

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 511.4

ПЛОХО ПРИБЛИЖАЕМЫЕ МАТРИЦЫ И ДИОФАНТОВЫ ЭКСПОНЕНТЫ¹

О. Н. Герман (г. Москва)

Аннотация

Данная статья представляет собой обзор результатов о разного рода диофантовых экспонентах. Особое внимание уделяется принципу переноса и обобщению понятия плохо приближаемых чисел на матрицы и решетки.

Ключевые слова: Диофантовы экспоненты, принцип переноса, плохо приближаемые матрицы, многомерные цепные дроби, полиэдры Клейна, двойственные решетки.

BADLY APPROXIMABLE MATRICES AND DIOPHANTINE EXPONENTS

O. N. German (с. Moscow)

Abstract

This paper is a survey of results concerning different kinds of Diophantine exponents. Special attention is paid to the transference principle and to generalization of the concept of badly approximable numbers to matrices and lattices.

Keywords: Diophantine exponents, transference principle, badly approximable matrices, multidimensional continued fractions, Klein polyhedra, dual lattices.

¹ Данное исследование было частично поддержано грантом Президента РФ № МК–5016.2012.1, грантами РФФИ № 12-01-00681, 12-01-31106, 12-01-33080, а также фондом «Ди-настия»

1. Введение

Если задана функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, то говорят, что число $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является f -приближаемым, если существует бесконечно много рациональных чисел p/q , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \leq f(q).$$

Соответственно, диофантовой экспонентой $\beta(\theta)$ числа θ называется точная верхняя грань множества чисел γ , таких что θ является $q^{-1-\gamma}$ -приближаемым. Из принципа Дирихле легко вывести, что любое иррациональное число является q^{-2} -приближаемым. Если же существует такое $c > 0$, что θ не является cq^{-2} -приближаемым, то говорят, что θ плохо приближаемо. Хорошо известно, что иррациональное число является плохо приближаемым тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь имеет ограниченные неполные частные.

В данной работе мы предложим обзор существующих результатов о многомерных обобщениях приведенных выше понятий — диофантовых экспонент, плохо приближаемости, цепных дробей. Можно выделить два классических направления подобных обобщений: в первом в качестве инструмента измерения отклонения используется $\sup$ -норма (или ей эквивалентные), а во втором — произведение координат. Так возникают понятия регулярных и равномерных диофантовых экспонент матриц, их мультипликативные аналоги, понятия плохо приближаемых матриц и решеток с положительным норменным минимумом. Важную роль в этой науке играют так называемые теоремы переноса — утверждения, связывающие аппроксимационные свойства матрицы Θ и транспонированной матрицы Θ^T .

Первые многомерные определения интересующих нас объектов были, по-видимому, даны Г. Минковским, Г. Ф. Вороным и Ф. Клейном. Ими же были заложены основания геометрии чисел, методы которой и позволили получить большинство из существующих на данный момент результатов теории многомерных линейных диофантовых приближений. Первые результаты о диофантовых экспонентах были получены в 20-х годах прошлого века А. Я. Хинчиным и В. Ярником. Эти результаты впоследствии улучшались и обобщались К. Малером, Ф. Дайсоном, А. Апфельбеком, а в последние годы — М. Лораном, Я. Бюжо, Д. Руа, Н. Г. Мощевитиным, автором данного обзора, а также классиком теории диофантовых приближений В. М. Шмидтом.

Многие важные результаты были получены совсем недавно, в частности, такое простое и естественное утверждение, что матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема Θ^T . А ведь последний вопрос, несомненно, важен, поскольку гипотеза Литтлвуда в точности утверждает, что не существует мультипликативно плохо приближаемых двумерных векторов.

В связи с гипотезой Литтлвуда также естественным образом возникают решетки с положительным норменным минимумом, поскольку эта гипотеза следует из трехмерной гипотезы Оппенгейма о произведении линейных форм, которая утверждает, что положительными норменными минимумами обладают только алгебраические решетки. Как оказалось, для изучения решеток с положительными норменными минимумами весьма полезны так называемые полиэдры Клейна — одно из наиболее естественных многомерных обобщений понятия цепной дроби. Положительность норменного минимума решетки обобщает на многомерный случай свойство числа быть плохо приближаемым. А как было сказано выше, иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены. Соответственно, естественно ожидать, что свойство решетки иметь положительный норменный минимум должно быть связано с каким-нибудь свойством многомерной цепной дроби. Кроме того, в 80-х годах прошлого века В. И. Арнольд предложил использовать полиэдры Клейна для исследования алгебраических решеток и выдвинул ряд гипотез об этой конструкции, в том числе вопрос о многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей. Так возникает вопрос о переформулировке гипотезы Оппенгейма для линейных форм в терминах свойств полиэдров Клейна, то есть о том, как связать посредством этих свойств алгебраичность решетки и положительность ее норменного минимума.

Обо всем этом и о многом другом пойдет речь в данном обзоре. Некоторые аспекты, не упоминаемые здесь, можно найти в замечательных недавних обзорах Вальдшмидта [49] и Мощевитина [38].

2. Некоторые определения

Пусть задана матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}, \quad \theta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad n + m \geq 3,$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Theta \mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{1}$$

с переменными $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Одна из классических задач теории диофантовых приближений — оценка того, насколько хорошо можно приблизиться к пространству решений этой системы по ненулевым целочисленным точкам. Соответственно, возникает вопрос о том, каким образом измерять величину отклонения. Существуют два классических способа: при помощи $\sup$ -нормы и при помощи произведения координат.

Будем обозначать через $|\cdot|_\infty$ sup-норму. И кроме того, для каждого вектора $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ положим

$$\Pi(\mathbf{z}) = \left(\prod_{1 \leq i \leq k} |z_i| \right)^{1/k} \quad \text{и} \quad \Pi'(\mathbf{z}) = \left(\prod_{1 \leq i \leq k} \max(1, |z_i|) \right)^{1/k}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Супремум вещественных чисел γ , для которых существует бесконечно много таких $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что*

$$|\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leq |\mathbf{x}|_\infty^{-\gamma} \quad (2)$$

называется (регулярной) диофантовой экспонентой матрицы Θ и обозначается $\beta(\Theta)$.

Из определения 1 и теоремы Минковского о выпуклом теле сразу следует, что $\beta(\Theta) \geq m/n$. Предельное значение m/n тесно связано со свойством матрицы быть плохо приближаемой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Матрица Θ называется плохо приближаемой, если*

$$\inf_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} |\mathbf{x}|_\infty^m |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty^n > 0.$$

Сформулируем мультипликативный аналог определения 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Супремум вещественных чисел γ , для которых существует бесконечно много таких $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что*

$$\Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma}, \quad (3)$$

называется мультипликативной диофантовой экспонентой матрицы Θ и обозначается $\beta_M(\Theta)$.

Обычные и мультипликативные экспоненты связаны неравенствами

$$m/n \leq \beta(\Theta) \leq \beta_M(\Theta) \leq \begin{cases} m\beta(\Theta), & \text{если } n = 1, \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

которые следуют из того факта, что для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ справедливо

$$\Pi(\mathbf{z}) \leq |\mathbf{z}|_\infty,$$

а для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k$ справедливо

$$|\mathbf{z}|_\infty^{1/k} \leq \Pi'(\mathbf{z}) \leq |\mathbf{z}|_\infty.$$

В мультипликативной постановке неравенство $\beta_M(\Theta) \geq m/n$ также порождает понятие *мультипликативной плохо приближаемости*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Матрица Θ называется мультипликативно плохо приближаемой, если

$$\inf_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y})^n > 0.$$

Однако, если существование плохо приближаемых матриц доказывается совсем просто, то существование *мультипликативно* плохо приближаемых матриц — нерешенная проблема. Даже в самом простом случае — при $n = 2, m = 1$, существование мультипликативно плохо приближаемых матриц в точности совпадает с отрицанием гипотезы Литтлвуда (см. параграф 6).

Рассматривают также *равномерные* аналоги определений 1, 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Супремум вещественных чисел γ , для которых при любом достаточно большом t система неравенств

$$|\mathbf{x}|_\infty \leq t, \quad |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leq t^{-\gamma} \quad (5)$$

имеет ненулевое решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$, называется равномерной диофантовой экспонентой матрицы Θ и обозначается $\alpha(\Theta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Супремум вещественных чисел γ , при которых для всех достаточно больших t существуют $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, такие что

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq t, \quad \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq t^{-\gamma},$$

называется равномерной мультипликативной диофантовой экспонентой матрицы Θ и обозначается $\alpha_M(\Theta)$.

Очевидно, что $\beta(\Theta) \geq \alpha(\Theta)$ и $\beta_M(\Theta) \geq \alpha_M(\Theta)$. Кроме того, по аналогии с (4) имеют место тривиальные неравенства

$$m/n \leq \alpha(\Theta) \leq \alpha_M(\Theta) \leq \begin{cases} m\alpha(\Theta), & \text{если } n = 1, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Теоремы переноса

Будем обозначать через $\Theta^\top$ транспонированную матрицу. Рассмотрим “транспонированную” систему

$$\Theta^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad (6)$$

где, как и прежде, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Целочисленные приближения к решениям систем (1) и (6) тесно связаны, что имеет отражение в разнообразных *теоремах переноса*.

3.1. Принцип переноса и регулярные экспоненты

Для $n = 1$ имеет место классическая теорема переноса Хинчина (см. [24]):

ТЕОРЕМА 1. (Хинчин) Если $n = 1$, то

$$\frac{\beta(\Theta)}{(m-1)\beta(\Theta) + m} \leq \beta(\Theta^\top) \leq \frac{\beta(\Theta) - m + 1}{m}. \quad (7)$$

На случай произвольных n, m теорема 1 была обобщена Дайсоном [11] (более простое доказательство было впоследствии получено Хинчиным [25]):

ТЕОРЕМА 2. (Дайсон) Для всех натуральных n, m , не равных одновременно 1, справедливо неравенство

$$\beta(\Theta^\top) \geq \frac{n\beta(\Theta) + n - 1}{(m-1)\beta(\Theta) + m}. \quad (8)$$

Неравенства 7 неулучшаемы (см. [21] и [22]), если ограничиваться рассмотрением величин $\beta(\Theta)$ и $\beta(\Theta^\top)$. Но если привлечь $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\top)$, можно доказать нечто более сильное. Соответствующий результат для $n = 1$ принадлежит Лорану и Бюжо (см. [33], [8]). Они доказали следующее.

ТЕОРЕМА 3. (Лоран, Бюжо) Если $n = 1, m \geq 2$, а компоненты Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то

$$\begin{aligned} \beta(\Theta^\top) &\geq \frac{(\alpha(\Theta) - 1)\beta(\Theta)}{((m-2)\alpha(\Theta) + 1)\beta(\Theta) + (m-1)\alpha(\Theta)}, \\ \beta(\Theta^\top) &\leq \frac{(1 - \alpha(\Theta^\top))\beta(\Theta) - m + 2 - \alpha(\Theta^\top)}{m-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко убедиться при помощи неравенств $\alpha(\Theta) \geq m$ и $\alpha(\Theta^\top) \geq 1/m$, справедливых в случае $n = 1$, что теорема 3 уточняет теорему 1.

Автором в работе [18] была доказана следующая теорема, обобщающая теорему 3 и уточняющая теорему 2.

ТЕОРЕМА 4. (О.Г.) Пусть пространство целочисленных решений системы (1) не одномерно. Тогда для всех натуральных n, m , не равных одновременно 1, справедливы три неравенства

$$\beta(\Theta^\top) \geq \frac{n\beta(\Theta) + n - 1}{(m-1)\beta(\Theta) + m}, \quad (10)$$

$$\beta(\Theta^\top) \geq \frac{(n-1)(1 + \beta(\Theta)) - (1 - \alpha(\Theta))}{(m-1)(1 + \beta(\Theta)) + (1 - \alpha(\Theta))}, \quad (11)$$

$$\beta(\Theta^\top) \geq \frac{(n-1)(1 + \beta(\Theta)^{-1}) - (\alpha(\Theta)^{-1} - 1)}{(m-1)(1 + \beta(\Theta)^{-1}) + (\alpha(\Theta)^{-1} - 1)}. \quad (12)$$

3.2. Принцип переноса и регулярные экспоненты

Для равномерных экспонент $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\top)$ Ярник [23] доказал следующее замечательное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. (Ярник) *Если $n = 1$, $m = 2$, а элементы Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то*

$$\alpha(\Theta)^{-1} + \alpha(\Theta^\top) = 1. \quad (13)$$

Ярник [23] заметил, что при $n = 1$, $m > 2$, $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\top)$ более не связаны никаким равенством, по крайней мере, он показал, что в краевом случае $\alpha(\Theta) = \infty$ величина $\alpha(\Theta^\top)$ может равняться любому числу из интервала $[(m-1)^{-1}, 1]$. Однако, он доказал, что при $n = 1$ экспоненты $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\top)$ удовлетворяют некоторым неравенствам.

ТЕОРЕМА 6. (Ярник) *Если $m \geq 3$, а элементы Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то справедливы следующие утверждения:*

(i)

$$\frac{\alpha(\Theta)}{(m-1)\alpha(\Theta) + m} \leq \alpha(\Theta^\top) \leq \frac{\alpha(\Theta) - m + 1}{m}; \quad (14)$$

(ii) *если $\alpha(\Theta) > m(2m-3)$, то*

$$\alpha(\Theta^\top) \geq \frac{1}{m-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha(\Theta) - 2m + 4} \right);$$

(iii) *если $\alpha(\Theta) > (m-1)/m$, то*

$$\alpha(\Theta^\top) \geq m - 2 + \frac{1}{1 - \alpha(\Theta)}.$$

Теорема 6 была впоследствии обобщена Апфельбеком [1] на случай произвольных n , m .

ТЕОРЕМА 7. (Апфельбек)

(i) *Всегда справедливы неравенства*

$$\alpha(\Theta^\top) \geq \frac{n\alpha(\Theta) + n - 1}{(m-1)\alpha(\Theta) + m}. \quad (15)$$

(ii) *Если $m > 1$ and $\alpha(\Theta) > (2(m+n-1)(m+n-3) + m)/n$, то*

$$\alpha(\Theta^\top) \geq \frac{1}{m} \left(n + \frac{n(n\alpha(\Theta) - m) - 2n(m+n-3)}{(m-1)(n\alpha(\Theta) - m) + m - (m-2)(m+n-3)} \right).$$

Автором в работе [18] была доказана следующая теорема, которая улучшает теоремы 6 и 7.

ТЕОРЕМА 8. (О.Г.) Для всех натуральных n, m , не равных одновременно 1, справедливы неравенства

$$\alpha(\Theta^\Gamma) \geq \begin{cases} \frac{n-1}{m-\alpha(\Theta)}, & \text{при } \alpha(\Theta) \leq 1, \\ \frac{n-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, & \text{при } \alpha(\Theta) \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

4. Теорема переноса Малера

Большинство теорем, приведенных в предыдущем параграфе, существенно используют явление, лучше всего описываемое следующим классическим результатом, принадлежащим Малеру (см. [35], [36], [9]).

ТЕОРЕМА 9. (Малер) Если $0 < U < 1 < X$ и неравенства

$$0 < |\mathbf{x}|_\infty \leq X, \quad |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leq U, \quad (17)$$

разрешимы относительно $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, то разрешимы относительно $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ и неравенства

$$0 < |\mathbf{y}|_\infty \leq Y, \quad |\Theta^\Gamma \mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leq V, \quad (18)$$

где

$$Y = (d-1)(X^m U^{1-m})^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = (d-1)(X^{1-n} U^n)^{\frac{1}{d-1}}, \quad \text{и} \quad d = n + m. \quad (19)$$

Отметим, что если определить числа β_1 и β_2 равенствами $U = X^{-\beta_1}$, $V = Y^{-\beta_2}$, то из (19) мы получим, что

$$\beta_2 = \frac{n\beta_1 + (n-1) - \varkappa}{(m-1)\beta_1 + m + \varkappa}, \quad \text{где } \varkappa = \frac{(d-1) \ln(d-1)}{\ln X},$$

откуда очевидным образом следует теорема 2.

Автору в работе [18] удалось усилить теорему 9. А именно, коэффициент $d-1$ удалось заменить меньшей величиной, которая стремится к единице при $d \rightarrow \infty$. Чтобы определить эту величину, обозначим через $\mathcal{B}_\infty^d$ единичный шар в суп-норме в пространстве $\mathbb{R}^d$, то есть куб

$$\left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq 1, \ i = 1, \dots, d \right\},$$

и положим

$$\Delta_d = \frac{1}{2^{d-1} \sqrt{d}} \text{vol}_{d-1} \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_\infty^d \mid \sum_{i=1}^d x_i = 0 \right\}, \quad (20)$$

где $\text{vol}_{d-1}(\cdot)$ обозначает $(d-1)$ -мерную меру Лебега.

ТЕОРЕМА 10. (О.Г.) Если $0 < U < 1 < X$ и неравенства

$$0 < |\mathbf{x}|_\infty \leq X, \quad |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leq U, \quad (21)$$

разрешимы относительно $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, то разрешимы относительно $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ и неравенства

$$0 < |\mathbf{y}|_\infty \leq Y, \quad |\Theta^\top \mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leq V, \quad (22)$$

где

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (X^m U^{1-m})^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (X^{1-n} U^n)^{\frac{1}{d-1}}. \quad (23)$$

Из теорем Ваалера и Болла (см. [48], [5]) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Объем каждого $(d-1)$ -мерного центрального сечения куба $\mathcal{B}_\infty^d$ ограничен снизу и сверху величинами 2^{d-1} и $2^{d-1}\sqrt{2}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедливы неравенства $\sqrt{d/2} \leq \Delta_d^{-1} \leq \sqrt{d}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $d \geq 3$ справедливо неравенство $\Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} < d-1$. Кроме того,

$$\Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad d \rightarrow \infty.$$

В мультипликативной постановке тоже существует аналог теоремы 9. Следующий ее вариант был получен в работе [17]. Он обладает довольно неожиданным отличием, которое некоторым образом смешивает задачи обыкновенных и мультипликативных приближений и тем самым позволяет доказать неравенства, связывающие обыкновенные и мультипликативные экспоненты в случае, когда либо n , либо m равно единице.

ТЕОРЕМА 11. (О.Г.) Если $0 < U < 1 \leq X$ и для $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ справедливы неравенства

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq X, \quad \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq U, \quad (24)$$

то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, что

$$\Pi'(\mathbf{y}) \leq Y, \quad \Pi(\Theta^\top \mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq V, \quad (25)$$

$$|\Theta^\top \mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leq \Delta_d V^m Y^n, \quad (26)$$

где

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (X^m U^{1-m})^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (X^{1-n} U^n)^{\frac{1}{d-1}}, \quad (27)$$

и $d = n + m$.

5. Следствия из мультипликативной теоремы переноса

В данном параграфе мы приведем ряд следствий из теоремы 11, полученных автором в работе [17]. Первое из них представляется наиболее важным по следующей причине.

Хорошо известно (см. теорему VIII в книге [9], что матрица Θ плохо приближаема тогда и только тогда, когда плохо приближаема матрица $\Theta^\top$. Что же до мультипликативного аналога данного утверждения, в течение долгого времени единственным доказанным фактом являлся результат Касселса и Суиннертона–Дайера [10], заключающийся в том, что если $n = 2$, $m = 1$ и матрица Θ мультипликативно плохо приближаема, то мультипликативно плохо приближаема и матрица $\Theta^\top$. Как мы уже говорили, существование мультипликативно плохо приближаемых матриц Θ при $n = 2$, $m = 1$ в точности совпадает с отрицанием гипотезы Литтлвуда, так что случай $n + m = 3$ представляется наиболее интересным. Однако даже в этом случае упомянутый выше результат Касселса и Суиннертона–Дайера является импликацией только в одну сторону.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема матрица $\Theta^\top$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 11 следует, что если неравенство

$$\Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y})^n \leq C,$$

где $C < 1$, имеет решение $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, что

$$\Pi'(\mathbf{y})^n \Pi(\Theta^\top \mathbf{y} - \mathbf{x})^m \leq \Delta_d^{-\frac{d}{d-1}} C^{\frac{1}{d-1}}.$$

Отсюда, полагая

$$\mu_1 = \inf_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y})^n$$

и

$$\mu_2 = \inf_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{y})^n \Pi(\Theta^\top \mathbf{y} - \mathbf{x})^m,$$

получаем неравенства

$$\Delta_d^d \mu_2^{d-1} \leq \mu_1 \leq \Delta_d^{-\frac{d}{d-1}} \mu_2^{\frac{1}{d-1}}.$$

В частности, $\mu_1 > 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_2 > 0$. $\square$

Напомним, что обычные и мультипликативные экспоненты связаны тривиальными неравенствами

$$\beta(\Theta) \leq \beta_M(\Theta) \leq \begin{cases} m\beta(\Theta), & \text{если } n = 1, \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (28)$$

$$\beta_M(\Theta) \geq \beta(\Theta) \geq m/n, \quad \beta_M(\Theta^\Gamma) \geq \beta(\Theta^\Gamma) \geq n/m. \quad (29)$$

Что же касается нетривиальных соотношений для $\beta_M(\Theta)$ и $\beta_M(\Theta^\Gamma)$, то долгое время было известно крайне мало. Шмидт и Ванг [44] доказали в 1979-м году, что

$$\beta_M(\Theta) = m/n \iff \beta_M(\Theta^\Gamma) = n/m, \quad (30)$$

так же как и в случае обыкновенных диофантовых экспонент. Позже, в 1981-м году, Ванг и Ю [50] доказали, что оба равенства в (30) верны для почти всех Θ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^{nm}$.

Теорема 11 позволяет получить множество соотношений для мультипликативных экспонент.

СЛЕДСТВИЕ 4.

$$\beta_M(\Theta^\Gamma) \geq \frac{n\beta_M(\Theta) + n - 1}{(m - 1)\beta_M(\Theta) + m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ — положительное вещественное число, $\gamma < \beta_M(\Theta)$. По условию существует бесконечно много пар $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, таких что

$$\Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma}. \quad (31)$$

Если бесконечно много таких пар имеют одинаковую $\mathbf{x}$ -компоненту, то для такого $\mathbf{x}$ вектор $\Theta\mathbf{x}$ обязан иметь хотя бы одну целую компоненту. Но тогда все пары, целочисленно кратные рассматриваемым, удовлетворяют (3). Следовательно, можно рассмотреть последовательность пар $\mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$, таких что

$$\Pi'(\mathbf{x}_i) = t_i > 1, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) \leq t_i^{-\gamma}, \quad t_i \rightarrow \infty \text{ as } i \rightarrow \infty.$$

Применяя теорему 11, получаем последовательность пар $\mathbf{x}'_i \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}'_i \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, таких что

$$\Pi'(\mathbf{y}'_i) \leq \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t_i^{\frac{(m-1)\gamma+m}{d-1}}, \quad \Pi(\Theta^\Gamma \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i) \leq \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t_i^{-\frac{n\gamma+(n-1)}{d-1}}. \quad (32)$$

Стало быть, для каждого i

$$\Pi(\Theta^\Gamma \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i) \leq \Pi'(\mathbf{y}'_i)^{-\gamma_i}, \quad (33)$$

где

$$\gamma_i = \frac{n\gamma + (n - 1) + \varkappa_i}{(m - 1)\gamma + m - \varkappa_i}, \quad \varkappa_i = \frac{\ln \Delta_d}{\ln t_i}.$$

Если пары $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ совпадают для бесконечного числа значений индекса i , то для таких повторяющихся пар вектор $\Theta^\Gamma \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i$ обязан иметь нулевую компоненту, так как правая часть второго неравенства (32) стремится к нулю при i стремящемся к бесконечности. Но тогда верно неравенство (33) с парой $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$, замененной на любую пару, целочисленно кратную $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$. Стало быть, можно

считать, что среди пар $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ бесконечно много различных. Откуда немедленно следует, что

$$\beta_M(\Theta^\top) \geq \sup_{\gamma < \beta_M(\Theta)} \limsup_{i \in \mathbb{Z}_+} \gamma_i = \frac{n\beta_M(\Theta) + (n-1)}{(m-1)\beta_M(\Theta) + m}.$$

□

Заметим, что в доказательстве следствия 4 мы вообще не пользовались неравенством (26). Но при $n = 1$ неравенство $\Pi'(\mathbf{y}) \leq Y$ для ненулевого целого $\mathbf{y}$ означает в точности, что $|\mathbf{y}| \leq Y$, что в совокупности с неравенством (26) дает некоторую информацию об обыкновенных диофантовых приближениях для матрицы $\Theta^\top$. А именно, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $n = 1$, то

$$\beta(\Theta^\top) \geq \frac{\beta_M(\Theta) - m}{(m-1)\beta_M(\Theta) + m}. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ — как в доказательстве следствия 3. Точно так же, как и там, можно получить последовательность пар $\mathbf{x}'_i \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}'_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, таких что

$$|\mathbf{y}'_i| \leq \Delta_d^{-\frac{1}{m}} t_i^{\frac{(m-1)\gamma+m}{m}}, \quad |\Theta^\top \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i|_\infty \leq \Delta_d^{-\frac{1}{m}} t_i^{\frac{m-\gamma}{m}},$$

где $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда для каждого i будем иметь

$$|\Theta^\top \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i|_\infty \leq |\mathbf{y}'_i|^{-\gamma_i},$$

где теперь

$$\gamma_i = \frac{\gamma - m + \kappa_i}{(m-1)\gamma + m - \kappa_i}, \quad \kappa_i = \frac{\ln \Delta_d}{\ln t_i}.$$

Стало быть,

$$\beta(\Theta^\top) \geq \sup_{\gamma < \beta_M(\Theta)} \limsup_{i \in \mathbb{Z}_+} \gamma_i = \frac{\beta_M(\Theta) - m}{(m-1)\beta_M(\Theta) + m}.$$

□

Неравенство (34) сильнее тривиальной оценки $\beta(\Theta^\top) \geq 1/m$ при $\beta_M(\Theta) > m + m^2$ и сильнее неравенства Хинчина

$$\beta(\Theta^\top) \geq \frac{\beta(\Theta)}{(m-1)\beta(\Theta) + m}$$

при $\beta_M(\Theta) > m\beta(\Theta) + m$.

Из следствий 4 и 5 получаем

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $m = 1$, то

$$\beta_M(\Theta) \geq \beta(\Theta) \geq \frac{n\beta_M(\Theta) - 1}{n(n-1)\beta_M(\Theta) + n^2 - n + 1}. \quad (35)$$

Неравенство (35) сильнее тривиальной оценки $\beta(\Theta) \geq 1/n$ при $\beta_M(\Theta) > n + 1/n$.

Нет никаких оснований полагать, что неравенства (34) или (35) нельзя улучшить. Например, последнее получено “двойным переносом”, то есть переходом к двойственному пространству и обратно. Естественно ожидать, что при таком методе должно что-то теряться. Чтобы это продемонстрировать, приведем еще одно следствие для $m = 1$, $n = 2$, то есть для случая гипотезы Литтлвуда. Будем, как обычно, обозначать через $\|\cdot\|$ расстояние до ближайшего целого.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть заданы вещественные числа α, β . Если существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что

$$q \|q\alpha\| \|q\beta\| \leq \mu,$$

то существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что

$$q \|q\alpha\| \|q\beta\| \leq (4/3)^{9/4} \mu^{1/4}, \quad (36)$$

$$\max(\|q\alpha\|, \|q\beta\|) \leq (4/3)^{5/4} \mu^{1/4}. \quad (37)$$

Как было замечено Н. Г. Мощевитиным, подобное утверждение можно доказать непосредственно при помощи теоремы Дирихле, даже с обеими константами в (36) и (37) равными 1, что лишь усиливает утверждение. Однако, неясно, можно ли улучшить показатель $1/4$ в каком-нибудь из неравенств (36), (37), или хотя бы заменить $\mu^{1/4}$ на $o(\mu^{1/4})$. Так что, если этот показатель улучшить все-таки нельзя, любопытно, что он получается даже методом “двойного переноса”.

СЛЕДСТВИЕ 8.

$$\alpha_M(\Theta^\Gamma) \geq \frac{n\alpha_M(\Theta) + n - 1}{(m - 1)\alpha_M(\Theta) + m}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ — положительное вещественное число, такое что $\gamma < \alpha_M(\Theta)$. По условию для любого достаточно большого t существует пара $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, такая что

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq t, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq t^{-\gamma}.$$

Для каждого такого t по теореме 11 найдется пара $\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}' \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, такая что

$$\Pi'(\mathbf{y}') \leq \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t^{\frac{(m-1)\gamma+m}{d-1}}, \quad \Pi(\Theta^\Gamma \mathbf{y}' - \mathbf{x}') \leq \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t^{-\frac{n\gamma+(n-1)}{d-1}}. \quad (39)$$

Положим $s = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t^{\frac{(m-1)\gamma+m}{d-1}}$ и перепишем неравенства (39) следующим образом:

$$\Pi'(\mathbf{x}') \leq s, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \leq s^{-\gamma'},$$

где

$$\gamma' = \frac{n\gamma + (n-1) + \varkappa(t)}{(m-1)\gamma + m - \varkappa(t)}, \quad \varkappa(t) = \frac{\ln \Delta_d}{\ln t}.$$

Учитывая, что s зависит от t непрерывно и что $s \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\alpha_M(\Theta^\top) \geq \sup_{\gamma < \alpha_M(\Theta)} \gamma' = \frac{n\alpha_M(\Theta) + (n-1)}{(m-1)\alpha_M(\Theta) + m}.$$

□

Модифицируя аналогичным образом доказательство следствия 5, можно без труда получить следующие утверждения.

Следствие 9. При $n = 1$

$$\alpha(\Theta^\top) \geq \frac{\alpha_M(\Theta) - m}{(m-1)\alpha_M(\Theta) + m}.$$

Следствие 10. При $m = 1$

$$\alpha_M(\Theta) \geq \alpha(\Theta) \geq \frac{n\alpha_M(\Theta) - 1}{n(n-1)\alpha_M(\Theta) + n^2 - n + 1}.$$

Естественно ожидать, что неравенство (38) можно улучшить, так как в случае обыкновенных диофантовых экспонент ситуация именно такая. К сожалению, пока неясно, верно ли утверждение, аналогичное теореме 8, для мультипликативных экспонент. Метод, которым доказывается теорема 8, не срабатывает в мультипликативном случае ввиду невыпуклости звездного тела, задаваемого неравенством $\Pi(\mathbf{x}) \leq 1$.

Неясно также, имеет ли место мультипликативный аналог замечательного соотношения

$$\alpha(\Theta)^{-1} + \alpha(\Theta^\top) = 1,$$

открытого Ярником [23] для $n = 1, m = 2$.

6. Мультипликативная плохо приближаемость и полиэдры Клейна

Наиболее известной гипотезой в мультипликативной теории диофантовых приближений, пожалуй, является гипотеза Литтлвуда. Напомним ее формулировку.

Гипотеза Литтлвуда. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} m \|m\alpha\| \|m\beta\| = 0, \quad (40)$$

где $\|\cdot\|$ означает расстояние до ближайшего целого.

Нетрудно убедиться, что отрицание равенства (40) в точности совпадает с утверждением, что матрица–столбец

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

является мультипликативно плохо приближаемой (см. определение 4).

Известно также (см. [10]), что гипотеза Литтлвуда следует из трехмерного варианта следующей гипотезы.

Гипотеза Оппенгейма. Если $d \geq 3$ и $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_d, \cdot \rangle$ — d линейно независимых линейных форм на $\mathbb{R}^d$, таких, что

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle \cdot \dots \cdot \langle \mathbf{L}_d, \mathbf{x} \rangle| > 0, \quad (41)$$

то решетка $\{(\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_d, \mathbf{x} \rangle) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\}$ — алгебраическая (то есть, подобна по модулю действия диагональных матриц $d \times d$ решетке полного модуля чисто вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$ степени d).

Заметим, что обращение гипотезы Оппенгейма является простым следствием теоремы Дирихле об алгебраических единицах (см. [7], [47]).

В работах [45] и [46] была предпринята попытка доказать гипотезу Оппенгейма, однако несмотря на замечательные идеи, содержащиеся в указанных статьях, в рассуждении имеется весьма существенный пробел. По этой причине обе гипотезы остаются недоказанными. В параграфе 6.6 мы опишем, в чем заключается этот пробел.

6.1. Геометрия цепных дробей.

Плохо приближаемые матрицы и системы линейных форм, удовлетворяющие условию (41), суть разные, но одинаково естественные многомерные обобщения плохо приближаемых чисел. Напомним, что число α называется *плохо приближаемым*, если существует такая константа $c > 0$, что

$$|q\alpha - p| \geq \frac{c}{q} \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (42)$$

Общеизвестно, что иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены. Это утверждение — проявление тесной связи строения цепной дроби числа с тем, насколько хорошо его можно приблизить рациональными. Но в гипотезе Оппенгейма речь идет о существенно многомерном понятии плохо приближаемости. Тут мы сталкиваемся с давней задачей о том, как обобщить на многомерный случай понятие цепной дроби. Оказывается, для обобщения, предложенного более ста лет назад Ф. Клейном

[26], можно доказать ряд нетривиальных утверждений, помогающих, в частности, по-новому взглянуть на гипотезу Оппенгейма и явление плохо приближаемости.

Так, к примеру, два различных числа α и β являются плохо приближаемыми тогда и только тогда, когда решетка

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \left\{ (\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle, \langle \beta, \mathbf{x} \rangle) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \right\},$$

где $\alpha = (-1, \alpha)$, $\beta = (-1, \beta)$, имеет положительный норменный минимум.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Норменным минимумом d -мерной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ называется величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{0\}} |\varphi(\mathbf{x})|,$$

где $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 \dots x_d$ — произведение координат точки $\mathbf{x}$.

Выпуклая оболочка ненулевых точек решетки $\Lambda_{\alpha,\beta}$ с неотрицательными координатами называется *полигоном Клейна*. Комбинаторную структуру границы этого полигона Клейна описывают неполные частные чисел α и β . А именно, целочисленные длины ребер полигона Клейна и целочисленные углы между парами его смежных ребер равны соответствующим неполным частным чисел α и β . *Целочисленной длиной* отрезка с концами в точках решетки называется количество точек решетки, лежащих во внутренности отрезка, плюс один. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется площадь параллелограмма, натянутого на них, деленная на произведение их целочисленных длин, или иными словами, индекс подрешетки, порожденной примитивными векторами решетки, параллельными этим двум отрезкам.

Стало быть, общеизвестное утверждение о том, что *иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены*, можно переформулировать геометрически:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Следующие два утверждения эквивалентны.

- (1) Решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ имеет положительный норменный минимум.
- (2) Целочисленные длины ребер и целочисленные углы между соседними ребрами полигона Клейна решетки Λ равномерно ограничены.

В этих терминах можно переформулировать и теорему Лагранжа о цепных дробях, которая утверждает, что *число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь периодически, начиная с какого-то момента*:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Следующие два утверждения эквивалентны.

- (1) Вещественные числа α и β суть сопряженные квадратичные иррациональности.
- (2) Комбинаторная структура границы полигона Клейна решетки $\Lambda_{\alpha,\beta}$, оснащенная целочисленными длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами, периодична.

Отметим, что предложение 3 можно переформулировать, применив к решетке $\Lambda_{\alpha,\beta}$ подходящее линейное преобразование, отображающее ее на решетку $\mathbb{Z}^2$. Соответственно, тогда полигоном Клейна нужно будет назвать и выпуклую оболочку ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих в конусе с вершиной в точке начала координат. Получим следующее утверждение (см. [28]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Следующие два условия эквивалентны.*

(1) *Конус $\mathcal{C}$ инвариантен относительно действия некоторого оператора из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ с различными действительными положительными собственными значениями.*

(2) *Комбинаторная структура границы полигона Клейна, соответствующего конусу $\mathcal{C}$, оснащенная целочисленными длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами, периодична.*

6.2. Многомерное обобщение.

Многомерное обобщение полигонов Клейна было предложено более века назад Ф. Клейном (см. [26]). Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная d -мерная решетка с определителем 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Выпуклые оболочки ненулевых точек d -мерной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, содержащихся в каждом ортанте, называются полиэдрами Клейна решетки Λ .*

И соответствующее “двойственное” определение, когда фиксирована решетка и варьируется конус:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. *Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ — d -мерный симплицеальный конус с вершиной в начале координат. Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^d$, содержащихся в $\mathcal{C}$, называется полиэдром Клейна, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^d$ и конусу $\mathcal{C}$.*

Если решетка Λ иррациональна, то есть не имеет в координатных плоскостях ненулевых точек, или, иначе, если иррационален конус $\mathcal{C}$, то есть $\mathcal{C}$ не имеет в плоскостях своих граней ненулевых целых точек, то, как показал Муссафир в работе [39], полиэдр Клейна K является обобщенным многогранником, то есть множеством, которое в пересечении с любым многогранником дает многогранник. В этом случае граница K является $(d - 1)$ -мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{d-1}$ и состоящей из выпуклых $(d - 1)$ -мерных (обобщенных) многогранников, такой что каждая точка этой поверхности принадлежит не более, чем конечному числу таких многогранников. Некоторые из граней K могут оказаться неограниченными, но только в том случае (см. [13]), когда решетка, двойственная Λ , не является иррациональной (соотв. конус, двойственный к $\mathcal{C}$, не является иррациональным).

Тогда имеет смысл следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Граница Π полиэдра Клейна K называется парусом.*

6.3. Многомерное обобщение предложения 2.

Ввиду соответствия между неполными частными и целочисленными длинами и углами, описанного выше, в d -мерном случае естественно ожидать, что $(d-1)$ -мерные грани паруса (мы будем называть их *гипергранями*) и реберные звезды при вершинах паруса будут играть роль неполных частных. В качестве численной характеристики таких многомерных “неполных частных” мы будем рассматривать их “детерминанты”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть F — произвольная гипергрань паруса Π и пусть $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ — вершины F . Детерминантом гиперграней F будем называть величину

$$\det F = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq k} |\det(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_d})|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть вершина $\mathbf{v}$ паруса Π инцидентна k ребрам. Пусть $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ — примитивные вектора решетки Λ , параллельные этим ребрам. Детерминантом реберной звезды $\text{St}_{\mathbf{v}}$ вершины $\mathbf{v}$ будем называть величину

$$\det \text{St}_{\mathbf{v}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq k} |\det(\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_d})|.$$

Ясно, что при $d = 2$, то есть когда парус одномерен, детерминанты ребер паруса равны их целочисленным длинам, а детерминанты реберных звезд вершин равны целочисленным углам между соответствующими ребрами.

Заметим, что можно дать эквивалентное определение детерминантов гиперграней и реберных звезд в терминах суммы Минковского и смешанного объема. Напомним (см. [6], [20], [34], [12]), что *суммой Минковского* отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{x}_1], \dots, [\mathbf{0}, \mathbf{x}_m]$ (нам понадобится только этот, самый простой, случай) называется множество

$$\{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_m \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\},$$

а его объем называется *смешанным объемом* отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{x}_1], \dots, [\mathbf{0}, \mathbf{x}_m]$. Следующее простое утверждение позволяет дать эквивалентное определение детерминантов гиперграней и реберных звезд:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$ смешанный объем отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{x}_1], \dots, [\mathbf{0}, \mathbf{x}_d]$ равен

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq m} |\det(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d})|.$$

Несколько лет назад В. И. Арнольд поставил вопрос (см. [4], [3]), какие локальные аффинные инварианты паруса однозначно определяют решетку. В своей изначальной, самой сильной, формулировке данный вопрос остается открытым. Однако в работах [13, 14, 15] автором была найдена связь между детерминантами граней и реберных звезд паруса и положительностью норменного

минимума решетки. Эта связь описывается в следующей теореме, обобщающей на многомерный случай предложение 2.

ТЕОРЕМА 12. (О.Г.) Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная иррациональная d -мерная решетка. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $N(\Lambda) > 0$.
- (2) Детерминанты гиперграней всех 2^d парусов, соответствующих решетке Λ , равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей от грани).
- (3) Детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса, соответствующего решетке Λ и положительному ортанту, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей ни от грани, ни от реберной звезды).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, справедливо более сильное утверждение, чем теорема 12. А именно, если $N(\Lambda) = \mu > 0$, то существует константа D , зависящая только от d и μ , ограничивающая детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса Π . И наоборот, если детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса ограничены константой D , то существует константа μ , зависящая только от d и D , такая что $N(\Lambda) \geq \mu > 0$.

Стоит также отметить что в двумерном случае два соседних полигона Клейна имеют довольно много общего, ибо целочисленные длины ребер одного из них в точности равны целочисленным углам между смежными ребрами другого (см., например, [28]). Ввиду этого соответствия многие утверждения о цепных дробях допускают “двойственные” формулировки: с одной стороны, можно пользоваться только целочисленными длинами ребер, но тогда придется рассматривать все четыре полигона Клейна, а с другой стороны, можно пользоваться как целочисленными длинами ребер, так и целочисленными углами между смежными ребрами, и тогда можно ограничиться рассмотрением одного из полигонов Клейна. Теорема 12 представляет собой пример утверждения и полиэдрах Клейна в произвольной размерности, допускающего “двойственные” формулировки.

6.4. Многомерное обобщение предложения 3.

В. И. Арнольд также предположил, что существуют некоторые локальные аффинные инварианты паруса, периодичность которых влечет существование неединичного оператора из $SL_d(\mathbb{Z})$, оставляющего конус (а стало быть, и парус) на месте. Таким образом, это дало бы обращение очевидного факта, что полиэдр Клейна, соответствующий собственному конусу оператора из $SL_d(\mathbb{Z})$, имеет периодическую структуру. Вскоре после постановки задачи стали появляться результаты в этом направлении (см. [29], [27], [30], [2], а также [31]). Особенно интересна работа [27], в которой предложен (без доказательства) многомерный аналог утверждения 4, к сожалению, неверный. Проблема заключается в некорректном взгляде на периодичность. Но ее можно исправить следующим образом (см. также [16]).

Упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин паруса Π , такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, будем называть *цепочкой* вершин паруса Π . Рассмотрим множество $\mathcal{V}_k(\Pi)$ всех цепочек длины k вершин паруса Π . Рассмотрим граф $\mathcal{G}_k(\Pi)$, вершинами которого являются точки множества $\mathcal{V}_k(\Pi)$, а ребрами — такие пары $(V, W) \in \mathcal{V}_k(\Pi) \times \mathcal{V}_k(\Pi)$, что $V \cup W \in \mathcal{V}_{k+1}(\Pi)$. Очевидно, граф $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$ изоморфен реберному графу графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Как и в случае с вершинами паруса, упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$, такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, будем называть *цепочкой* вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Очевидно, что любой цепочке вершин $\mathcal{G}_k(\Pi)$ длины $l \geq 2$, можно естественным образом поставить в соответствие цепочку вершин $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$ длины $l - 1$. В частности, любой цепочке вершин паруса Π длины l при каждом $k \leq l$ соответствует цепочка в $\mathcal{G}_k(\Pi)$ длины $l + 1 - k$.

Рассмотрим группу целочисленных аффинных операторов $\text{Aff}_d(\mathbb{Z})$ и некоторое ее подмножество $\mathfrak{A} \subset \text{Aff}_d(\mathbb{Z})$. Определим $\mathfrak{A}$ -раскраску графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ следующим образом. Две различные вершины V и W этого графа раскрашиваем в один и тот же цвет, если существует оператор из $\mathfrak{A}$, переводящий $\bigcup_{v \in V} \text{St}_v$ в $\bigcup_{v \in W} \text{St}_v$. Отметим, что при этом мы не требуем, чтобы этот оператор сохранял порядок вершин паруса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — цепочка вершин паруса Π . Пусть любые $d - 1$ подряд идущие вершины аффинно независимы (то есть не лежат ни в какой $(d - 3)$ -мерной плоскости) и принадлежат некоторой $(d - 1)$ -мерной грани паруса. Пусть образы этой цепочки в $\mathcal{G}_d(\Pi)$ и в $\mathcal{G}_{d+1}(\Pi)$ имеют периодичные $\mathfrak{A}$ -раскраски, причем для любых двух различных операторов $A, B \in \mathfrak{A}$, “осуществляющих” раскраску, оператор AB^{-1} также принадлежит $\mathfrak{A}$. Тогда цепочку $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π будем называть $\mathfrak{A}$ -периодической.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество таких аффинных операторов A , что $A : x \mapsto A(x) + a$, $A \in SL_d(\mathbb{Z})$, $a \in \mathbb{Z}^d$, и A удовлетворяет следующим двум свойствам:

(P1) : Все собственные значения оператора A отличны от единицы.

(P2) : Если $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — собственное значение оператора A , то все остальные собственные значения, кроме комплексно-сопряженного к α , отличны по модулю от α .

ТЕОРЕМА 13. (Герман, Лакштанов) Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^d$ и иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (1) существует неединичный оператор $A \in \mathfrak{A}_0$ такой, что $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;
- (2) существует неограниченная в обе стороны (как подмножество $\mathbb{R}^d$) $\mathfrak{A}_0$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если оператор, осуществляющий сдвиг цепочки, линеен, то можно ограничиться требованием выполнения для него свойства (P2), а свойство (P1) опустить.

Обозначим через $\mathfrak{A}_1$ множество таких операторов из $\mathfrak{A}_0$, что линейная компонента каждого из них имеет попарно различные собственные значения. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14. (Герман, Лакштанов) Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^d$ и иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (1) существует гиперболический оператор $A \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ такой, что $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;
- (2) существует неограниченная в обе стороны (как подмножество $\mathbb{R}^d$) $\mathfrak{A}_1$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

Стоит отметить, что импликация (1) $\implies$ (2) в теореме 14 в силу гиперболичности оператора A следует, помимо всего прочего, еще из теоремы Дирихле об алгебраических единицах (см. [7] и [47]).

Отметим также, что в теореме 13 нельзя оставить $\mathfrak{A}_0$ и при этом добавить требование гиперболичности в пункт (1). Для четных d легко придумать такой оператор $A \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, для которого существует иррациональный инвариантный (симплициальный) конус, но при этом его характеристический многочлен равен, например, квадрату неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена с целыми коэффициентами и положительными вещественными корнями. Так, при $d = 4$ можно взять оператор с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У этого оператора есть две инвариантные иррациональные двумерные плоскости, в которых можно выбрать по два вектора так, чтобы они задавали иррациональный конус $\mathcal{C}$, инвариантный для оператора A , но не инвариантный ни для какого гиперболического целочисленного оператора.

С другой стороны, нельзя добавить требование гиперболичности в пункт (1) теоремы 13, заменив лишь (P2) на свойство операторов иметь попарно различные собственные значения. Это видно из следующего примера, любезно предоставленного Е. И. Коркиной (Павловской):

Рассмотрим квадратное уравнение $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$ с целым $p \geq 3$. Оно имеет два различных действительных иррациональных положительных корня λ_1 и λ_2 . Заменяя λ на μ^3 , получим уравнение 6-й степени: $\mu^6 - p\mu^3 + 1 = 0$. Рассмотрим расширение поля $\mathbb{Q}$ корнем этого уравнения. Это будет 6-мерное векторное пространство M над $\mathbb{Q}$ с базисом $1, \mu, \dots, \mu^5$. Рассмотрим $SL_6(\mathbb{Z})$ -оператор A , действующий на M умножением на μ . Вложим естественным образом M в $\mathbb{R}^6$ и расширим действие оператора A с образа пространства M на все $\mathbb{R}^6$.

Оператор A имеет 6 собственных значений: $\sqrt[3]{\lambda_1}, \zeta\sqrt[3]{\lambda_1}, \zeta^2\sqrt[3]{\lambda_1}$ и $\sqrt[3]{\lambda_2}, \zeta\sqrt[3]{\lambda_2}, \zeta^2\sqrt[3]{\lambda_2}$, где $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через V_i трехмерное A -инвариантное подпространство пространства $\mathbb{R}^6$, соответствующее собственным значениям $\sqrt[3]{\lambda_i}, \zeta\sqrt[3]{\lambda_i}, \zeta^2\sqrt[3]{\lambda_i}$ и рассмотрим произвольный вектор $\omega_i \in V_i$, не лежащий ни в каком 1- или 2-мерном инвариантном подпространстве оператора A . Положим $\omega_i^0 = \omega_i, \omega_i^1 = A\omega_i, \omega_i^2 = A^2\omega_i$. Вектора $\omega_1^0, \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_2^0, \omega_2^1, \omega_2^2$ очевидно, линейно независимы. Рассмотрим натянутый на них конус $\mathcal{C}$. Его 3-мерные грани, задаваемые первыми тремя и последними тремя векторами, инвариантны относительно действия оператора A , поскольку $A\omega_i^2 = A^3\omega_i^0 = \lambda_i\omega_i^0$ и $\lambda_i > 0$. Стало быть, и конус $\mathcal{C}$, и парус, ему соответствующий, инвариантны относительно действия оператора A , однако оператор A — не гиперболический. Более того, мы можем выбрать вектора ω_1 и ω_2 таким образом, чтобы они задавали трансцендентные направления, и тогда конус $\mathcal{C}$ не будет инвариантным ни для какого гиперболического целочисленного оператора.

Для $d = 3$ можно доказать несколько более сильное утверждение, чем теоремы 13 и 14, а именно, можно $\mathfrak{A}_0$ заменить на $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ и при этом оставить условие гиперболичности. При этом ясно, что для $d = 3$ и $\mathfrak{A} = \text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ технические условия определения 13 автоматически выполняются и $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -периодичность цепочки вершин означает в точности периодичность $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -раскраски образов этой цепочки в $\mathcal{G}_d(\Pi)$ и в $\mathcal{G}_{d+1}(\Pi)$.

ТЕОРЕМА 15. (Герман, Лакштанов) Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^3$ и иррациональному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (1) существует гиперболический оператор $A \in SL_3(\mathbb{Z})$ такой, что $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;
- (2) существует неограниченная в обе стороны (как подмножество $\mathbb{R}^3$) $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

6.5. Переформулировка гипотезы Оппенгейма

Теорема 12 позволяет переформулировать гипотезу Оппенгейма следующим образом.

Переформулировка гипотезы Оппенгейма. Если $d \geq 3$ и парус Π соответствует d -мерной решетке $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ таков, что детерминанты его гиперграней и реберных звезд его вершин равномерно ограничены, то решетка Λ является алгебраической.

Из теоремы Дирихле о единицах следует, что парус, соответствующий d -мерной алгебраической решетке, имеет периодическую комбинаторную структуру. Группа “периодов” изоморфна $\mathbb{Z}^{d-1}$, а соответствующая фундаментальная область ограничена. Таким образом, из гипотезы Оппенгейма вытекает следующее утверждение: если детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса равномерно ограничены, то этот парус имеет периодическую комбинаторную структуру.

Теорему 12 можно скомбинировать с теоремой 14 и получить еще одну переформулировку гипотезы Оппенгейма. Для этого переформулируем теорему 12 следующим образом.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_d, \cdot \rangle$ — d линейно независимых иррациональных линейных форм на $\mathbb{R}^d$ и

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, d \}.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle \cdot \dots \cdot \langle \mathbf{L}_d, \mathbf{x} \rangle| > 0$.
- (2) Детерминанты граней всех 2^d парусов, соответствующих решетке $\mathbb{Z}^d$ и конусу $\mathcal{C}$, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей от грани).
- (3) Детерминанты граней и детерминанты реберных звезд вершин паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^d$ и конусу $\mathcal{C}$, равномерно ограничены.

Условие (3) теоремы 16 равносильно тому, что у паруса Π конечное число различных аффинных типов полных звезд вершин (полной звездой вершины называется объединение всех граней, инцидентных этой вершине).

Комбинируя теорему 16 с теоремой 14, получаем следующую переформулировку гипотезы Оппенгейма:

Переформулировка гипотезы Оппенгейма. Пусть $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_d, \cdot \rangle$ — d линейно независимых иррациональных линейных форм на $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ и

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, d \}.$$

Пусть у паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^d$ и конусу $\mathcal{C}$, конечное число различных аффинных типов полных звезд вершин. Тогда существует неограниченная в обе стороны (как подмножество $\mathbb{R}^d$) $\mathfrak{A}_1$ -периодическая цепочка $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

Напомним, что для $d = 3$ (а это самый интересный случай, поскольку из трехмерной гипотезы Оппенгейма следует гипотеза Литтлвуда) $\mathfrak{A}_1$ можно заменить на $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$. Это позволяет переформулировать гипотезу Оппенгейма в случае $n = 3$ следующим образом.

Сначала определим граф $\mathcal{G}(\Pi)$: в качестве вершин возьмем множество пар $(F, \mathbf{v})$, где F — грань паруса Π и $\mathbf{v}$ — вершина F ; две различные вершины $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ графа $\mathcal{G}(\Pi)$ соединяем ребром, если, во-первых, отрезок $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ является общим ребром граней F и G , и во-вторых, обход грани F от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$ является положительным (относительно внешней нормали к полиэдру Клейна). Очевидно, что граф $\mathcal{G}(\Pi)$ планарный и в любой его вершине сходятся ровно три ребра.

Теперь определим раскраску графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Окрашиваются, в отличие от рассматриваемых выше раскрасок графов $\mathcal{G}_k(\Pi)$, и вершины, и ребра. Пусть $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ — произвольные вершины графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — соседние с $\mathbf{v}$ вершины грани F , а $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — соседние с $\mathbf{w}$ вершины грани G . Пусть существует оператор из $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$, отображающий объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$ на объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{d}$. Тогда $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ окрашиваем в один и тот же цвет. Аналогично поступаем и с ребрами: пусть $((F_1, \mathbf{v}_1), (F_2, \mathbf{v}_2))$ и $((G_1, \mathbf{w}_1), (G_2, \mathbf{w}_2))$ — произвольные ребра графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Пусть $\mathbf{a}_1$ — соседняя с $\mathbf{v}_1$ и отличная от $\mathbf{v}_2$ вершина грани F_1 , $\mathbf{a}_2$ — соседняя с $\mathbf{v}_2$ и отличная от $\mathbf{v}_1$ вершина грани F_2 , $\mathbf{b}_1$ — соседняя с $\mathbf{w}_1$ и отличная от $\mathbf{w}_2$ вершина грани G_1 , $\mathbf{b}_2$ — соседняя с $\mathbf{w}_2$ и отличная от $\mathbf{w}_1$ вершина грани G_2 . Пусть существует оператор из $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$, отображающий объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{a}_2$ на объединение граней паруса Π , инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{b}_2$. Тогда $((F_1, \mathbf{v}_1), (F_2, \mathbf{v}_2))$ и $((G_1, \mathbf{w}_1), (G_2, \mathbf{w}_2))$ окрашиваем в один и тот же цвет.

Из теоремы 15 следует, что существование цепочки вершин паруса Π , образы которой в $\mathcal{G}_2(\Pi)$ и $\mathcal{G}_3(\Pi)$ имеют периодичные $\text{Aff}_3(\mathbb{Z})$ -раскраски, равносильно существованию цепочки вершин графа $\mathcal{G}(\Pi)$, имеющую периодическую “вершинно-реберную” раскраску. Поэтому для $n = 3$ гипотезу Оппенгейма можно переформулировать так:

Переформулировка трехмерной гипотезы Оппенгейма. Пусть $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle$, $\langle \mathbf{L}_2, \cdot \rangle$, $\langle \mathbf{L}_3, \cdot \rangle$ — линейно независимые иррациональные линейные формы на $\mathbb{R}^3$ и

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \}.$$

Пусть раскраска графа $\mathcal{G}(\Pi)$ паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^3$ и конусу $\mathcal{C}$, имеет лишь конечное число цветов. Тогда существует неограниченная в обе стороны (в естественной метрике графа $\mathcal{G}(\Pi)$) периодически раскрашенная цепочка вершин графа $\mathcal{G}(\Pi)$.

6.6. Об одном рассуждении Скубенко

В данном пункте мы разберем, в чем ошибка, содержащаяся в остальном замечательной работе Б.Ф. Скубенко [45]. Ошибка в доказательстве леммы IV. Эта лемма — самая существенная часть доказательства основной теоремы. Будем использовать обозначения из статьи [45]. Лемма заключается в следующем.

ЛЕММА 1. *Если $D_1\Lambda$ — цикл, то существует такое $\lambda_o \neq 0$, что $D_1\Lambda = D_1\mathcal{D}_2^{\lambda_o}\Lambda$.*

Ход доказательства и ошибка. Сначала показывается, что существует такое λ_1 , что множество кодов решеток из орбиты $D_1\Lambda$ не совпадает с множеством кодов решеток из орбиты $D_1\mathcal{D}_2^{\lambda_1}\Lambda$. Это не сложно. Отсюда, не ограничивая общности, можно считать, что среди подходящих кодов решеток из орбиты $D_1\Lambda$ есть код δ_{n_1} длины n_1 , а среди подходящих кодов решеток из орбиты $D_1\mathcal{D}_2^{\lambda_1}\Lambda$ такого кода нет. Опять же, не ограничивая общности, можно считать, что при любом $\lambda \in [0, \lambda_1)$ код δ_{n_1} содержится в множестве подходящих кодов решеток из орбиты $D_1\mathcal{D}_2^\lambda\Lambda$, а в множестве подходящих кодов решеток из орбиты $D_1\mathcal{D}_2^{\lambda_1}\Lambda$ не содержится. Дальше цитируем: “Это значит, что при любом $\lambda \in [0, \lambda_1)$ парус $\Pi(\mathcal{D}_2^\lambda\Lambda)$ содержит грани с кодом δ_{n_1} . Эти грани содержат полуоткрытые интервалы линии $L_1(1, 1)$, но при λ_1 парус $\Pi(\mathcal{D}_2^{\lambda_1}\Lambda)$ не содержит таких граней. <ВНИМАНИЕ, ОШИБКА:> Отсюда следует: парус $\Pi(\mathcal{D}_2^{\lambda_1}\Lambda)$ содержит грань Δ_1 с подходящим кодом длины n_1 равным δ_{n_1} и вершина грани Δ_1 касается плоскости $P_1(1, 1)$.”

Это неправда. Такой грани Δ_{n_1} может и не существовать. При каждом $\lambda \in [0, \lambda_1)$ грань с кодом δ_{n_1} существует, но эти грани могут уходить на бесконечность и грань Δ_1 не появится.

Суть оставшейся части доказательства леммы в следующем. В предположении существования грани Δ_1 , мы рассматриваем произвольную решетку $\Lambda' \in \overline{D_1\Lambda} \setminus D_1\Lambda$, т.е. предельную точку орбиты, не лежащую в самой орбите. Утверждается, что для этой решетки тоже есть аналог грани Δ_1 , причем с кодом, равным коду грани Δ_1 . Это самое существенное место. Дальше просто. Применяем лемму II и получаем, что Λ и Λ' подобны по модулю действия группы диагональных унимодулярных матриц с неотрицательными коэффициентами, то есть $\Lambda' = \mathcal{D}_1^\lambda \mathcal{D}_2^{\lambda_o} \Lambda$. Ну а поскольку $\Lambda' \in \overline{D_1\Lambda} \setminus D_1\Lambda$, то $\lambda_o \neq 0$.

Из-за ошибки с гранью Δ_1 описанным выше “самым существенным местом” пользоваться нельзя. Действительно, чтобы в итоге получить $\lambda_o \neq 0$, нам необходимо рассматривать предельную точку орбиты, *не лежащую* в самой орбите. Но именно при таком предельном переходе грань Δ_1 обязательно уходит на бесконечность. И у предельной решетки либо вообще не будет грани паруса, касающейся плоскости $P_1(1, 1)$, либо такая грань появится, но никак не будет связана (в смысле кода) с гранью Δ_1 .

7. Промежуточные экспоненты. Параметрическая геометрия чисел

Классический подход, изучающий, насколько хорошо пространство решений системы (1) приближается целыми точками, дает экспоненты $\alpha(\Theta)$ и $\beta(\Theta)$. Естественно, возникали попытки обобщить данное понятие на случай задачи приближения пространства решений системы (1) рациональными подпространствами $\mathbb{R}^{m+n}$ размерности p . Большую работу в этом направлении проделал Шмидт в работе [40].

7.1. Неравенства Лорана–Бюжо. Разбиение принципа переноса Хинчина

Самым простым способом обобщить определения 1 и 5 представляется следующий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Супремум вещественных чисел γ , для которых существует сколь угодно большое t , такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств*

$$|\mathbf{x}|_\infty \leq t, \quad |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leq t^{-\gamma} \quad (43)$$

имеет p решений $\mathbf{z}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, p$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$, называется p -й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой первого типа матрицы Θ и обозначается $\beta_p(\Theta)$ (соотв. $\alpha_p(\Theta)$).

Лораном и Бюжо в работах [32], [8] было дано отличное от этого определение для случая $m = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Пусть $m = 1$. Супремум вещественных чисел γ , для которых существует сколь угодно большое t , такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств*

$$|\mathbf{Z}|_\infty \leq t, \quad |\Theta \wedge \mathbf{Z}|_\infty \leq t^{-\gamma} \quad (44)$$

имеет ненулевое решение в $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{Z}^d)$, называется p -й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой второго типа матрицы Θ и обозначается $\mathbf{b}_p(\Theta)$ (соотв. $\mathbf{a}_p(\Theta)$).

Здесь $d = m + n$, $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{R}^d)$, $\Theta \wedge \mathbf{Z} \in \wedge^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, а пространство $\wedge^q(\mathbb{R}^d)$ при каждом q мы рассматриваем как $\binom{d}{q}$ -мерное евклидово пространство с ортонормальным базисом, состоящим из мультивекторов

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq d,$$

где $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — столбцы единичной матрицы $d \times d$, и обозначаем через $|\cdot|_\infty$ суп-норму относительно этого базиса.

Лоран обозначал экспоненты $\mathbf{b}_p(\Theta)$, $\mathbf{a}_p(\Theta)$ как ω_{p-1} , $\hat{\omega}_{p-1}$, соответственно. Он показал, что при $p = 1$ они совпадают с $\beta(\Theta)$, $\alpha(\Theta)$. Он также сделал замечательное наблюдение о том, что в определении 15 не нужно налагать на $\mathbf{Z}$ требование разложимости, что существенно упрощает работу в $\bigwedge^p(\mathbb{R}^d)$.

При помощи предложенного ими определения Бюжо и Лоран разбили классический принцип переноса Хинчина (см. теорему 1) на несколько последовательных неравенств для промежуточных экспонент. А именно, они доказали, что при $m = 1$ справедливы равенства $\mathbf{b}_1(\Theta^\top) = \mathbf{b}_n(\Theta)$ и неравенства

$$\mathbf{b}_{p+1}(\Theta) \geq \frac{(n-p+1)\mathbf{b}_p(\Theta) + 1}{n-p}, \quad \mathbf{b}_p(\Theta) \geq \frac{p\mathbf{b}_{p+1}(\Theta)}{\mathbf{b}_{p+1}(\Theta) + p+1} \quad (45)$$

для $p = 1, \dots, n-1$. Кроме того, они доказали, что если при $m = 1$ система (1) не имеет ненулевых целочисленных решений, то $\mathbf{a}_1(\Theta^\top) = \mathbf{a}_n(\Theta)$ и

$$\mathbf{b}_2(\Theta) \geq \frac{\mathbf{b}_1(\Theta) + \mathbf{a}_1(\Theta)}{1 - \mathbf{a}_1(\Theta)}, \quad \mathbf{b}_{n-1}(\Theta) \geq \frac{1 - \mathbf{a}_n^{-1}}{\mathbf{b}_n(\Theta)^{-1} + \mathbf{a}_n(\Theta)^{-1}}, \quad (46)$$

что в комбинации с неравенствами (45) позволило им доказать теорему 3.

7.2. Обобщение экспонент Лорана. Разбиение теорем переноса

Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство решений системы (1), т.е.

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \mid \Theta \mathbf{x} = \mathbf{y} \right\}, \quad d = m + n,$$

и положим $k = \max(0, m - p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Супремум вещественных чисел γ , для которых существует сколь угодно большое t , такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{Z}| \leq t, \quad \max_{\substack{\mathbf{L} \in \bigwedge^{1+k}(\mathcal{L}) \\ |\mathbf{L}|=1}} |\mathbf{L} \wedge \mathbf{Z}| \leq t^{-\gamma} \quad (47)$$

имеет ненулевое решение в $\mathbf{Z} \in \bigwedge^p(\mathbb{Z}^d)$, называется p -й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой второго типа матрицы Θ и обозначается $\mathbf{b}_p(\Theta)$ (соотв. $\mathbf{a}_p(\Theta)$).

При $p = 1$ определение 16 совпадает с определениями 1 и 5, то есть $\mathbf{b}_1(\Theta) = \beta(\Theta) = \beta_1(\Theta)$ и $\mathbf{a}_1(\Theta) = \alpha(\Theta) = \alpha_1(\Theta)$. Построенные экспоненты естественно связаны с экспонентами транспонированных систем. В работе [19] доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Справедливы равенства*

$$\alpha_{d+1-p}(\Theta)\beta_p(\Theta^\top) = 1, \quad \alpha_{d+1-p}(\Theta^\top)\beta_p(\Theta) = 1,$$

$$\mathfrak{b}_p(\Theta) = \mathfrak{b}_{d-p}(\Theta^\top), \quad \mathfrak{a}_p(\Theta) = \mathfrak{a}_{d-p}(\Theta^\top).$$

Точно так же, как неравенства Лорана–Бюжо разбивают теорему Хинчина, представляя ее в виде цепочек неравенств для промежуточных экспонент, можно разбить и теоремы 2, 4, 8. Справедливы следующие теоремы (см. [19]).

ТЕОРЕМА 17. (О.Г.) *Для каждого $p = 1, \dots, d-2$ верно следующее. Если $p \geq m$, то*

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{b}_{p+1}(\Theta)) \geq (d-p)(1 + \mathfrak{b}_p(\Theta)), \quad (48)$$

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{a}_{p+1}(\Theta)) \geq (d-p)(1 + \mathfrak{a}_p(\Theta)). \quad (49)$$

Если $p \leq m-1$, то

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{b}_p(\Theta))^{-1} \geq (d-p)(1 + \mathfrak{b}_{p+1}(\Theta))^{-1} - n, \quad (50)$$

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{a}_p(\Theta))^{-1} \geq (d-p)(1 + \mathfrak{a}_{p+1}(\Theta))^{-1} - n. \quad (51)$$

ТЕОРЕМА 18. (О.Г.) *Предположим, что пространство решений системы (1) не является одномерной решеткой. Тогда для $m = 1$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{b}_2(\Theta) \geq \frac{\mathfrak{b}_1(\Theta) + \mathfrak{a}_1(\Theta)}{1 - \mathfrak{a}_1(\Theta)}, \quad (52)$$

а для $m \geq 2$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{b}_2(\Theta) \geq \begin{cases} \frac{\mathfrak{a}_1(\Theta) - 1}{2 + \mathfrak{b}_1(\Theta) - \mathfrak{a}_1(\Theta)}, & \text{при } \mathfrak{a}_1(\Theta) \neq \infty, \\ \frac{1 - \mathfrak{a}_1(\Theta)^{-1}}{\mathfrak{b}_1(\Theta)^{-1} + \mathfrak{a}_1(\Theta)^{-1}}. \end{cases} \quad (53)$$

Заметим, что неравенство (52) в точности совпадает с первым из неравенств (46). Из второго неравенства (53) в силу предложения 6 следует второе неравенство (46). Далее, по теореме 17 при $m \geq 2$

$$(d-2)(1 + \mathfrak{b}_{d-1}(\Theta))^{-1} \leq (1 + \mathfrak{b}_2(\Theta))^{-1} + m - 2. \quad (54)$$

Это неравенство вместе с (53) дает (11) и (12) при $m \geq 2$.

ТЕОРЕМА 19. (О.Г.) *Для $m = 1$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{a}_2(\Theta) \geq (1 - \mathfrak{a}_1(\Theta))^{-1} - \frac{n-2}{n-1}. \quad (55)$$

Для $m \geq 2$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{a}_2(\Theta) \geq \begin{cases} \frac{n-1}{-n-(d-2)(1-\mathfrak{a}_1(\Theta))^{-1}}, & \text{при } \mathfrak{a}_1(\Theta) \leq 1, \\ \frac{m-1}{n+(d-2)(\mathfrak{a}_1(\Theta)-1)^{-1}}, & \text{при } \mathfrak{a}_1(\Theta) \geq 1. \end{cases} \quad (56)$$

Покажем, что теорема 19 разбивает неравенства (16) таким же образом, как теорема 18 разбивает неравенства (11) и (12). Из теоремы 17 следует, что при $m = 1$

$$1 + \mathfrak{a}_n(\Theta) \geq (n-1)(1 + \mathfrak{a}_2(\Theta)), \quad (57)$$

а при $m \geq 2$

$$(d-2)(1 + \mathfrak{a}_{d-1}(\Theta))^{-1} \leq (1 + \mathfrak{a}_2(\Theta))^{-1} + m - 2. \quad (58)$$

Применяя (58) и (56), получаем (16) при $m \geq 2$. Что касается $m = 1$, в этом случае $\mathfrak{a}_1(\Theta) \leq 1$, так что при $m = 1$ из (57) и (55) действительно следует (16).

7.3. Экспоненты Шмидта–Зуммерера

Одним из основных инструментов при доказательстве теорем 17, 18, 19 послужила так называемая параметрическая геометрия чисел, открытая несколько лет назад Шмидтом и Зуммерером (см. [42, 43]).

Пусть Λ — d -мерная решетка в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1. Обозначим через $\mathcal{B}_\infty^d$ единичный шар в суп-норме, то есть куб с вершинами в точках $(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Для каждого d -набора $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $D_{\boldsymbol{\tau}}$ диагональную матрицу $d \times d$ с диагональными элементами $e^{\tau_1}, \dots, e^{\tau_d}$. Будем также использовать обозначение $\lambda_p(M)$ для p -го последовательного минимума компактного симметричного выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^d$ (с центром в точке начала координат) относительно решетки Λ .

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан путь $\mathfrak{T} : s \rightarrow \boldsymbol{\tau}(s)$, $s \in \mathbb{R}_+$, такой что

$$\tau_1(s) + \dots + \tau_d(s) = 0, \quad \text{для всех } s. \quad (59)$$

В наших приложениях к диофантовым приближениям нам будет достаточно путей, являющихся лучами с конечной точкой в начале координат и таких, что функции $\tau_1(s), \dots, \tau_d(s)$ линейны.

Положим $\mathcal{B}(s) = D_{\boldsymbol{\tau}(s)} \mathcal{B}_\infty^d$. Для каждого $p = 1, \dots, d$ рассмотрим функции

$$\psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s) = \frac{\ln(\lambda_p(\mathcal{B}(s)))}{s}, \quad \Psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s) = \sum_{i=1}^p \psi_i(\Lambda, \mathfrak{T}, s).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Будем называть величины

$$\underline{\psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s), \quad \overline{\psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s)$$

p -й нижней и верхней экспонентами Шмидта–Зуммерера первого типа, соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Будем называть величины

$$\underline{\Psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \Psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s), \quad \overline{\Psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \Psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s)$$

p -й нижней и верхней экспонентами Шмидта–Зуммерера второго типа, соответственно.

Часто, когда из контекста ясно, что из себя представляют решетка и путь, мы будем просто писать $\psi_p(s)$, $\Psi_p(s)$, $\underline{\psi}_p$, $\overline{\psi}_p$, $\underline{\Psi}_p$ и $\overline{\Psi}_p$.

При подходящем выборе Λ и $\mathfrak{T}$ эти экспоненты оказываются тесно связанными с задачей приближения пространства решений системы (1) рациональными подпространствами. А именно, в качестве Λ и $\mathfrak{T}$ нужно взять Λ_Θ и $\mathfrak{T}_\Theta$, определяемые следующим образом. Положим

$$T_\Theta = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ \Theta & E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_\Theta = T_\Theta^{-1} \mathbb{Z}^d, \quad (60)$$

где E_m и E_n — соответствующие единичные матрицы и определим путь $\mathfrak{T}_\Theta : s \mapsto \boldsymbol{\tau}(s)$ соотношениями

$$\tau_1(s) = \dots = \tau_m(s) = s, \quad \tau_{m+1}(s) = \dots = \tau_d(s) = -ms/n. \quad (61)$$

Экспоненты Шмидта–Зуммерера, соответствующие Λ_Θ и $\mathfrak{T}_\Theta$, и промежуточные диофантовы экспоненты матрицы Θ описывают одно и то же явление с двух разных точек зрения. Связь между ними описывается следующими двумя предложениями, в которых мы пишем β_p , α_p , $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{a}_p$ вместо $\beta_p(\Theta)$, $\alpha_p(\Theta)$, $\mathfrak{b}_p(\Theta)$, $\mathfrak{a}_p(\Theta)$, считая, что матрица Θ фиксирована.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Справедливо равенство

$$(1 + \beta_p)(1 + \underline{\psi}_p) = (1 + \alpha_p)(1 + \overline{\psi}_p) = d/n. \quad (62)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\varkappa_p = \min(p, \frac{m}{n}(d-p))$. Тогда

$$(1 + \mathfrak{b}_p)(\varkappa_p + \underline{\Psi}_p) = (1 + \mathfrak{a}_p)(\varkappa_p + \overline{\Psi}_p) = d/n. \quad (63)$$

7.4. Применение теоремы Минковского о последовательных минимумах

В данном параграфе мы приведем несколько соотношений для экспонент Шмидта–Зуммерера, почти мгновенно следующих из теоремы Минковского о последовательных минимумах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любых Λ и $\mathfrak{T}$

$$0 \leq -\Psi_d(s) = O(s^{-1}). \quad (64)$$

В частности,

$$\underline{\Psi}_d = \overline{\Psi}_d = 0. \quad (65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (59) объемы всех параллелепипедов $\mathcal{B}(s)$ равны 2^d , так что по теореме Минковского о последовательных минимумах

$$\frac{1}{d!} \leq \prod_{i=1}^d \lambda_i(\mathcal{B}(s)) \leq 1.$$

Стало быть,

$$-\frac{\ln(d!)}{s} \leq \sum_{i=1}^d \psi_i(s) \leq 0,$$

откуда немедленно следует (64). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 11. Для любого p в пределах $1 \leq p \leq d-2$ и любого $s > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{p+1}{p} \Psi_p(s) \leq \Psi_{p+1}(s) \leq \frac{d-p-1}{d-p} \Psi_p(s). \quad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (64) из неравенств $\psi_i(s) \leq \psi_{i+1}(s)$, $i = 1, \dots, d-1$, следует, что

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \psi_i(s) \leq \psi_{p+1}(s) \leq \frac{-1}{d-p} \sum_{i=1}^p \psi_i(s),$$

откуда немедленно получаем (66). $\square$

Беря $\liminf$ и $\limsup$ от всех трех частей неравенства (66), получаем

СЛЕДСТВИЕ 12. Для любых Λ , $\mathfrak{T}$ и любого p в пределах $1 \leq p \leq d-2$ справедливы неравенства

$$\frac{p+1}{p} \underline{\Psi}_p \leq \underline{\Psi}_{p+1} \leq \frac{d-p-1}{d-p} \underline{\Psi}_p \quad u \quad \frac{p+1}{p} \overline{\Psi}_p \leq \overline{\Psi}_{p+1} \leq \frac{d-p-1}{d-p} \overline{\Psi}_p. \quad (67)$$

Применяя последовательно (67), получаем

СЛЕДСТВИЕ 13. Для любых Λ и $\mathfrak{T}$

$$(d-1) \underline{\Psi}_1 \leq \underline{\Psi}_{d-1} \leq \frac{\underline{\Psi}_1}{d-1} \quad u \quad (d-1) \overline{\Psi}_1 \leq \overline{\Psi}_{d-1} \leq \frac{\overline{\Psi}_1}{d-1}. \quad (68)$$

Из предложения 9 можно также без труда вывести

СЛЕДСТВИЕ 14. Для любых Λ и $\mathfrak{T}$

$$\underline{\Psi}_{d-1} = -\overline{\psi}_d \quad u \quad \overline{\Psi}_{d-1} = -\underline{\psi}_d. \quad (69)$$

7.5. Неравенства для промежуточных экспонент в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера

Перепишем неравенство Хинчина (8) в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера. Ввиду предложений 6 и 8 оно превращается в

$$\underline{\Psi}_{d-1} \leq \frac{\underline{\Psi}_1}{d-1}, \quad (70)$$

что совпадает с одним из утверждений следствия 13. Но у нас уже есть промежуточный вариант этого неравенства! Это

$$\frac{\underline{\Psi}_{p+1}}{d-p-1} \leq \frac{\underline{\Psi}_p}{d-p}, \quad (71)$$

одно из утверждений следствия 12. Переписывание в терминах промежуточных диофантовых экспонент соответствующих утверждений следствия 12, в котором в качестве Λ и $\mathfrak{T}$ берутся решетка и путь, определяемые соотношениями (60), (61), дает теорему 17.

Как видим, описание разбиения неравенств Дайсона и Апфельбека на промежуточные неравенства в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера, данное в следствии 12, гораздо более элегантно выглядит, чем описание в терминах диофантовых экспонент. Еще одна привлекательная черта этого описания заключается в независимости от конкретных значений n и m , если фиксирована их сумма d . Более того, следствие 12 имеет место для всех решеток и путей, в то время как теорема 17 привязана к конкретному их выбору.

Переформулируем теперь теоремы 18, 19 в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера (см. также [19]). Заметим, что

$$-1 \leq \underline{\Psi}_1 \leq \overline{\Psi}_1 \leq 0.$$

Теорема 18 переформулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 20. (О.Г.) *Предположим, что пространство целочисленных решений системы (1) не является одномерной решеткой. Тогда*

$$\underline{\Psi}_2 \leq \begin{cases} 2\underline{\Psi}_1 + d \cdot \frac{\overline{\Psi}_1 - \underline{\Psi}_1}{n + n\overline{\Psi}_1}, & \text{при } \overline{\Psi}_1 \neq -1, \\ 2\underline{\Psi}_1 + d \cdot \frac{\overline{\Psi}_1 - \underline{\Psi}_1}{m - n\overline{\Psi}_1}. \end{cases} \quad (72)$$

Теорема 19 переформулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 21. (О.Г.) *Справедливы неравенства*

$$\overline{\Psi}_2 \leq \begin{cases} \frac{(d-2)\overline{\Psi}_1}{(n-1) + n\overline{\Psi}_1}, & \text{при } \overline{\Psi}_1 \geq \frac{m-n}{2n}, \\ \frac{(d-2)\overline{\Psi}_1}{(m-1) - n\overline{\Psi}_1}, & \text{при } \overline{\Psi}_1 \leq \frac{m-n}{2n}. \end{cases} \quad (73)$$

Как видим, данная точка зрения позволяет не выделять случай $m = 1$.

7.6. Экспоненты Шмидта–Зуммерера второго типа с точки зрения полилинейной алгебры

Как и прежде, будем рассматривать пространство $\bigwedge^p(\mathbb{R}^d)$ как $\binom{d}{p}$ -мерное евклидово пространство с ортонормированным базисом, состоящим из поливекторов

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d,$$

где $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — вектора стандартного единичного базиса $\mathbb{R}^d$. Упорядочим множество всех p -элементных подмножеств множества $\{1, \dots, d\}$ лексикографически и обозначим j -е множество как σ_j . Каждому набору $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ длины d поставим в соответствие набор длины r

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = (\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_r), \quad \hat{\tau}_j = \sum_{i \in \sigma_j} \tau_i, \quad r = \binom{d}{p}. \quad (74)$$

Тогда путь $\mathfrak{T} : s \rightarrow \boldsymbol{\tau}(s)$ даст нам при помощи (74) путь $\hat{\mathfrak{T}} : s \rightarrow \hat{\boldsymbol{\tau}}(s)$, также удовлетворяющий соотношению

$$\hat{\tau}_1(s) + \dots + \hat{\tau}_r(s) = 0, \quad \text{для всех } s.$$

Наконец, с решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ будем ассоциировать решетку $\hat{\Lambda} = \bigwedge^p(\Lambda)$, состоящую из всех линейных целочисленных комбинаций поливекторов $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$, таких что $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Для любых Λ и $\mathfrak{T}$*

$$\underline{\Psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \underline{\Psi}_1(\hat{\Lambda}, \hat{\mathfrak{T}}) = \underline{\psi}_1(\hat{\Lambda}, \hat{\mathfrak{T}}) \quad \text{и} \quad \overline{\Psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \overline{\Psi}_1(\hat{\Lambda}, \hat{\mathfrak{T}}) = \overline{\psi}_1(\hat{\Lambda}, \hat{\mathfrak{T}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\lambda_i(M)$ последовательный минимум с номером i тела M относительно решетки Λ , если $M \subset \mathbb{R}^d$, и относительно решетки $\hat{\Lambda}$, если $M \in \bigwedge^p(\mathbb{R}^d)$.

Матрица $D_{\hat{\boldsymbol{\tau}}}$ совпадает с p -й присоединенной матрицей для матрицы $D_{\boldsymbol{\tau}}$:

$$D_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} = D_{\boldsymbol{\tau}}^{(p)}.$$

Это означает, что $D_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \mathcal{B}_{\infty}^r$ не слишком отличается от p -го присоединенного тела Малера для тела $D_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{B}_{\infty}^d$ (см. [37]), то есть с некоторой положительной константой c , зависящей только от d ,

$$c^{-1} D_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \mathcal{B}_{\infty}^r \subset [D_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{B}_{\infty}^d]^{(p)} \subset c D_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \mathcal{B}_{\infty}^r. \quad (75)$$

В книге [41] множество $D_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \mathcal{B}_{\infty}^r$ называется p -м псевдо-присоединенным параллелепипедом для параллелепипеда $D_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{B}_{\infty}^d$.

Из теории присоединенных тел Малера следует, что

$$\lambda_1([D_{\tau}\mathcal{B}_{\infty}^d]^{(p)}) \asymp \prod_{i=1}^p \lambda_i(D_{\tau}\mathcal{B}_{\infty}^d) \quad (76)$$

где константа зависит лишь от d . Из (75) и (76) получаем

$$\ln(\lambda_1(D_{\hat{\tau}(s)}\mathcal{B}_{\infty}^d)) = \sum_{i=1}^p \ln(\lambda_i(D_{\tau(s)}\mathcal{B}_{\infty}^d)) + O(1),$$

откуда

$$\psi_1(\hat{\Lambda}, \hat{\mathfrak{T}}, s) = \sum_{i=1}^p \psi_i(\Lambda, \mathfrak{T}, s) + o(1).$$

Остается взять $\liminf$ и $\limsup$ от обеих частей при $s \rightarrow \infty$. $\square$

8. Произвольные функции вместо экспонент

Заметим теперь, что если ограничиваться только показательными функциями при изучении асимптотического поведения какой-нибудь величины, то от нашего внимания ускользает промежуточный рост. Поэтому естественно для произвольной функции $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ дать следующие определения, обобщающие определения 1, 5, 3, 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Будем называть матрицу Θ регулярно ψ -аппроксимлируемой (или просто ψ -аппроксимлируемой), если существует бесконечно много $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, таких что

$$|\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\infty} \leq \psi(|\mathbf{x}|_{\infty}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Будем называть матрицу Θ равномерно ψ -аппроксимлируемой, если для каждого достаточно большого t существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что

$$0 < |\mathbf{x}|_{\infty} \leq t, \quad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\infty} \leq \psi(t).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Будем называть матрицу Θ мультипликативно ψ -аппроксимлируемой, если существует бесконечно много таких $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что

$$\Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \psi(\Pi'(\mathbf{x})).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Будем называть матрицу Θ равномерно мультипликативно ψ -аппроксимлируемой, если для каждого достаточно большого t существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq t, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq \psi(t).$$

Ясно, что $\beta(\Theta)$ (соотв. $\alpha(\Theta)$) равняется супремуму вещественных чисел γ , таких что Θ регулярно (соотв. равномерно) $t^{-\gamma}$ -аппроксимлируема. Аналогично, $\beta_M(\Theta)$ равно супремуму тех γ , при которых Θ является мультипликативно $t^{-\gamma}$ -аппроксимлируемой. То же самое и для $\alpha_M(\Theta)$.

8.1. Функциональное усиление теорем 4 и 8

В работе [18] доказываются усиленные варианты теорем 4 и 8, а именно, вместо экспонент рассматриваются произвольные функции, удовлетворяющие некоторым естественным ограничениям на рост.

В том случае, когда функция $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ обратима, мы будем обозначать соответствующую обратную функцию через ψ^- . Тогда $\psi^-(\psi(t)) = \psi(\psi^-(t)) = t$ для всех $t > 0$.

ТЕОРЕМА 22. (О.Г.) Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — произвольная функция, такая что

$$t^n \varphi(t)^{m-1} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (77)$$

Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — произвольная обратимая убывающая функция, такая что для всех достаточно больших t верно одно из двух следующих утверждений:

(i) $t\psi(t)$ не возрастает и удовлетворяет неравенству

$$\psi(\Delta_d t^n \varphi(t)^{m-1}) \leq (c\Delta_d t)^{-1}, \quad (78)$$

(ii) $t\psi(t)$ не убывает и удовлетворяет неравенству

$$\psi^-(\Delta_d t^{n-1} \varphi(t)^m) \leq (c\Delta_d \varphi(t))^{-1}, \quad (79)$$

где $d = n + m$, $c = \sqrt{2d(d-1)}$, а Δ_d определяется равенством (20).

Пусть Θ равномерно ψ -аппроксимируема. Тогда Θ^Γ равномерно φ -аппроксимируема.

Выведем из теоремы 22 теорему 8. Для этого положим $\psi(t) = t^{-\delta}$, $\varphi(t) = \varkappa t^{-\gamma}$, где $\delta < \alpha(\Theta)$ — положительное вещественное число, сколь угодно близкое к $\alpha(\Theta)$,

$$\gamma = \begin{cases} \frac{n-1}{m-\delta}, & \text{при } \delta < 1, \\ \text{сколь угодно большое вещественное число,} & \text{при } \delta = 1, m = 1, \\ \frac{n-\delta^{-1}}{m-1}, & \text{при } \delta \geq 1, m \neq 1, \end{cases} \quad (80)$$

и

$$\varkappa = \begin{cases} (c^\delta \Delta_d^{\delta-1})^{\frac{1}{m-\delta}}, & \text{при } \delta < 1, \\ 1, & \text{при } \delta = 1, m = 1, \\ (c\Delta_d^{1-\delta})^{\frac{1}{(m-1)\delta}}, & \text{при } \delta \geq 1, m \neq 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что соотношение (77) выполняется. Далее, $t\psi(t) = t^{1-\delta}$ либо не возрастает, либо не убывает, в зависимости от того $\delta \geq 1$ или $\delta \leq 1$. Кроме того,

неравенства (78) и (79) в нашем случае выполняются со знаками равенства. Таким образом, учитывая, что $\varkappa$ не зависит от t , получаем неравенство $\alpha(\Theta^\top) \geq \gamma$, из которого следует теорема 8.

Немного изменив приводимые выше рассуждения, можно убедиться в том, что если функциональный порядок аппроксимации матрицы Θ в логарифм раз лучше, чем $t^{-\alpha(\Theta)}$, то почти то же самое можно сказать и о матрице $\Theta^\top$. Сформулируем это следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 15. Пусть $\alpha(\Theta), \alpha(\Theta^\top) < +\infty$ (что исключает случай $\alpha(\Theta) = m = 1$) и пусть Θ равномерно $(\ln t)^{-1}t^{-\alpha(\Theta)}$ -аппроксимируема. Тогда $\Theta^\top$ равномерно $g(t)t^{-\gamma}$ -аппроксимируема, где

$$g(t) = \begin{cases} \left(\gamma c^{-\alpha(\Theta)} \Delta_d^{1-\alpha(\Theta)} \ln t \right)^{-\frac{1}{m-\alpha(\Theta)}}, & \text{при } \alpha(\Theta) < 1, \\ (1 + \varepsilon) \left(\alpha(\Theta)^{-1} c^{-1} \Delta_d^{\alpha(\Theta)-1} \ln t \right)^{-\frac{1}{(m-1)\alpha(\Theta)}}, & \text{при } \alpha(\Theta) \geq 1, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{n-1}{m-\alpha(\Theta)}, & \text{при } \alpha(\Theta) < 1, \\ \frac{n-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, & \text{при } \alpha(\Theta) \geq 1, \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, а константы c и Δ_d — как в теореме 22.

Как было отмечено выше, всегда справедливы неравенства $\alpha(\Theta) \geq m/n$ и $\alpha(\Theta^\top) \geq n/m$. Хорошо известно, что $\alpha(\Theta) = m/n$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\Theta^\top) = n/m$ (это также следует из теоремы 8). Стало быть, если $\alpha(\Theta) = m/n$, функциональный порядок равномерной аппроксимации матрицы Θ в $\ln t$ раз лучше, чем $t^{-\alpha(\Theta)}$, то в силу следствия 15 функциональный порядок равномерной аппроксимации матрицы $\Theta^\top$ в $O(\ln^\delta t)$ раз лучше, чем $t^{-\alpha(\Theta^\top)}$, где

$$\delta = \frac{n}{m(\max(n, m) - 1)}.$$

Если $\alpha(\Theta) = +\infty$ (что может быть только при $m \neq 1$), то из теоремы 8 следует, что $\alpha(\Theta^\top) \geq \frac{n}{m-1}$. Но это не означает, что матрица $\Theta^\top$ равномерно $t^{-\frac{n}{m-1}}$ -аппроксимируема. Мы можем лишь заключить, что для любого $\varepsilon > 0$ она равномерно $t^{-\frac{n}{m-1}+\varepsilon}$ -аппроксимируема. Тем не менее, если удастся оценить функциональный порядок аппроксимации матрицы Θ , теорема 22 позволяет сказать нечто большее. Например, следующее.

СЛЕДСТВИЕ 16. Пусть матрица Θ равномерно e^{-t} -аппроксимируема. Тогда $\Theta^\top$ равномерно $f(t)$ -аппроксимируема, где

$$f(x) = \Delta_d^{-\frac{1}{m-1}} t^{-\frac{n}{m-1}} \ln(c \Delta_d t)^{\frac{1}{m-1}},$$

а константы c и Δ_d — как в теореме 22.

Сформулируем функциональный аналог теоремы 4.

ТЕОРЕМА 23. (О.Г.) Пусть $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — произвольная обратимая убывающая функция, такая что $\varphi(t) \geq \psi(t)$ для всех $t > 0$. Положим

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (ct^m \varphi(t) \psi(t)^{1-m})^{\frac{1}{d-2}}, & f_{-1}(t) &= (ct^{2-m} \varphi^-(t) \psi^-(t)^{m-1})^{\frac{1}{d-2}}, \\ g_1(t) &= (ct^{2-n} \varphi(t) \psi(t)^{n-1})^{\frac{1}{d-2}}, & g_{-1}(t) &= (ct^n \varphi^-(t) \psi^-(t)^{1-n})^{\frac{1}{d-2}}, \end{aligned}$$

где $d = n + m$ и $c = \sqrt{2d(d-1)}$.

Пусть матрица Θ является ψ -аппроксимируемой и равномерно φ -аппроксимируемой. Тогда справедливы следующие два утверждения:

(i) если f_1 возрастает и обратима, то Θ^Γ является $(g_1 \circ f_1^-)$ -аппроксимируемой;

(ii) if f_{-1} убывает и обратима, то Θ^Γ является $(g_{-1} \circ f_{-1}^-)$ -аппроксимируемой.

Чтобы вывести из теоремы 23 теорему 4, положим $\psi(t) = t^{-\delta}$, $\varphi(t) = t^{-\gamma}$, где δ и γ — положительные действительные числа, сколь угодно близкие к $\beta(\Theta)$ и $\alpha(\Theta)$, соответственно, и такие что $\delta < \beta(\Theta)$, $\gamma < \alpha(\Theta)$, $\gamma \neq 1$.

Тогда при $k = \pm 1$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \left(ct^{k(m-1)(1+\delta^k)+1-\gamma^k} \right)^{\frac{1}{d-2}}, \\ g_k(t) &= \left(ct^{-k(n-1)(1+\delta^k)+1-\gamma^k} \right)^{\frac{1}{d-2}}. \end{aligned}$$

Единственный случай, когда $f_k(t)$ необратима — случай $m = 1$, $\gamma = 1$, который мы исключили выбором γ . Таким образом, $f_k(t)$ обратима и можно легко проверить, что f_1 возрастает, f_{-1} убывает и что

$$g_k(f_k^-(t)) = c^{\frac{k(n-1)(1+\delta^k)+\gamma^k}{d-2}} t^{-\frac{(n-1)(1+\delta^k)-k(1-\gamma^k)}{(m-1)(1+\delta^k)+k(1-\gamma^k)}}.$$

Отсюда, учитывая, что c не зависит от t , видим, что

$$\beta(\Theta^\Gamma) \geq \frac{(n-1)(1+\delta^k) - k(1-\gamma^k)}{(m-1)(1+\delta^k) + k(1-\gamma^k)},$$

откуда следует (11) и (12).

Что касается неравенства (10), оно не требует доказательства, ибо в точности совпадает с утверждением теоремы Дайсона 2. Таким образом, теорема 4 действительно следует из теоремы 23.

8.2. Функциональная теорема переноса для мультипликативных задач

В работе [17] доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 24. (О.Г.) Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — произвольная функция, такая что

$$\psi(t) < 1 \quad \text{для всех достаточно больших } t,$$

и пусть

$$t^{\frac{1-n}{n}} \psi(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Предположим, что функция

$$f(t) = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (t^m \psi(t)^{1-m})^{\frac{1}{d-1}}$$

обратима. Положим

$$g(t) = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (t^{1-n} \psi(t)^n)^{\frac{1}{d-1}},$$

и

$$\varphi(t) = g(f^{-1}(t)),$$

где f^{-1} обозначает функцию, обратную к f .

Пусть матрица Θ мультипликативно ψ -аппроксимируема. Тогда матрица $\Theta^\top$ мультипликативно φ -аппроксимируема.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко также видеть, что следствия 4, 5 можно вывести из теорем 24, если в качестве функций ψ и φ взять соответствующие показательные функции.

Приведем пример утверждения в стиле теорем переноса, чувствительного к логарифмическому росту. И дадим его для случая, актуального для гипотезы Литтлвуда. Положим $c = \Delta_3^{-1/2} = \sqrt{3}/2$.

СЛЕДСТВИЕ 17. Пусть заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\|q\alpha\| \|q\beta\| \leq \frac{1}{q \ln q},$$

то существует бесконечно много таких пар $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, что

$$\|p\alpha + q\beta\| \leq \frac{c^3}{t^2 \sqrt{2 \ln(t/c)}}, \quad t = \sqrt{\max(1, |p|) \cdot \max(1, |q|)}.$$

Приведем также “обратный” аналог этого утверждения. Как и прежде, полагаем $c = \Delta_3^{-1/2} = \sqrt{3}/2$. Обозначим через $\rho(t)$ функцию, обратную к функции $ct^2 \sqrt{\ln(1+t)}$.

СЛЕДСТВИЕ 18. Пусть заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если существует бесконечно много таких пар $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, что

$$\|p\alpha + q\beta\| \leq \frac{1}{t^2 \ln(1+t)}, \quad t = \sqrt{\max(1, |p|) \cdot \max(1, |q|)},$$

то существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\|q\alpha\| \|q\beta\| \leq \frac{c^2}{\rho(q)^2 \ln(1 + \rho(q))}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Apfelbeck A. A contribution to Khintchine's principle of transfer // Czech. Math. J. 1951. Vol. 1, № 3. P. 119–147.
2. Arnold V. I. Higher dimensional continued fractions // Regular and Chaotic Dynamics. 1998. Vol. 3, № 3.
3. Arnold V. I. Preface // Amer. Math. Soc. Transl. 1999. Vol. 197, № 2. P. ix–xii.
4. Arnold V. I. Continued fractions. Moscow: Moscow Center of Continuous Mathematical Education, 2002.
5. Ball K. Volumes of sections of cubes and related problems // Geometric aspects of functional analysis (1987–88). Lect. Notes in Math. 1989. Vol. 1376. P. 251–260.
6. Bonnesen T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934.
7. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964. 566 с.
8. Bugeaud Y., Laurent M. On transfer inequalities in Diophantine approximations II // Math. Z. 2010. Vol. 265, № 2. P. 249–262.
9. Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine approximation. Cambridge University Press, 1957.
10. Cassels J. W. S., Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. Vol. 248. P. 73–96.
11. Dyson F. J. On simultaneous Diophantine approximations // Proc. London Math. Soc. 1947. Vol. 49, № 2. P. 409–420.
12. Ewald G. Combinatorial convexity and algebraic geometry. Springer, 1996.

13. Герман О. Н. Паруса и норменные минимумы решеток // Мат. Сборник. 2005. Т. 196, № 3. С. 31–60.
14. Герман О. Н. Полиэдры Клейна и норменные минимумы решеток // Доклады РАН. Математика. 2006. Т. 406, № 3. С. 38–41.
15. German O. N. Klein polyhedra and lattices with positive norm minima // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2007. Vol. 19. P. 157–190.
16. Герман О. Н., Лакштанов Е. Л. О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей // Известия РАН. Сер. Мат. 2008. Т. 72, № 1. С. 51–66.
17. German O. N. Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents // Труды МИРАН. 2011. Т. 275. С. 216–228.
18. German O. N. On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2012. Vol. 2, № 2. P. 22–51.
19. German O. N. Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers // Acta Arithmetica. 2012. Vol. 154. P. 79–101.
20. Grünbaum B. Convex polytopes. London; New York; Sydney: Interscience Publ., 1967.
21. Jarník V. Über einen Satz von A. Khintchine // Prace Mat. Fiz. 1936. Vol. 43. P. 151–166.
22. Jarník V. Über einen Satz von A. Khintchine, 2 // Acta Arithm. 1936. Vol. 2. P. 1–22.
23. Jarník V. Zum Khintchineschen “Übertragungssatz” // Trav. Inst. Math. Tbilissi. 1938. Vol. 3. P. 193–212.
24. Khintchine A. Ya. Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen. Rend. Sirc. Mat. Palermo. **50** (1926). P. 170–195.
25. Khintchine A. Ya. On some applications of the method of the additional variable // UMN. 1948. Vol. 3, № 6(28). P. 188–200.
26. Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen. 1895. Vol. 3. P. 357–359.
27. Korkina E. La périodicité des fractions continues multidimensionnelles // C. R. Acad. Sci. Paris. Série I. 1994. Vol. 319. P. 777–780.
28. Korkina E. I. Two-dimensional continued fractions. The simplest examples // Proc. Steklov Math. Inst. RAS. 1995. Vol. 209. P. 143–166.

29. Lachaud G. Polyèdre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange // C. R. Acad. Sci. Paris. 1993. Série I. Vol. 317. P. 711–716.
30. Lachaud G. Sails and Klein Polyhedra // Contemporary Mathematics. 1998. Vol. 210. P. 373–385.
31. Lachaud G. Voiles et Polyèdres de Klein. Act. Sci. Ind. Hermann, 2002.
32. Laurent M. On transfer inequalities in Diophantine Approximation // “Analytic Number Theory, Essays in Honour of Klaus Roth” / eds. W. W. L. Chen, W. T. Gowers, H. Halberstam, W. M. Schmidt and R. C. Vaughan. Cambridge University Press, 2009. P. 306–314.
33. Laurent M. Exponents of Diophantine approximation in dimension two // Canad. J. Math. 2009. Vol. 61. P. 165–189.
34. McMullen P., Shephard G. C. Convex polytopes and the upper bound conjecture. Cambridge (GB): Cambridge University Press, 1971.
35. Mahler K. Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen // Čas. Pešt. Mat. Fys. 1939. Vol. 68. P. 85–92.
36. Mahler K. On a theorem of Dyson // Mat. sbornik. 1950. Vol. 26(68), № 3. P. 457–462.
37. Mahler K. On compound convex bodies (I). // Proc. London Math. Soc. 1955. Vol. 5, № 3. P. 358–379.
38. Moshchevitin N. G. Khintchine's singular systems and their applications // UMN (to appear). Preprint available at arXiv:0912.4503v1, 2009.
39. Moussaïfir J.-O. Convex hulls of integral points // Zapiski nauch. sem. POMI. 2000. Vol. 256.
40. Schmidt W. M. On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations // Annals of Math. 1967. Vol. 85, № 3. P. 430–472.
41. Schmidt W. M. Diophantine Approximation. Lecture Notes in Math. Vol. 785. Springer-Verlag, 1980.
42. Schmidt W. M., Summerer L. Parametric geometry of numbers and applications // Acta Arithmetica. 2009. Vol. 140, № 1. P. 67–91.
43. Schmidt W. M., Summerer L. Diophantine approximation and parametric geometry of numbers // Monat. Math. 2012. DOI: 10.1007/s00605-012-0391-z.

-
44. Schmidt W. M., Wang Y. A note on a transference theorem of linear forms // Sci. Sinica. 1979. Vol. 22, № 3. P. 276–280.
 45. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Зап. науч. семинара ЛОМИ. Т. 168. 1988.
 46. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$ // Зап. науч. семинара ЛОМИ. Т. 183. 1990.
 47. Tsuchinashi H. Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities // Tohoku Math. Journal. 1983. Vol. 35. P. 607–639.
 48. Vaaler J. D. A geometric inequality with applications to linear forms // Pacif. J. Math. 1979. Vol. 83, № 2. P. 543–553.
 49. Waldschmidt M. Report on some recent advances in Diophantine approximation. Special volume in honor of Serge Lang. Springer Verlag, (to appear). Preprint available at arXiv:0908.3973v1. 2009.
 50. Wang Y., Yu K. A note on some metrical theorems in Diophantine approximation // Chinese Ann. Math. 1981. Vol. 2. P. 1–12.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Поступило 26.11.2013