ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.512

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-129-137

О числе примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя¹

Р. А. Дохов, У. М. Пачев

Дохов Резуан Ауесович — кандидат физико-математических наук, Северо-Кавказский центр математических исследований; Северо-Кавказский федеральный университет (г. Ставрополь).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик); Северо-Кавказский центр математических исследований; Северо-Кавказский федеральный университет (г. Ставрополь).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Аннотация

При изучении вопросов асимптотического распределения целых точек по областям на гиперboloидах, а также целочисленных матриц второго и третьего порядков возникает необходимость использования примитивных неассоциированных матриц второго и третьего порядков заданного определителя. Подсчет количества целых матриц одного и того же порядка и заданного определителя требует выделения среди них попарно неассоциированных матриц. Неассоциированные матрицы второго порядка появляются при рассмотрении предварительных эргодических теорем для потоков целых точек на гиперboloидах при применении дискретного эргодического метода к вопросу представления целых чисел тернарными квадратичными формами. Через количество неассоциированных матриц второго порядка выражается также число бинарных квадратичных форм, арифметический минимум которых делится на заданное целое число. Кроме того, формулы для числа примитивных неассоциированных матриц второго и третьего порядков позволяют определить порядки главных членов в асимптотических формулах для числа целых матриц большой нормы. В данной работе опираясь на канонический треугольный вид целых матриц третьего порядка получена формула для числа примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя, представленного каноническим разложением. Получена также формула и для числа примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя, делящихся на заданную матрицу. Основные результаты, связанные с вопросом о числе неассоциированных целых матриц заданного определителя принадлежат Линнику Ю. В., Скубенко Б. Ф., Малышеву А. В. и авторам данной работы, результаты которой могут быть в дальнейшем перенесены на целочисленные матрицы любого порядка.

Ключевые слова: целочисленная (целая) матрица, делимость матриц, примитивная матрица, неассоциированные справа (слева) матрицы.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Р. А. Дохов, У. М. Пачев. О числе примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 129–137.

¹Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований в рамках соглашения № 075-02-2021-1749 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.512

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-129-137

The number of primitive unassociated third-order matrices of a given determinant

R. A. Dohov, U. M. Pachev

Dokhov Rezuan Auesovich — candidate of physical and mathematical sciences, North Caucasus Center for Mathematical Research; North Caucasus Federal University (Stavropol).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov (Nalchik); North Caucasus Center for Mathematical Research; North Caucasus Federal University (Stavropol).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Abstract

When studying questions of the asymptotic distribution of integer points over domains on hyperboloids, as well as integer matrices of the second and third orders, it becomes necessary to use primitive unassociated matrices of the second and third orders of a given determinant. Counting the number of integer matrices of the same order and a given determinant requires the selection of pairwise unassociated matrices among them. Non-associated second-order matrices appear when considering preliminary ergodic theorems for flows of integer points on hyperboloids when applying the discrete ergodic method to the problem of representing integers by ternary quadratic forms. The number of unassociated second-order matrices is also used to express the number of binary quadratic forms, the arithmetic minimum of which is divisible. In addition, formulas for the number of primitive unassociated matrices of the second and third orders make it possible to determine the orders of the principal terms in asymptotic formulas for the number of integer matrices of large norm(determinant). In this paper, based on the canonical triangular form of the third-order integer matrices, a formula is obtained for the number of primitive unassociated third-order matrices represented by the canonical decomposition. A formula is also obtained for the number of primitive unassociated matrices of the third order of a given determinant, divisible by a given matrix. The main results related to the question of the number of non-associated integer matrices of a given determinant belong to Yu. V. Linnik, B. F. Skubenko, A.V. Malyshev and the authors of this work, the results of which can be further transferred to integer matrices of any order.

Keywords: integer matrix, divisibility of matrices, primitive matrix, non-associated right (left) matrices.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

R. A. Dohov, U. M. Pachev, 2021, "The number of primitive unassociated third-order matrices of a given determinant", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 129–137.

1. Введение

При исследовании дискретным эргодическим методом (см. напр. [1]) вопроса о представлении целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами возникает необходимость использования примитивных неассоциированных справа (слева) матриц $M \in M_2(\mathbb{Z})$

второго порядка заданного определителя. В [2] впервые было дано доказательство формулы

$$\sigma_0(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

для числа примитивных неассоциированных матриц второго порядка, при этом доказательство было основано на каноническом треугольном виде матриц из $M_2(\mathbb{Z})$ и на формуле обращения Мебиуса. Этот результат в дальнейшем использовался в работах [3]–[6]. Продолжая эти исследования в [7] доказана формула для числа $\sigma_0(n, A)$ примитивных неассоциированных матриц второго порядка определителя n , делящихся на заданную матрицу A . Отметим также, что отдельные результаты в более сложном случае матриц n -го порядка были получены в [8]. В настоящей работе мы переносим результаты, относящиеся к матрицам второго порядка на матрицы третьего порядка, а именно доказываются формулы для числа $\sigma_0(3, N)$ примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя N , а также для числа $\sigma_0(3, N; A)$ таких же матриц, делящихся на заданную матрицу $A \in M_3(\mathbb{Z})$ (предварительное сообщение дано в [9]). При этом отметим, что в работах [10, 11] количество целочисленных примитивных решений детерминантного уравнения

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = N$$

при $N \rightarrow \infty$ в заданной области Ω выражено через число примитивных неассоциированных матриц третьего порядка определителя N , но при этом вывода формулы для $\sigma_0(3, N)$ не дается. Отметим также, что в [12] понятие неассоциированности перенесено на неопределенные анизотропные кватернионы; но для числа таких неассоциированных кватернионов данной нормы получены только оценки снизу и сверху.

2. Леммы о целочисленных матрицах третьего порядка

Арифметика кольца целочисленных матриц третьего порядка $M_3(\mathbb{Z})$ сходна с арифметикой матриц второго порядка $M_2(\mathbb{Z})$. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называем целой, если $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Наибольший общий делитель всех элементов матрицы A , обозначаемый $t(A)$, называется числовым делителем матрицы A . Если для некоторого целого числа $g > 0$ числовой делитель $t(A)$ матрицы A взаимно прост с числом g , то матрица A называется примитивной по модулю g . Матрица $E \in M_3(\mathbb{Z})$ называется обратимой, если $E^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$. Обратимыми в $M_3(\mathbb{Z})$ будут те матрицы, для которых $\det E = \pm 1$. Матрицы $A, A' \in M_3(\mathbb{Z})$ называется ассоциированными справа, если найдется обратимая матрица $U \in M_3(\mathbb{Z})$, для которого $A' = AU$, в противном случае матрицы A и A' будут неассоциированными справа (аналогично определяется ассоциированность матриц слева). Ассоциированность матриц справа (слева) есть отношение эквивалентности, разбивающее кольцо $M_3(\mathbb{Z})$ на классы ассоциированных справа (слева) матриц. В каждом классе ассоциированных справа матриц можно выбрать единственную каноническую треугольную матрицу.

ЛЕММА 1. *Для всякой невырожденной матрицы $A \in M_3(\mathbb{Z})$ найдется единственная ассоциированная ей справа матрица вида*

$$T = \begin{pmatrix} \delta_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ 0 & \delta_2 & \varepsilon_{23} \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix},$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0, 0 \leq \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13} < \delta_1, 0 \leq \varepsilon_{23} < \delta_2$.

Это есть частный случай общего утверждения для произвольных целочисленных матриц любого порядка, доказываемого с помощью элементарных преобразований столбцов матриц (см. [13], глава II).

ЛЕММА 2. При данном Δ все целочисленные матрицы из кольца $M_3(\mathbb{Z})$ определителя Δ разбиваются на конечное число классов ассоциированных матриц, т.е. число $\sigma(3, \Delta)$ попарно неассоциированных матриц третьего порядка определяется равенством

$$\sigma(3, \Delta) = \sum_{\Delta = \delta_1 \delta_2 \delta_3} \delta_1^2 \delta_2,$$

где сумма берется по всем представлениям числа Δ в виде $\Delta = \delta_1 \delta_2 \delta_3$.

Доказательство основано на лемме 1 и комбинаторном правиле произведения. Лемма 2 есть частный случай более общего утверждения, относящегося к целым матрицам n -го порядка (см. [14]).

ЛЕММА 3. Для числа $\sigma(3, p^\alpha)$ неассоциированных справа (слева) матриц третьего порядка определителя p^α , где p – простое число, справедлива формула

$$\sigma(3, p^\alpha) = \frac{(p^{\alpha+2} - 1)(p^{\alpha+1} - 1)}{(p^2 - 1)(p - 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В силу леммы 2 имеем

$$\sigma(3, p^\alpha) = \sum_{\Delta = \delta_1 \delta_2 \delta_3} \delta_1^2 \delta_2.$$

Положим $\delta_1 = p^{\alpha_1}, \delta_2 = p^{\alpha_2}, \delta_3 = p^{\alpha_3}$, и значит, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$, где $\alpha_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$. Тогда $\delta_1^2 \delta_2 = p^{2\alpha_1 + \alpha_2}$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \sigma(3, p^\alpha) &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha \\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0}} p^{2\alpha_1 + \alpha_2} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \\ \text{при } \alpha_3 = 0}} p^{2\alpha_1 + \alpha_2} + \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - 1 \\ \text{при } \alpha_3 = 1}} p^{2\alpha_1 + \alpha_2} + \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - 2 \\ \text{при } \alpha_3 = 2}} p^{2\alpha_1 + \alpha_2} + \dots + \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \text{при } \alpha_3 = \alpha}} p^{2\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Заметим, что $2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - \alpha_3 + \alpha_1$. Тогда предыдущее равенство преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma(3, p^\alpha) &= \sum_{\alpha_3=0}^{\alpha} p^{\alpha - \alpha_3 + \alpha_1} + \sum_{\alpha_3=1}^{\alpha-1} p^{\alpha - \alpha_3 + \alpha_1} + \sum_{\alpha_3=2}^{\alpha-2} p^{\alpha - \alpha_3 + \alpha_1} = \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{\alpha_1=0}^{\alpha-k} p^{\alpha - k + \alpha_1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha} (p^{\alpha-k} + p^{\alpha-k+1} + \dots + p^{\alpha-k+(\alpha-k)}) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^{\alpha-k} (1 + p + p^2 + \dots + p^{\alpha-k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha} p^{\alpha-k} \frac{p^{\alpha-k+1} - 1}{p - 1} = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{p^{2(\alpha-k)+1} - p^{\alpha-k}}{p - 1} = \\ &= \frac{p}{p-1} \sum_{k=0}^{\alpha} p^{2(\alpha-k)} - \frac{1}{p-1} \sum_{k=0}^{\alpha} p^{\alpha-k} = \frac{p}{p-1} \sum_{l=0}^{\alpha} p^{2l} - \frac{1}{p-1} \sum_{l=0}^{\alpha} p^l = \frac{(p^{\alpha+1} - 1)(p^{\alpha+2} - 1)}{(p^2 - 1)(p - 1)}, \end{aligned}$$

ч.т.д.

3. Основные результаты о числе неассоциированных матриц третьего порядка

Опираясь на леммы 1-3, получаем основные результаты данной работы о числе неассоциированных матриц из $M_3(\mathbb{Z})$ заданного определителя N , представленного каноническим разложением.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ - каноническое разложение числа N . Тогда для числа $\sigma_0(3, N)$ примитивных попарно неассоциированных матриц третьего порядка определителя N справедлива формула

$$\sigma_0(3, N) = \prod_{i=1}^k \frac{(p_i^{\alpha_i+2} - 1)(p_i^{\alpha_i+1} - 1) - (p_i^{\alpha_i-1} - 1)(p_i^{\alpha_i-2} - 1)}{(p_i^2 - 1)(p_i - 1)},$$

при этом, если $\alpha_i = 1$, то i -ый сомножитель в правой части берётся равным $p_i^2 + p_i + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Будем проводить доказательство только для случая неассоциированных справа матриц. Сначала рассмотрим случай, когда N есть степень простого числа, т.е. $N = p^\alpha$, где p - простое число. Так как ввиду леммы 1 рассматриваемая матрица имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \delta_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ 0 & \delta_2 & \varepsilon_{23} \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

и при этом d - некоторый общий делитель элементов этой матрицы, то

$$T = d^3 \cdot \begin{pmatrix} \delta'_1 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ 0 & \delta'_2 & \varepsilon'_{23} \\ 0 & 0 & \delta'_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если обозначить $N = \det T$, то $d^3 | N$. Поэтому выполняется равенство

$$\sigma(3, N) = \sum_{d^3 | N} \sigma_0\left(3, \frac{N}{d^3}\right),$$

где суммирование проводится по всем кубическим делителям числа N и в итоге получаем общее количество $\sigma(3, N)$ всех попарно неассоциированных матриц определителя N из $M_3(\mathbb{Z})$. Тогда по формуле обращения Мебиуса (см. [15]) из этого равенства имеем

$$\sigma_0(3, N) = \sum_{d^3 | N} \mu(d) \sigma\left(3, \frac{N}{d^3}\right). \quad (*)$$

Полагая теперь $N = p^\alpha$ в силу леммы 3 будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_0(3, p^\alpha) &= \sum_{d^3 | p^\alpha} \mu(d) \sigma\left(3, \frac{p^\alpha}{d^3}\right) = \sigma(3, p^\alpha) - \sigma(3, p^{\alpha-3}) = \\ &= \frac{(p^{\alpha+2} - 1)(p^{\alpha+1} - 1)}{(p^2 - 1)(p - 1)} - \frac{(p^{\alpha-1} - 1)(p^{\alpha-2} - 1)}{(p^2 - 1)(p - 1)} = \\ &= \frac{(p^{\alpha+2} - 1)(p^{\alpha+1} - 1) - (p^{\alpha-1} - 1)(p^{\alpha-2} - 1)}{(p^2 - 1)(p - 1)}, \end{aligned}$$

т.е. мы получили общий вид каждого сомножителя доказываемого результата, и значит, формула для $\sigma_0(3, N)$ доказана для случая $N = p^\alpha$.

2°. Докажем теперь мультипликативность функции $\sigma_0(3, N)$, т.е., что $\sigma(3, NN') = \sigma(3, N) \cdot \sigma(3, N')$ при НОД $(N, N') = 1$. По определению имеем

$$\sigma(3, NN') = \sum_{\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 \tilde{\delta}_3 = NN'} (\tilde{\delta}_1)^2 \tilde{\delta}_2.$$

Условия суммирования запишем в следующем виде $N = \delta_1 \delta_2 \delta_3, N' = \delta'_1 \delta'_2 \delta'_3$, НОД $(\delta_i, \delta'_j) = 1 (i, j = 1, 2, 3); \tilde{\delta}_1 = \delta_1 \delta'_1, \tilde{\delta}_2 = \delta_2 \delta'_2, \tilde{\delta}_3 = \delta_3 \delta'_3$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \sigma(3, NN') &= \sum_{\substack{\delta_1 \delta_2 \delta_3 = N \\ \delta'_1 \delta'_2 \delta'_3 = N'}} (\delta_1 \delta'_1)^2 (\delta_2 \delta'_2) = \\ &= \sum_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 = N} \sum_{\delta'_1 \delta'_2 \delta'_3 = N'} (\delta_1^2 \delta_2) (\delta_1'^2 \delta_2') = \sigma(3, N) \cdot \sigma(3, N'). \end{aligned}$$

Но тогда в силу соотношения (*) получаем, что функция $\sigma_0(3, N)$ тоже является мультипликативной. Из леммы 3 и установленного свойства мультипликативности функции $\sigma_0(3, N)$ следует формула для $\sigma_0(3, N)$, ч.т.д.

Перейдем теперь к изложению ещё одного результата о числе $\sigma_0(3, N; A)$ примитивных неассоциированных матриц $M \in M_3(\mathbb{Z})$ определителя N , делящихся на матрицу $A \in M_3(\mathbb{Z})$. Опираясь на теорему 1, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Для числа $\sigma_0(3, N; A)$ справедливо соотношение*

$$\sigma_0(3, N; A) = \begin{cases} \prod_{p | \frac{N}{\det A}} \frac{(p^{\alpha+2}-1)(p^{\alpha+1}-1)-(p^{\alpha-1}-1)(p^{\alpha-2}-1)}{(p^2-1)(p-1)}, & \text{если } t(A)=1 \\ 0, & \text{если } t(A)>1 \end{cases} \quad (1)$$

где произведение берется по всем простым делителям числа $\frac{N}{\det A}$, при этом α - наивысшая степень простого числа p , делящего $\frac{N}{\det A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижнее равенство следует из того, что примитивная матрица не может делиться на не примитивную матрицу в кольце $M_3(\mathbb{Z})$. Докажем теперь верхнее равенство. Пусть $M_1, \dots, M_r$ - набор всех неассоциированных справа примитивных матриц третьего порядка определителя N , делящихся слева на матрицу $A \in M_3(\mathbb{Z})$, где $r = \sigma_0(3, N; A)$. Из условия делимости $A | M_i, (i = 1, \dots, r)$ следует, что $\det A | N$, где $N = \det M_i$. Тогда $M_i = A \tilde{M}_i, (i = 1, \dots, r)$, где $\tilde{M}_i \in M_3(\mathbb{Z})$. Примитивность и неассоциированность матриц $\tilde{M}_i$ устанавливается также как и в случае кольца $M_2(\mathbb{Z})$. Поэтому получаем, что $r = \sigma_0(3, \frac{N}{\det A})$. Но тогда в силу теоремы 1 получаем формулу для $\sigma_0(3, N; A)$, ч.т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *В последнее время наблюдается интерес к вопросу о классах подобия целочисленных матриц заданного порядка (см. напр. [16]-[17]). Поэтому представляет интерес обнаружить связи между проведенными ранее исследованиями, относящимися к целочисленным матрицам.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю.В. Эргодические свойства алгебраических полей. // Л.: Издательство Ленинградского университета. 1967. 210 с.
2. Малышев А.В., Пачев У.М. Об арифметике матриц второго порядка // Исследования по теории чисел. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 93, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. 1980. С. 41-86, DOI: 10.1007/BF01085126
3. Пачев У.М. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах // Исследования по теории чисел. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 93, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. 1980. С. 87-141, DOI: 10.1007/BF01085127
4. Пачев У.М. О числе приведенных целочисленных неопределенных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Чебышевский сб. 2003. Т. 4, № 3. С. 92-105.
5. Пачев У.М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70, № 3. С.167-184, DOI: 10.4213/im676
6. Пачев У.М. Об асимптотике числа приведенных целочисленных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 376-388, DOI: 10.1007/s11202-007-0031-3
7. Пачев У.М. О числе примитивных неассоциированных матриц второго порядка определителя n , делящихся на заданную матрицу // Владикавк. матем. журн. 2015. Т. 17, № 2. С. 62-67.
8. Пачев У.М. Об арифметике кольца целых матриц n -го порядка // Владикавказский математический журнал 2008. Т. 10, № 1. С. 75-78.
9. Пачев У.М., Дохов Р.А. О примитивных неассоциированных матрицах третьего порядка заданного определителя // Материалы XVII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А.И. Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2019. С. 121-123.
10. Линник Ю.В., Скубенко Б.Ф. К асимптотике целочисленных матриц третьего порядка // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 5. С. 1007-1008.
11. Линник Ю.В., Скубенко Б.Ф. Асимптотическое распределение целочисленных матриц третьего порядка // Вестн. ЛГУ: Сер. Матем. Мех. Астрон. 1964. № 13. С. 26-36.
12. Пачев У.М., Шакова Т.А. О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы, Чебышевский сб. 2019. Т. 20, № 4. С. 270-280, DOI: 10.22405/2226-8383-2018-20-4-270-280
13. Newman M. Integral matrices. Academic Press, New York, 1972, 244 p.
14. Венков Б. А. Об интегральном инварианте группы унимодулярных линейных подстановок // Учен. зап. Ленинг. ун-та. 1952. Т. 144, № 23. С. 3-25.
15. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. 180 с.

16. Сидоров С.В. О классах подобия матриц второго порядка с нулевым следом над кольцом целых чисел // Изв. вузов. Матем. 2016. № 4. С. 79–86, DOI: 10.3103/S1066369X16040101
17. Сидоров С.В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вестн. ННГУ.: Сер. матем. моделир. и оптимального управления. 2009. № 1, С. 119–127.

REFERENCES

1. Linnik, Y. V. 1967, "Ergodic properties of algebraic fields", *Leningrad, Leningrad University Press*, 210 p.
2. Malyshev, A. V., & Pachev, U. M. 1982, "Arithmetic of second-order matrices", *J Math Sci*, vol. 19, pp. 1096-1122, DOI: 10.1007/BF01085126.
3. Pachev, U. M. 1982, "Distribution of integral points on certain two-sheeted hyperboloids" *J Math Sci* vol. 19, pp. 1122-1155, DOI: 10.1007/BF01085127.
4. Pachev, U. M. 2003, "On the number of reduced integer indefinite binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 4, no. 3, pp. 92-105.
5. Pachev, U. M. 2006, "Representation of integers by isotropic ternary quadratic forms", *Izv. Math.*, vol. 70, no. 3, pp. 587-604, DOI: 10.4213/im676
6. Pachev, U. M. 2007, "On the asymptotics of the number of reduced integer binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients", *Siberian Math. J.*, vol. 48, no. 2, pp. 300-310, DOI: 10.1007/s11202-007-0031-3
7. Pachev, U. M. 2015, "On the number of primitive unassociated matrices of the second order of the determinant n , divisible by a given matrix", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 17, no. 2. pp. 62-67.
8. Pachev, U. M. 2008, "On the arithmetic of the ring of integer matrices of the n -th order", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 75-78.
9. Pachev, U. M. & Dohov, R. A. 2019, "About primitive unassociated third-order matrix of a given determinant", Materials of the XVII International Conference "Algebra, number Theory and Discrete Geometry: modern problems, applications and problems of history dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev and B. F. Skubenko, *Tula: Izdatel'stvo TGPU im. L.N. Tolstogo*, pp. 121-123.
10. Linnik, Yu. V. & Skubenko, B. F. 1962, "The asymptotic behavior of third-order integral matrices", *Sov. Math. Dokl.*, no. 3, pp. 1428-1430
11. Linnik, Yu. V.; Skubenko, B. F. 1964, "Asymptotic distribution of third-order integer matrices", *Vestnik Leningradskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, no. 13, pp. 26-36.
12. Pachev, U. M., Shakova, T. A. 2019, "On the units of the quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 270-280, DOI: 10.22405/2226-8383-2018-20-4-270-280

13. Newman M. 1972, "Integral matrices", *New York: Academic Press*, 244 p.
14. Venkov, B. A. 1952, "On the integral invariant of the group of unimodular linear substitutions", *Uchenye zapiski Leningradskogo universiteta*, vol. 144, no. 23, pp. 3-25.
15. Vinogradov, I. M. 1981, "Elements of number theory", *Moscow: Nauka*, 180 p.
16. Sidorov, S. V. 2016, "On similarity classes of second-order matrices with zero trace over the ring of integers", *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika*, no. 4, pp. 79-86, DOI: 10.3103/S1066369X16040101
17. Sidorov, S. V. 2009, "On the similarity of third-order matrices over the ring of integers having a reducible characteristic polynomial", *Vestn. NNGU.: Ser. matem. modelir. i optimal'noe upravlenie*, no. 1, pp. 119-127.

Получено 15.09.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.