ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-400-406

Абелевы группы с конечными примарными факторами

А. А. Фомин, А. В. Царев

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный педагогический университет (г. Москва).
e-mail: nikostas@mail.ru
Царёв Андрей Валерьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный педагогический университет (г. Москва).
e-mail: nikostas@mail.ru

Аннотация

Абелева группа A называется π-ограниченной для некоторого множества простых чисел π, если в любой факторгруппе A/B группы A все p-примарные компоненты $t_p(A/B)$, где $p \in \pi$, конечны. Класс π-ограниченных абелевых групп был введен Е. В. Соколовым при изучении $\mathcal{F}_\pi$-отделимости и π'-изолированности подгрупп в общей теории групп. Описание периодических π-ограниченных групп тривиально. Е. В. Соколовым было показано, что описание смешанных π-ограниченных групп сводится к периодическому случаю и случаю без кручения. В статье подробно рассмотрен класс π-ограниченных абелевых групп без кручения. Показано, что этот класс совпадает с классом π-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга.

В заключении рассмотрены абелевы группы, удовлетворяющие условию $(*)$, т.е. такие абелевы группы, все факторгруппы которых не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$, где π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Понятно, что все π-ограниченные группы удовлетворяют условию $(*)$. Нами доказано, что произвольная абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$. Также в работе приводится конструкция, дающая при каждом бесконечном множестве простых чисел π пример нерасщепляемой смешанной абелевой группы ранга 1, удовлетворяющей условию $(*)$.

Ключевые слова: абелева группа, отделимость подгрупп, π-ограниченная абелева группа, π-локальная абелева группа без кручения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. А. Фомин, А. В. Царев Абелевы группы с конечными примарными факторами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 400–406.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-400-406

Abelian groups with finite primary quotients

A. A. Fomin, A. V. Tsarev

Fomin Alexander Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nikostas@mail.ru
Tsarev Andrey Valer'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nikostas@mail.ru

Abstract

An abelian group A is called π-bounded for a set of prime numbers π, if all p-primary components $t_p(A/B)$ are finite for every subgroup $B \subset A$ and for every $p \in \pi$. E. V. Sokolov has introduced the class of π-bounded groups investigating $\mathcal{F}_\pi$-separable and π'-isolated subgroups in the general group theory. The description of torsion π-bounded groups is trivial. E. V. Sokolov has proved that the description of mixed π-bounded groups can be reduced to the case of torsion free groups. We consider the class of π-bounded torsion free groups in the present paper and we prove that this class of groups coincides with the class of π-local torsion free abelian groups of finite rank.

We consider also abelian groups satisfying the condition $(*)$, that is such groups that their quotient groups don't contain subgroups of the form $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ for all prime numbers $p \in \pi$, where π is a fixed set of prime numbers. It is clear that all π-bounded groups satisfy the condition $(*)$. We prove that an abelian group A satisfies the condition $(*)$ if and only if both groups $t(A)$ and $A/t(A)$ satisfy the condition $(*)$. We construct also an example of a non-splitting mixed group of rank 1, satisfying the condition $(*)$, for every infinite set π of prime numbers.

Keywords: abelian group, separability of subgroups, π-bounded abelian group, π-local torsion free abelian group.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. A. Fomin, A. V. Tsarev, 2021, "Abelian groups with finite primary quotients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 400–406.

1. Введение

Пусть A — произвольная абелева группа, π — некоторое непустое подмножество множества простых чисел Π. Рассмотрим следующие условия:

$(*)$ все факторгруппы группы A не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$;

$(**)$ в произвольной факторгруппе A/B группы A все p-примарные компоненты $t_p(A/B)$, где $p \in \pi$, конечны.

Абелевы группы с условиями $(*)$ и $(**)$ были введены Е. В. Соколовым в [1] в связи с изучением вопросов $\mathcal{F}_\pi$-отделимости и π'-изолированности.

Понятие отделимости подгруппы в произвольном классе групп $\mathcal{C}$ было введено А. И. Мальцевым в [2]. Напомним, что подгруппа H группы G называется *$\mathcal{C}$-отделимой* в этой группе, если для любого элемента $g \in G \setminus H$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $\varphi(g) \notin \varphi(H)$.

Подгруппа H группы G называется *π'-изолированной* в этой группе, если для любого элемента $g \in G$ и любого простого числа $q \notin \pi$ из включения $g^q \in H$ следует, что $g \in H$. В случае, если G — абелева группа, то π'-изолированность ее подгруппы H означает, что H является *сильно q-сервантной* при всех простых $q \notin \pi$ (подробнее см. [3, § 3]).

Говорят, что группа *обладает свойством* $\mathfrak{S}_\pi$, если все ее π'-изолированные подгруппы являются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми, где $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных групп, простые делители порядков которых принадлежат множеству π.

Для коммутативного случая Е. В. Соколовым доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Абелева группа обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $(*)$.*

Определение 1 [1]. Абелева группа, удовлетворяющая условию $(**)$, называется *π-ограниченной.*

В данной заметке мы подробнее рассмотрим π-ограниченные абелевы группы и их соотношение с абелевыми группами, удовлетворяющими условию $(*)$.

Всюду далее в работе под группой мы будем подразумевать абелеву группу, записанную аддитивно. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ группы A будем называть линейно независимыми (над $\mathbb{Z}$), если равенство $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$). p-рангом группы A называется размерность $\mathbb{Z}_p$-пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать периодическую и p-примарную части группы A.

Другие используемые в статье определения и понятия стандартны и соответствуют монографии Л. Фукса [4], [5] и книге П. А. Крылова, А. В. Михалева, А. А. Туганбаева [9].

2. π-ограниченные группы без кручения

Во-первых, понятно, что все π-ограниченные группы удовлетворяют условию $(*)$ при том же самом π. Обратное, очевидно, не верно. Кроме того, если группа A удовлетворяет условию $(*)$ или условию $(**)$, то среди факторгрупп группы A не может быть группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$. Последнее условие мы будем активно использовать для характеризации π-ограниченных групп и групп, удовлетворяющих условию $(*)$.

Лемма 2. *Если абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$, то $r(A) < \infty$.*

Доказательство. Отметим, что $\overline{A} = A/t(A)$ — группа без кручения и $r(\overline{A}) = r(A)$. Предположим, что $r(\overline{A}) = \infty$, тогда возьмём произвольные линейно независимые элементы $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \overline{A}$ и постоим группы

$$B = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle \text{ и } : C = \langle pa_0, pa_1 - a_0, pa_2 - a_1, pa_3 - a_2, \ldots\rangle,$$

где $p \in \pi$. Так как $B/C = \langle a_0 + C, a_1 + C, a_2 + C, \ldots\rangle$, и

$$p(a_0 + C) = 0, : p(a_1 + C) = a_0 + C, : p(a_2 + C) = a_1 + C, : \ldots,$$

то $B/C = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Тогда B/C является прямым слагаемым группы $\overline{A}/C$, поскольку B/C — делимая подгруппа в $\overline{A}/C$. Следовательно, группа B/C является факторгруппой группы $\overline{A}$, а значит и группы A, что противоречит условию $(*)$. $\square$

Описание периодических абелевых групп, удовлетворяющих условию $(*)$ или условию $(**)$, тривиально. Именно,

> *периодическая группа A удовлетворяет условию $(*)$ (условию $(**)$) тогда и только тогда, когда $t_p(A)$ — ограниченная группа (конечная группа) при любом $p \in \pi$.*

В связи с этим мы далее сосредоточим свое внимание на случае групп без кручения и смешанных групп.

Предложение 3 [1]. *Группа A является π-ограниченной тогда и только тогда, когда все p-примарные компоненты ($p \in \pi$) группы A конечны и все факторгруппы группы $A/t(A)$ не содержат прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$.* □

Для групп без кручения очевидным образом получаем

Следствие 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Группа без кручения A является π-ограниченной тогда и только тогда, когда все факторгруппы группы A не содержат прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$;*

2. *Для групп без кручения условия $(*)$ и $(**)$ равносильны.* □

Рассмотрим некоторые дополнительные сведения о группах без кручения конечного ранга, принадлежащие, в основном, Ф. Ричмену [7] и Р. Уорфилду [6] (подробнее также см. [8][§§ :0;1]).

Пусть A — группа без кручения конечного ранга n со свободной подгруппой $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$. Тогда $r(A/F) = r(A) - r(F) = 0$ и A/F — периодическая группа, имеющая вид

$$A/F = \bigoplus_{p \in \Pi} t_p(A/F) \cong \bigoplus_{p \in \Pi} \Big[\bigoplus_{i=1}^{r_p} \mathbb{Z}_{p^{k_{ip}}} \oplus \bigoplus_{n-r_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \Big]. \qquad (***)$$

Здесь $r_p = r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p} A/pA$ — p-ранг группы A и все k_{ip} — целые неотрицательные числа. Заметим, что в разложении $(***)$ количество квазициклических прямых слагаемых не зависит от выбора свободной подгруппы F, а целиком определяется группой A — для каждого простого p их количество равно $r(A) - r_p(A)$.

Абелева группа A называется *π-локально свободной*, если все ее p-локализации $\mathbb{Q}_p \otimes A$, где $p \in \pi$, являются свободными $\mathbb{Q}_p$-модулями (здесь $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p). Хорошо известно, что абелева группа без кручения A конечного ранга является π-локально свободной тогда и только тогда, когда в ее разложении $(***)$ нет прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$, т.е. когда $r(A) = r_p(A)$ при всех $p \in \pi$.

Теорема 5. *Групп без кручения является π-ограниченной тогда и только тогда, когда она π-локально свободная группа конечного ранга.*

Доказательство. Если A — π-ограниченная группа, то A — группа конечного ранга (по лемме 2) и в разложении $(***)$ группы A нет прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$. Следовательно, A — π-локально свободная группа.

Пусть A — π-локально свободная группа, покажем, что A — π-ограниченная группа. В силу следствия 4 нам достаточно проверить, что все факторгруппы группы A не содержат прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$. Предположим противное, найдется такая подгруппа B группы A, что $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторого $p \in \pi$. Так как A/B — периодическая группа, то $r(A/B) = 0$ и, значит, $r(A) = r(B)$. Пусть F — свободная подгруппа группы B, такая что $r(B) = r(F)$. Тогда

$$A/B = [A/F]/[B/F] = t_p(A/F)/t_p(B/F).$$

Поскольку A — π-локально свободная группа, то $t_p(A/F)$ — конечная группа, а значит, и $A/B = t_p(A/F)/t_p(B/F)$ — тоже конечная группа. Получили противоречие. □

3. Смешанные группы, удовлетворяющие условию $(*)$

Теорема 6. *Произвольная группа A удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, т.е. когда все группы $t_p(A)$, где $p \in \pi$, ограниченные и $A/t(A)$ — π-локально свободная группа без кручения конечного ранга.*

Доказательство. Если A удовлетворяет условию $(*)$, то из его определения очевидным образом следует, что группы $t(A)$ и $A/t(A)$ тоже удовлетворяют условию $(*)$.

Обратно, пусть группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, покажем, что группа A удовлетворяет условию $(*)$. Предположим противное, найдется подгруппа B группы A такая, что $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторого $p \in \pi$. Так как $t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, то группа $t_p(A)$ ограниченная, следовательно, $A = t_p(A) \oplus A'_p$, где группа A'_p не содержит элементов порядка p (см. [10] или [4, теорема 27.5]). Аналогичное разложение получаем и для группы B, $B = t_p(B) \oplus B'_p$. Тогда $A/B = (t_p(A)/t_p(B)) \oplus (A'_p/B'_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Учитывая ограниченность группы $t_p(A)$, получаем, что $t_p(A)/t_p(B) = 0$ и $t_p(A) = t_p(B)$. Пусть q — произвольное простое число, отличное от p. Поскольку $A/B = (t_q(A)/t_q(B)) \oplus (A'_q/B'_q) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $t_q(A)/t_q(B)$ — q-примарная группа, то $t_q(A)/t_q(B) = 0$ и $t_q(A) = t_q(B)$. Таким образом, $t(A) = t(B)$. Учитывая данное равенство, получаем

$$A/B \cong [A/t(A)]/[B/t(B)] = \mathbb{Z}_{p^\infty},$$

которое противоречит тому, что группа $A/t(A)$ удовлетворяет условию $(*)$. □

Пример. Для бесконечного множества π рассмотрим кольцо $R = \prod\limits_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$ и построим в нем подгруппу A, сервантно порожденную единицей кольца R,

$$A = \langle 1 \rangle_* \subset \prod_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p, \quad A = \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{Z}\ \ mr = n1\}.$$

Очевидно, что $t(A) = t(R) = \bigoplus\limits_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$. Так как $R/t(R) \cong \bigoplus\limits_{c} \mathbb{Q}$ и A — сервантная подгруппа ранга 1 в R, то $A/t(A) \cong \mathbb{Q}$.

Далее, пусть $H = \langle 1/p \mid p \in \pi \rangle \subset \mathbb{Q}$. Рассмотрим группу B — прообраз группы H в группе A при естественном отображении $A \to A/t(A) \cong \mathbb{Q}$. Тогда $t(B) = t(A) = \bigoplus\limits_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$ и $B/t(B) \cong H$, т.е. группа B удовлетворяет всем условиям предложения 3, следовательно, B — π-ограниченная группа.

Предположим, что группа B расщепляется, т.е. $B = t(B) \oplus C$, где $C \cong B/t(B) \cong H$. Очевидно, что 1 — единица кольца R — лежит в группе B. Тогда $1 = t + c$, где $t \in t(B)$, $c \in C$, и $m1 = mc$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, а значит, $m1 \in C$. Заметим, что любой элемент группы C делится почти на все простые числа $p \in \pi$ (так как это справедливо для элементов группы H и $H \cong C$). Но простое число p делит элемент $m1$ в группе C (и в R), только если p делит целое число m. Получили противоречие. Следовательно, группа B не расщепляется.

4. Заключение

Заметим, что группы со свойством $(*)$ близки к абелевым группам над которыми все правые полиномы финитно аппроксимируемы. А именно, И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина доказали следующее утверждение.

Теорема 7 [11]. *Над группой G (не обязательно абелевой) все правые полиномы финитно аппроксимируемы тогда и только тогда, когда каждая подгруппа группы G является пересечением подгрупп конечного индекса.*

Для случая абелевых групп отсюда несложно получается

Следствие 8. *Над абелевой группой A все правые полиномы финитно аппроксимируемы тогда и только тогда, когда все факторгруппы группы A не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для любого $p \in P$, где P — множество всех простых чисел.*

Кроме того, абелевы группы с условием $(*)$ могут быть использованы при изучении абелевых групп, как коретрактабельных $\mathbb{Z}$-модулей.

Напомним, что R-модуль M называется *коретрактабельным*, если для любого собственного подмодуля $L \subset M$ верно $\mathrm{Hom}_R(M/L, M) \neq 0$ (подробнее о коретрактабельных модулях см. [12]–[15]). Если A — редуцированная абелева группа, не удовлетворяющая условию $(*)$, то в ней найдется такая подгруппа B, что $A/B \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ при некотором простом p. В таком случае $\mathrm{Hom}\,(A/B, A) = 0$, а значит, условие $(*)$ является необходимым условием коретрактабельности редуцированных групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2014. Том 55, №6. С. 1381–1390.

2. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановского гос. пед. ин-та. 1958. Том 18. P. 49-60.

3. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №5. С. 157–196.

4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. I. М.: Мир, 1973.

5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. II. М.: Мир, 1977.

6. Warfield R. B. Homomorphisms and duality for torsion-free groups // Math. Z. 1968. Vol. 107. P. 189–200.

7. Richman F. A class of rank 2 torsion free groups // Studies on Abelian Groups. Paris, 1968. P. 327–333.

8. Arnold D. M. Finite rank torsion free abelian groups and rings. Lecture Notes in Math. Vol. 931. Springer. NY, 1982.

9. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.

10. Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. 1941. Том 9(51), №1. С. 165-181.

11. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами // Математические заметки СВФУ. 2014. Том 21, №3. С. 60-67.

12. Amini B., Ershad M., Sharif H. Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. 2009. Vol. 86, No. 3. P. 289–304.

13. Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Ретрактабельные и коретрактабельные модули // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Том 19, №2. С. 5–20.

14. Ẑemliĉka J. Completely coretractable rings // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2013. Vol. 39, No. 3. P. 523-528.

15. Артемов Д. Ю. Ретрактабельные и коретрактабельные абелевы группы // в печати.

REFERENCES

1. Sokolov, E. V. 2014, "Separability of subgroups of nilpotent groups in the class of finite π-groups", *Siberian Math. J.*, vol. 55, no. 6, pp. 1126–1132.
2. Mal'tsev, A. I. 1958, "On homomorphisms onto finite groups", *Uchenye zapiski IGPI*, vol. 18., pp. 49-60 (russian).
3. Fomin, A. A. 2018, "On the quotient divisible group theory. II", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 457–483.
4. Fuchs, L. 1970, "Infinite abelian groups", vol. 1, Academic press.
5. Fuchs, L. 1973, "Infinite abelian groups", vol. 2, Academic press.
6. Warfield, R. B. 1968, "Homomorphisms and duality for torsion-free groups", *Math. Z.*, vol. 107, pp. 189–200.
7. Richman, F. 1968, "A class of rank 2 torsion free groups", *Studies on Abelian Groups*, Paris, pp. 327–333.
8. Arnold, D. M. 1982, "Finite rank torsion free abelian groups and rings", *Lecture Notes in Math.*, vol. 931, Springer, NY.
9. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V. & Tuganbaev, A. A. 2013, "Endomorphism rings of Abelian groups", Springer Science & Business Media.
10. Kulikov, L. Ya. 1941, "On the theory of abelian groups of arbitrary power", *Mat. Sbornik*, vol. 16, pp. 129–162 (russian).
11. Kozhuhov, I. B. & Khalilullina, A. R. 2014. "Semigroups with finitely approximable polygons", *Mat. zametki SVFU*, vol. 21, no. 3, pp. 60-67 (russian).
12. Amini, B., Ershad, M. & Sharif, H. 2009, "Coretractable modules", *J. Aust. Math. Soc.*, vol. 86, no. 3, pp. 289–304.
13. Abyzov, A. N. & Tuganbaev, A. A. 2016, "Retractable and Coretractable Modules", *J. Math. Sci.*, vol. 213, no. 2, pp. 132–142.
14. Ẑemliĉka, J. 2013, "Completely Coretractable Rings", *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 39, no. 3, pp. 523-528.
15. Artemov D. Yu., "Retractable and Coretractable Abelian Groups", to appear.

Получено 12.08.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.