах, который даст нам $5 = u_5$ возможностей. Если ребро $(1, 4)$ сохранено, то слева мы получим $2 = u_3$ возможностей, уничтожив ребро $(1, 2)$ и произвольным образом обращаясь с ребром $(1, 3)$. Пробегаая по всем ребрам $(n - 1, n)$, ..., $(4, 5)$, $(1, 4)$, мы получим $u_3 + u_5 + (u_7 - u_2) + (u_9 - u_4) + \dots + (u_{2(n-1)-1} - u_{2(n-1)-6})$ возможностей.

Суммируя, получим следующий результат: $u_3 + u_5 + (u_7 - u_2) + (u_9 - u_4) + \dots + (u_{2(n-1)-1} - u_{2(n-1)-6}) + 2(u_{2n-1} - u_{2n-6}) = (u_3 + \dots + u_{2n-1}) - (u_2 + u_4 + \dots + u_{2n-6}) + u_{2n-1} - u_{2n-6} = u_{2n} - 1 - (u_{2n-5} - 1) + u_{2n-1} - u_{2n-6} = u_{2n} + u_{2n-1} - (u_{2n-5} + u_{2n-6}) = u_{2n+1} - u_{2n-4} = u_{2(n+1)-1} - u_{2(n+1)-6}$.

Для величины f_{33} рассуждения абсолютно аналогичны.

III. Рассмотрим величину f_{nn} . Чтобы получить дерево, содержащее n и имеющее корень n , ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ мы имеем ровно 12 (то есть $4u_4 = 4u_{2,4-4}$) корневых лесов графа T_n , один из корней которого равен n : рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, мы получим из него $8 = u_6 = u_{2,3}$ корневых лесов; добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 "расширяет" предыдущий случай, давая 8 возможностей; вершина-корень 4, связанная с вершиной 1, дает 4 возможности (один лес, содержащий одно дерево, два - содержащих два дерева и один - содержащий три дерева).

Для $n = 5$ мы имеем ровно 32 (то есть $4u_6 = 4u_{2,5-4}$) корневых леса графа T_n , один из корней которого равен n . Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $20 = 4u_5 = 4u_{2,4-3}$ возможностей. Вершина-корень 5, связанная с вершиной 4, не являющейся корнем, дает $8 = 4u_3$ возможностей, если уничтожено ребро $(1, 4)$, и $4 = 4u_1$ возможности, если ребро $(1, 4)$ сохранено.

Для доказательства общего случая заметим, что $u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \dots + u_3 + u_1$. Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n + 1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n + 1$ – изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то мы получаем ровно столько остовных лесов, сколько их существует для T_n , другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если вершина-корень $n + 1$ связана с вершиной n ребром, то, отбросив ребро $(i, i + 1)$, $4 \leq i \leq n - 1$, мы получим дерево на i вершинах слева, которое можно превращать в лес любым из u_{2i-3} способов, и путь на $n - i$ вершинах справа с корнем $n + 1$. Если мы уберем ребро $(1, 4)$, то получим слева простой путь на 3 вершинах, который дает $8 = 4u_3$ возможностей. Если ребро $(1, 4)$ сохранено, то слева мы получим $4 = 4u_1$ возможностей, произвольным образом обращаясь с ребрами $(2, 1)$ и $(3, 1)$.

Пробегаая по всем ребрам $(n, n - 1)$, ..., $(4, 5)$, $(1, 4)$, мы получим $4(u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2(n-1)-3})$ возможностей.

Суммируя, получим следующий результат: $4(u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2(n-1)-3}) + 4u_{2n-3} = 4(u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2(n-1)-3} + u_{2n-3}) = 4u_{2n-2} = 4u_{2(n+1)-4}$.

IV. Рассмотрим величину f_{kk} , $4 \leq k \leq n - 1$. Чтобы получить дерево, содержащее k и имеющее корень k , ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем

рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа. Для $n = 4$ такого k не существует. Для $n = 5$ мы имеем $k = 4$. В этом случае мы имеем ровно 24 (то есть $4u_4u_3$) корневых леса графа T_n , один из корней которого равен 4. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $12 = 4u_4$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, также дает $12 = 4u_4$ возможностей.

Для доказательства общего случая рассмотрим граф T_n . В этом случае $k = 4, 5, \dots, n - 1$. Зафиксировав $4 \leq k \leq n - 1$, рассмотрим следующие возможности.

Отбросив ребро $(k, k + 1)$, мы получим дерево на k вершинах слева, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, и путь на $n - k$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k)}$ способов. Сохранив ребро $(k, k + 1)$ и отбросив ребро $(k + 1, k + 2)$, мы получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с "дополнительным" ребром $(k, k + 1)$, не влияющим на рассмотрение, и путь на $n - k - 1$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k-1)}$ способов. Сохранив ребра $(k, k + 1)$, $(k + 1, k + 2)$ и отбросив ребро $(k + 2, k + 3)$, мы получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с "дополнительными" ребрами $(k, k + 1)$, $(k + 1, k + 2)$, не влияющими на рассмотрение, и путь на $n - k - 2$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k-2)}$ способов. ... Сохраняя ребра $(k, k + 1)$, ..., $(n - 2, n - 1)$ и отбрасывая ребро $(n - 1, n)$, мы получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с "дополнительными" ребрами $(k, k + 1)$, ..., $(n - 2, n - 1)$, не влияющими на рассмотрение, и путь на одной вершине справа, который можно превратить в лес ровно одним (формально, u_2) способом. Сохраняя все ребра $(k, k + 1)$, ..., $(n - 1, n)$, мы получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с "дополнительными" ребрами $(k, k + 1)$, ..., $(n - 1, n)$, не влияющими на рассмотрение. Пробегая таким образом по всем ребрам $(n - 1, n)$, ..., $(k, k + 1)$, и учитывая, что числа "правых" и "левых" возможностей независимы и, следовательно, перемножаются, мы получим в итоге $4u_{2k-4}(1 + u_2 + \dots + u_{2(n-k-1)} + u_{2(n-k)}) = 4u_{2k-4}u_{2(n-k)+1}$ возможностей.

V. Рассмотрим величину f_{ij} , $4 \leq i < j \leq n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j , нужно обязательно сохранить все $j - i$ ребер между j и i . Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Посмотрим, какие возможности мы можем получить, отбрасывая те или иные ребра "справа" от вершины j .

Если справа от вершины j мы ничего не убираем, то в качестве искомого леса мы получаем дерево с корнем j - путь на вершинах $i, i + 1, \dots, j, \dots, n$ с корнем j ; единственная возможность, 1. Если справа мы уберем ребро $(n - 1, n)$ и сохраним все ребра $(j, j + 1)$, $(j + 1, j + 2)$, ..., $(n - 2, n - 1)$, мы получим справа единственное дерево на одной вершине n с корнем n ; единственная возможность, $1 = u_2$. Если справа мы уберем ребро $(n - 2, n - 1)$ и сохраним все ребра $(j, j + 1)$, $(j + 1, j + 2)$, ..., $(n - 2, n - 1)$, мы получим справа две вершины $n - 1, n$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса, $3 = u_{2,2}$ возможностей. Если, двигаясь по этому пути, мы уберем ребро $(j, j + 1)$, то получим справа $n - j$ вершин $j + 1, \dots, n$; на них мы можем построить любые остовные корневые леса, $u_{2(n-j)}$ возможностей.

Таким образом, число "правых" преобразований равно $u_{2(n-j)+1} : 1 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2(n-j)} = u_{2(n-j)+1}$.

Посмотрим, какие возможности мы можем получить, отбрасывая те или иные ребра "слева" от вершины i .

Если слева от вершины i мы ничего не убираем, то в качестве искомого леса мы получаем дерево с корнем j - граф на j вершинах $1, 2, \dots, i, \dots, j$ с корнем j ; единственная возможность, 1. Если мы уберем ребро $(i - 1, i)$ и сохраним все ребра $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$..., $(i - 2, i - 1)$, то получим слева граф на $i - 1$ вершине, на которых мы можем построить любые остовные корневые леса, $4u_{2(i-1)-3}$ возможностей. Если, двигаясь по указанному пути, мы уберем ребро $(4, 5)$ и

сохраним все ребра $(5, 6), \dots, (i-1, i)$, мы получим слева граф на 4 вершинах, из которого можно строить любые корневые леса, всего $4u_5$ возможностей. Если мы уберем ребро $(1, 4)$ и сохраним все ребра $(4, 5), \dots, (i-1, i)$, мы получим слева простой путь на 3 вершинах, на которых мы можем построить любые остовные корневые леса, всего $u_{2,3} = 4u_3$ возможностей. Если слева ребро $(1, 4)$ сохранено, как и все ребра $(4, 5), \dots, (i-1, i)$, то мы получим $4 = 4u_1$ возможностей, произвольным образом обращаясь с ребрами $(2, 1)$ и $(3, 1)$.

Таким образом, число "левых" преобразований равно $4u_{2(i-2)}: 4(u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2(i-2)-3} + u_{2(i-1)-3}) = 4u_{2(i-1)-2} = u_{2(i-2)}$.

Поскольку "правые" и "левые" операции осуществляются независимо друг от друга, то для получения общего числа остовных деревьев числа таких операций необходимо перемножить, что и даст искомый результат.

Аналогичная схема рассуждений позволяет нам получить и все оставшиеся значения для величины f_{ij} в случае неориентированного графа-гусеницы.

Именно, мы получим величину $f_{12} = f_{13} = f_{21} = f_{31} = 2u_{2(n-3)+1}$, последовательно отбрасывая одно из ребер $(1, 4), (4, 5), \dots, (n-1, n)$ (или сохраняя их все); множитель 2 появляется в данном случае в силу двух возможных выборов для выделенного ребра – так, если речь идет от величине f_{12} , то мы или сохраняем, или уничтожаем ребро $(1, 3)$.

Величина $f_{1k} = f_{k1} = 4u_{2(n-k)+1}$, $k = 4, \dots, n$, может быть получена последовательным отбрасыванием одного из ребер $(k, k+1), (k+1, k+2), \dots, (n-1, n)$ (или сохранением их всех); множитель 4 появляется в данном случае в силу четырех возможных выборов для выделенных ребер $(1, 2)$ и $(1, 3)$ – мы или сохраняем, или уничтожаем эти ребра, что дает четыре варианта (оба сохранены – 1 возможность, оба уничтожены – 2 возможности, одно сохранено, другое уничтожено – 2 возможности).

Величина $f_{23} = f_{32} = u_{2(n-3)+1}$ получается по той же схеме, что и f_{12} ; множитель 2 здесь не возникает, поскольку оба выделенных ребра $(1, 2)$ и $(1, 3)$ должны быть использованы.

Величина $f_{2k} = f_{k2} = f_{3k} = f_{k3} = 2u_{2(n-k)+1}$, $k = 4, \dots, n$, может быть получена по той же схеме, что и f_{1k} ; в этом случае мы имеем дело с множителем 2, поскольку возможен тот или иной выбор лишь для одного выделенного ребра – так, если речь идет от величине f_{2k} , то мы или сохраняем, или уничтожаем ребро $(1, 3)$.

Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

5. Примеры

Рассмотрим поведение матриц $F(\vec{T}_n)$ и $F(T_n)$ относительной лесной доступности для ориентированных и неориентированных графов-гусениц на n вершинах для $n = 3, 4, 5$.

Непосредственная проверка показывает, что матрицы относительной лесной доступности для ориентированного и неориентированного графа-гусеницы на трех вершинах имеют следующий вид:

$$F(\vec{T}_3) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad F(T_3) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

В этом случае ориентированный граф-гусеница представляет собой дерево на трех вершинах 2, 1, 3 с двумя дугами $\langle 2, 1 \rangle$ и $\langle 3, 1 \rangle$, в то время как неориентированный граф-гусеница является простым путем на трех вершинах 2, 1, 3.

Пользуясь доказанными выше теоремами, нетрудно убедиться в том, что матрицы относительной лесной доступности для ориентированного и неориентированного графа-гусеницы

на четырех вершинах имеют следующий вид:

$$F(\vec{T}_4) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad F(T_4) = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 12 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix}.$$

В этом случае ориентированный граф-гусеница представляет собой ориентированное дерево на четырех вершинах 1, 2, 3, 4 с тремя дугами $\langle 2, 1 \rangle$, $\langle 3, 1 \rangle$ и $\langle 4, 1 \rangle$, "направленными" в вершину 1. Неориентированный граф-гусеница представляет собой звезду на четырех вершинах 1, 2, 3, 4 с центром 1.

Матрицы относительной лесной доступности для ориентированного и неориентированного графа-гусеницы на пяти вершинах имеют следующий вид:

$$F(\vec{T}_5) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad F(T_5) = \frac{1}{52} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

6. Заключение

В статье представлены материалы, связанные с перечислением некоторых типов остовных деревьев и лесов в простейших ориентированных и неориентированных графах: графе-гусенице, простом пути и простом цикле. Выбор перечисляемых объектов обусловлен их значимостью для построения обобщенных метрических конструкций, используемых при анализе стохастических дискретных процессов. Представленные в статье материалы являются естественным продолжением исследований авторов в этой области; их описание можно найти, например, в [3, 4].

В качестве перспективного направления дальнейших исследований можно отметить вопросы изучения структуры и количества остовных лесов для более общих типов ориентированных и неориентированных графов, например, дерева общего вида, колеса, графа Петерсона и др. Представляет интерес и задача построения конусов и многогранников рассматриваемых обобщенных метрических структур, заданных на малом числе точек; ее можно реализовать в рамках классической схемы (см., например, [2], [13], [14], [15], [16]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978.
2. Деза М.М., Деза Е.И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2. С. 79 – 92.
3. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметриков // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.
4. Деза Е.И., Мханна Б. Квазиметрики на графах // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, выпуск 2 (78). С. 48 – 75.
5. Деза Е.И., Мханна Б. Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, выпуск 3 (79). С. 77 – 99.

6. Потапов В.Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностных источников. - Новосибирск: НГУ, 1999.
7. Харари Ф. Теория графов. - М.: УРСС, 2003.
8. Chebotarev P. Spanning forest and the Golden ratio // *Discrete Applied Mathematics*. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.
9. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics / in F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, *Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013)* // *Lecture Notes in Computer Science*. 2013. LNCS 8085. P. 207–214.
10. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // *Linear Algebra and its Applications*. 2002. Vol. 356. P. 253–274.
11. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // *Optimization Letters*. 2020. Vol. 14. P. 291–307. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2>
12. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // *Automation and Remote Control*. 1998. Vol. 59. P. 1443–1459.
13. Deza E., Deza M., Dutour Sikirić *Generalizations of Finite Metrics and Cuts*. - World Scientific, 2016.
14. Deza M., Deza E. Cones of partial metrics // *Contributions to Discrete Mathematics*. 2011. Vol. 6. P. 26–47.
15. Deza M. M., Deza E. *Encyclopedia of Distances*. - Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.
16. Deza M., Deza E., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics / in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010* // *Advances in Algebraic Structures*. 2012. P. 177–197.
17. Kirkland S.J., Neumann M. *Group inverses of M-matrices and their applications*. - CRC Press, 2012.
18. Leighton T., Rivest R.L. The Markov chain tree theorem // *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249*, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass. 1983.
19. Meyer Jr., C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // *SIAM Review*. 1975. Vol. 17. P. 443–464.

REFERENCES

1. Vorobev, N.N. 1978, "Fibonacci numbers", *M.: Nauka*.
2. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79 – 92.
3. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.
4. Deza, E., Mhanna, B. "Quasi-metrics on graphs", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22 (1), P. 48 – 75.
5. Deza, E., Mhanna, B. "Question of enumeration of spanning forests of some graphs", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22 (3), P. 77 – 99.

6. Potapov, V.N. 1999, "Information Theory. Coding of discrete probabilistic sources", *Novosibirsk: NSU center*.
7. Harari, F. 2003, "Graph Theory", *M.: URSS*.
8. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forest and the Golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, P. 813 – 821.
9. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", in *F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013), Lecture Notes in Computer Science*, LNCS 8085, P. 207–214.
10. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253–274.
11. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291–307. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2>
12. Chebotarev, P.Y., Shamis E.V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443–1459.
13. Deza, E., Deza, M., Dutour Sikirić, M. 2016, "Generalizations of Finite Metrics and Cuts", *World Scientific*.
14. Deza, M., Deza, E. 2011, "Cones of partial metrics", *Contributions to Discrete Mathematics*, Vol. 6, P. 26–47.
15. Deza, M. M., Deza, E. 2016, "Encyclopedia of Distances", *Springer, Berlin - Heidelberg*.
16. Deza, M., Deza, E., Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, P. 177–197.
17. Kirkland, S. J., Neumann, M. 2012, "Group inverses of M-matrices and their applications", *CRC Press*.
18. Leighton, T., Rivest, R.L. 1983, "The Markov chain tree theorem", *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass.*
19. Meyer, Jr., C. D. 1975, "The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains", *SIAM Review*, Vol. 17, P. 443–464.

Получено 13.07.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.