ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК 511

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. Н. Васильев (г. Астана, Казахстан)

Аннотация

В работе изучены некоторые свойства распределения членов обобщенной последовательности Фибоначчи по бесквадратному модулю и получены следствия из этих свойств.

Ключевые слова: обобщенная последовательность Фибоначчи, тригонометрические суммы, плотность множества.

UPPER BOUND FOR QUADRATIC MEAN OF SPECIAL RATIONAL EXPONENTIAL SUMS AND THEIR APPLICATIONS

A. N. Vassilyev (Astana, Kazakhstan)

Abstract

In this paper we obtain some arithmetic properties of generalized Fibonacci sequence and consider their applications.

Keywords: Generalized Fibonacci, exponential sums, set's density.

В первой части работы мы рассмотрим обобщенную последовательность Фибоначчи и докажем верхнюю оценку для среднего квадратического рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи. В определенном смысле эта оценка отражает ряд арифметических свойств указанной последовательности, а именно, распределение ее членов по модулю любого бесквадратного числа.

Во второй части будет приведено опирающееся на доказанную в первой части оценку решение одной аддитивной задачи, связанной с обобщенной последовательностью Фибоначчи.

1. Свойства обобщенной последовательности Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи, как известно, задается следующим образом: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Обобщенная последовательность Фибоначчи задается тем же рекуррентным соотношением и двумя начальными натуральными членами, то есть: $G_1 = a, G_2 = b, G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, где a, b – натуральные числа. Вторую последовательность на протяжении всей работы будем считать наперед заданной.

Пусть, на протяжении всей работы, d – бесквадратное (не делящееся ни на какой квадрат простого) натуральное число, большее 1 и взаимно простое с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$ (это экзотическое условие будет мотивировано позже). Через p будем обозначать, как обычно, простое число. В первой части это будут простые, взаимно простые с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$. Во второй части простые, выступающие делителями какого-нибудь d, также будут предполагаться удовлетворяющими этому дополнительному условию.

Введем малый $d-$период последовательности Фибоначчи

$$t(d) = \min\{\tau : \tau \geqslant 1, d\,|F_\tau\}$$

и большой $d-$период последовательности Фибоначчи

$$T(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geqslant 1, F_{n+\mathrm{T}} \equiv F_n \pmod d\ \forall n\}.$$

Аналогично, большой $d-$период обобщенной последовательности Фибоначчи есть

$$T'(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geqslant 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n \pmod d\ \forall n\}$$

(периодичность по любому модулю доказывается просто).

Аналога малого $d-$периода может не существовать (например, если $a = 2,\ b = 1,\ d = 5$).

Выделим необходимые нам свойства последовательности Фибоначчи в следующую лемму:

Лемма 1.

А) $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}$ *(формула Бине);*

Б) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;

В1) $d|\,F_n \Longleftrightarrow t(d)\,|n$;

В2) $\left\{\begin{array}{ll} F_\alpha \equiv F_\beta & \pmod d \\ F_{\alpha+1} \equiv F_{\beta+1} & \pmod d \end{array}\right. \Leftrightarrow T(d)\,|(\alpha-\beta)$;

Г) $\dfrac{T\,(d)}{t\,(d)} \in \{1, 2, 4\}$;

Д) $d = p_1 p_2 \dots p_s \Rightarrow t\,(d) = [t\,(p_1)\,, t\,(p_2)\,, \dots, t\,(p_s)]$;

Е1) $\left\{\begin{array}{ll} F_\alpha \equiv F_\beta & \pmod p \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} & \pmod p \end{array}\right. \Rightarrow t\,(p)\,|(\alpha-\beta)$ *или* $t\,(p)\,|\gamma \Rightarrow t\,(p)\,|(\alpha-\beta)\,\gamma$;

Е2) $\left\{\begin{array}{ll} F_\alpha \equiv F_\beta & \pmod d \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} & \pmod d \end{array}\right. \Rightarrow t\,(d)\,|(\alpha-\beta)\,\gamma$.

Доказательство. Свойства А, Б, В1, В2, Г, Д хорошо известны (см., например, [1] и [2]).

Докажем два оставшихся свойства.

Начнем с Е1. По свойству Б имеем: $F_{\alpha+\gamma} = F_\alpha F_{\gamma-1} + F_{\alpha+1} F_\gamma$, $F_{\beta+\gamma} = F_\beta F_{\gamma-1} + F_{\beta+1} F_\gamma$, поэтому из сравнений

$$\left\{\begin{array}{ll} F_\alpha \equiv F_\beta & \pmod p \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} & \pmod p \end{array}\right.$$

следует, что $p\,|(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})\,F_\gamma$, откуда $p\,|F_\gamma$ или $p\,|(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$. Из $p\,|F_\gamma$, согласно свойству В1, следует, что $t\,(p)\,|\gamma$, а из $p\,|(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$, согласно свойству В2, следует, что $T\,(p)\,|(\alpha-\beta)$, откуда, согласно свойству Г, $t\,(p)\,|(\alpha-\beta)$.

Теперь докажем свойство Е2. Пусть $d = p_1 p_2 \dots p_s$. Из сравнений

$$\left\{\begin{array}{ll} F_\alpha \equiv F_\beta & \pmod d \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} & \pmod d \end{array}\right.$$

для любого $p_i\,|d$ следуют сравнения

$$\left\{\begin{array}{ll} F_\alpha \equiv F_\beta & \pmod{p_i} \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} & \pmod{p_i} \end{array}\right.,$$

откуда для всякого $p_i\,|d$ по свойству Е1 имеем: $t\,(p_i)\,|(\alpha-\beta)\,\gamma$, что, согласно свойству Д, означает, что $t\,(d)\,|(\alpha-\beta)\,\gamma$. Лемма доказана. □

Теперь докажем некоторые свойства обобщенной последовательности Фибоначчи.

Лемма 2.

А) $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$;

Б) $T'\,(d)\,|T\,(d)$;

В) $t\,(d)\,|T'\,(d)$;

Г) $t\,(d) \leqslant T'\,(d) \leqslant T\,(d) \leqslant 4t\,(d)$;

Д1) $\left\{\begin{array}{c} G_\alpha \equiv G_\beta (mod\ p) \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (mod\ p) \end{array}\right. \Rightarrow t\,(p)\,|(\alpha-\beta)\ \ или\ t\,(p)\,|\gamma\ \ \Rightarrow t\,(p)\,|(\alpha-\beta)\,\gamma\,;$

Д2) $\left\{\begin{array}{c} G_\alpha \equiv G_\beta (mod\ d) \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (mod\ d) \end{array}\right. \Rightarrow t\,(d)\,|(\alpha-\beta)\,\gamma\,.$

Доказательство. Первое соотношение хорошо известно.

Соотношение Б доказывается тривиально.

Соотношение Г следует из соотношений Б, В и соотношения Г леммы 1.

Соотношение Д2 вытекает из соотношения Д1.

Докажем пункт Д1. Используя соотношение А, имеем:

$$\left\{\begin{array}{ll} aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1} & \pmod p \\ aF_{\alpha+\gamma-2}+bF_{\alpha+\gamma-1} \equiv aF_{\beta+\gamma-2}+bF_{\beta+\gamma-1} & \pmod p \end{array}\right. .$$

Далее используем соотношение Б леммы 1 и получаем:

$$aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1} \pmod p$$

и

$$a\,(F_{\alpha-2}F_{\gamma-1}+F_{\alpha-1}F_\gamma)+b\,(F_{\alpha-1}F_{\gamma-1}+F_\alpha F_\gamma) \equiv$$
$$\equiv a\,(F_{\beta-2}F_{\gamma-1}+F_{\beta-1}F_\gamma)+b\,(F_{\beta-1}F_{\gamma-1}+F_\beta F_\gamma) \pmod p,$$

что преобразуется к виду: $aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1} \pmod p$ и

$$F_{\gamma-1}\,(aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1})+F_\gamma\,(aF_{\alpha-1}+bF_\alpha) \equiv$$
$$\equiv F_{\gamma-1}\,(aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1})+F_\gamma\,(aF_{\beta-1}+bF_\beta) \pmod p,$$

откуда:

$$\left\{\begin{array}{ll} aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1} & \pmod p \\ F_\gamma\,(aF_{\alpha-1}+bF_\alpha) \equiv F_\gamma\,(aF_{\beta-1}+bF_\beta) & \pmod p \end{array}\right. .$$

Отсюда либо $p\,|F_\gamma$, что, согласно пункту В1 леммы 1 означает, что $t\,(p)\,|\gamma$, либо

$$\left\{\begin{array}{ll} aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1} & \pmod p \\ aF_{\alpha-1}+bF_\alpha \equiv aF_{\beta-1}+bF_\beta & \pmod p \end{array}\right. ,$$

что преобразуется к виду

$$\left\{\begin{array}{ll} a\,(F_{\alpha-2}-F_{\beta-2})+b\,(F_{\alpha-1}-F_{\beta-1}) \equiv 0 & \pmod p \\ b\,(F_{\alpha-2}-F_{\beta-2})+(a+b)\,(F_{\alpha-1}-F_{\beta-1}) \equiv 0 & \pmod p \end{array}\right.$$

и приводится с помощью правила Крамера в поле вычетов по модулю p к

$$\left\{\begin{array}{ll} F_{\alpha-2}-F_{\beta-2} \equiv 0 & \pmod p \\ F_{\alpha-1}-F_{\beta-1} \equiv 0 & \pmod p \end{array}\right.$$

поскольку

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = a^2 + ab - b^2 \not\equiv 0 \pmod p,$$

откуда по свойству В2 леммы 1 $T(p)\,|(\alpha-\beta)$ и, следовательно, $t(p)\,|(\alpha-\beta)$.

Теперь докажем пункт В.

Поскольку $G_1 \equiv G_{1+T'(d)} \pmod d$ и $G_2 \equiv G_{2+T'(d)} \pmod d$, то по свойству Д2 $t(d)\,|T'(d)$. Лемма доказана. $\square$

Далее, рассмотрим $A(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2$, где a_k — количество членов конечной последовательности $G_1, G_2, \ldots, G_u$, сравнимых с k по модулю d. Используя аппарат тригонометрических сумм, нетрудно вывести соотношение

$$A(d,u) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i \frac{aG_n}{d}}\right|^2.$$

Следующая теорема является конечной целью первой части. Для краткости, $t(d) = t,\ T(d) = T,\ T'(d) = T'$.

Теорема 1. *Для $u \leqslant T'$ имеет место оценка $A(d,u) \leqslant B(d,u)$, где*

$$B(d,u) = \begin{cases} 3u-2, & \text{если} \quad u < \sqrt{t}+1 \\ 7u^2 t^{-\frac14}, & \text{если} \quad \sqrt{t}+1 \leqslant u \leqslant t^{\frac34} \\ 14u^2 t^{-\frac18}, & \text{если} \quad t^{\frac34} < u \leqslant T' \end{cases}.$$

Если $u > T'$, то $A(d,u) \leqslant 56u^2 t^{-\frac18}$.

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на несколько шагов.

1. Зафиксируем $k,\ 1 \leqslant k \leqslant d$.

Пусть $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{a_k} \leqslant u$ — все j, для которых $G_j \equiv k \pmod d$.

Обозначим $b_h = j_{h+1} - j_h,\ 1 \leqslant h \leqslant a_k - 1,\ b_h \geqslant 1$. Тогда $b_1 + \cdots + b_{a_k-1} = j_{a_k} - j_1 \leqslant u-1$.

Пусть $1 \leqslant \rho_1 < \cdots < \rho_s$ — все различные числа, встречающиеся в последовательности $b_1, \ldots, b_{a_k-1}$. Имеем:

$$\sum_{v=1}^{s} c_v \rho_v \leqslant u-1, \quad \sum_{v=1}^{s} c_v = a_k - 1.$$

2. Зафиксируем v.

Пусть $1 \leqslant h_1 < \cdots < h_{c_v} \leqslant a_k - 1$ — все индексы h, такие, что $b_k = \rho_v$. Согласно пункту Д2 леммы 2, поскольку

$$\begin{cases} G_{j_{h_i}} \equiv G_{j_{h_i+1}} & \pmod d \\ G_{j_{h_{i+1}}} \equiv G_{j_{h_{i+1}+1}} & \pmod d \end{cases}$$

и $j_{h_i+1}-j_{h_i}=j_{h_{i+1}+1}-j_{h_{i+1}}$, то $t|\left(j_{h_i+1}-j_{h_i}\right)\left(j_{h_{i+1}}-j_{h_i}\right)$, откуда $\rho_v\left(j_{h_{i+1}}-j_{h_i}\right)\geqslant t$ для всех $1\leqslant i\leqslant c_v-1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{c_v-1}\frac{t}{\rho_v}\leqslant\sum_{i=1}^{c_v-1}\left(j_{h_{i+1}}-j_{h_i}\right)\leqslant u-1,$$

и, значит, $c_v\leqslant\frac{(u-1)\rho_v}{t}+1$.

3. Итак, имеем:

$$\begin{cases} c_v\leqslant\dfrac{(u-1)\,\rho_v}{t}+1\\ \displaystyle\sum_{v=1}^{s}c_v\rho_v\leqslant u-1\\ \displaystyle a_k=1+\sum_{v=1}^{s}c_v\end{cases}.$$

Пусть теперь $w\,(q)$ — количество таких v, что $c_v=q$.

Поскольку все ρ_v различны, то

$$u-1\geqslant\sum_{v=1}^{s}c_v\rho_v\geqslant\sum_{v:\ c_v=q}c_v\rho_v\geqslant q\,(1+2+\cdots+w\,(q)),$$

откуда $w\,(q)\leqslant\left(\frac{2(u-1)}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$. С другой стороны,

$$u-1\geqslant\sum_{v=1}^{s}c_v\rho_v\geqslant\sum_{v=1}^{s}\frac{t\,(c_v-1)}{(u-1)}c_v,$$

поэтому

$$\sum_{v=1}^{s}c_v\,(c_v-1)\leqslant\frac{(u-1)^2}{t}.$$

4. а) Рассмотрим случай, когда $u<\sqrt{t}+1$.

Рассмотрим все пары индексов (n_1,n_2), такие, что $1\leqslant n_1<n_2\leqslant u$ и $G_{n_1}\equiv G_{n_2}\pmod d$. Если среди них найдутся две различные пары (n_1,n_2), (n'_1,n'_2), для которых $n_2-n_1=n'_2-n'_1$, то, согласно пункту Д2 леммы 2, $t\,|(n_2-n_1)\,(n'_1-n_1)$, откуда $t\leqslant|(n_2-n_1)\,(n'_1-n_1)|\leqslant(u-1)^2<t$ — противоречие. Значит, все разности индексов в таких парах различны. А теперь посчитаем количество всех таких пар, и, соответственно, всех разностей индексов в них. Таких разностей ровно

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{a_k\,(a_k-1)}{2}.$$

Но всех возможных значений разности индексов в указанном промежутке ровно $u-1$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k\,(a_k-1)}{2} \leqslant u-1,$$

откуда $A\,(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2 \leqslant 3u-2$.

б) Теперь рассмотрим случай, когда $u \geqslant \sqrt{t}+1$.

Тогда все $c_v \leqslant \frac{(u-1)}{\sqrt{t}} + 1$, откуда

$$s = \sum_{1 \leqslant q \leqslant \frac{u-1}{\sqrt{t}}+1} w\,(q) \leqslant \sum_{1 \leqslant q \leqslant \frac{u-1}{\sqrt{t}}+1} \left(\frac{2u-2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 4ut^{-\frac{1}{4}}.$$

Далее,

$$a_k = 1 + \sum_{v=1}^{s} c_v,$$

$$\left(\sum_{v=1}^{s} c_v\right)^2 \leqslant s\left(\sum_{v=1}^{s} c_v^2\right) \leqslant \frac{s(u-1)^2}{t} + s\sum_{v=1}^{s} c_v,$$

отсюда

$$\left(\sum_{v=1}^{s} c_v - \frac{s}{2}\right)^2 \leqslant \frac{s^2}{4} + \frac{s(u-1)^2}{t}$$

и, значит,

$$\sum_{v=1}^{s} c_v \leqslant s + u\sqrt{\frac{s}{t}} \leqslant 4ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}.$$

Получаем для всякого k:

$$a_k = 1 + \sum_{v=1}^{s} c_v \leqslant 5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}.$$

Имеем:

$$A\,(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2 \leqslant (a_1 + \cdots + a_d)\cdot \max a_k \leqslant u\cdot\left(5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}\right).$$

Согласно свойству Г леммы 2, $t \leqslant T' \leqslant T \leqslant 4t$. Тем самым, если $\sqrt{t}+1 \leqslant u \leqslant t^{\frac{3}{4}}$, то

$$A\,(d,u) \leqslant u\cdot\left(5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}\right) \leqslant 7u^2t^{-\frac{1}{4}}.$$

Если же $t^{\frac{3}{4}} < u \leqslant T'$, то

$$A\,(d,u) \leqslant u\cdot\left(5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}\right) \leqslant 7u^{\frac{5}{2}}t^{-\frac{5}{8}} \leqslant 14u^2t^{-\frac{1}{8}}.$$

И, наконец, если $u > T'$, то, исходя непосредственно из определения $A(d, u)$, получаем:

$$A(d, u) \leqslant \left(\frac{u}{T'} + 1\right)^2 A(d, T') \leqslant 56u^2 t^{-\frac{1}{8}}.$$

Теорема доказана. □

2. Аналог теоремы Романова для обобщенных чисел Фибоначчи

В 1934 году Н. П. Романов доказал ([3]), что сумма множества простых чисел и множества натуральных степеней фиксированного целого числа $a \geqslant 2$ образует множество положительной плотности (в смысле плотности по Шнирельману), иными словами,

$$\varliminf_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} card\left\{n : n \leqslant x,\ n = p + a^m\right\}\right) > 0$$

(через $cardX$ обозначено количество элементов множества X).

В дальнейшем были получены некоторые аналоги этой теоремы. Например, в 1951 году П. Эрдеш (P. Erdos) заменил ([4]) в теореме Романова степени a^m значениями многочлена с целыми коэффициентами от степени, то есть $f(a^m)$, где f – не равный константе многочлен с целыми коэффициентами.

В. Н. Чубариковым была поставлена задача получения аналога теоремы Романова для чисел Фибоначчи. В неопубликованной к настоящему времени работе "On the sum of a prime and a Fibonacci number", выложенной в архиве (arXiv: 1011.0173v1 [math.NT] 31 Oct 2010) и поданной в журнал International Journal of Number Theory, К. Ли (Lee K. S. Enoch) приводит доказательство этого аналога.

Здесь мы доказываем более общую теорему, используя другой подход, а именно, опираясь на оценку, полученную в первой части.

Теорема 2. *Сумма множества простых чисел и множества обобщенных чисел Фибоначчи (наперед заданных) имеет положительную плотность (по Шнирельману), то есть*

$$\varliminf_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} card\left\{n : n \leqslant x,\ n = p + G_m\right\}\right) > 0.$$

Доказательство. Наше доказательство будет проведено в духе доказательства теоремы Романова, приведенном на стр. 191-197 в [5]. Сформулируем несколько лемм из [5], которые нам понадобятся.

Лемма 3. **([5], стр. 60):** *Пусть b — четное целое ненулевое число. Имеет место оценка*

$$card\left\{p : p \leqslant x,\ |p+b| - \textit{простое}\right\} \leqslant c_1 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Здесь константа c_1 — абсолютная, то есть не зависит от b.

Лемма 4. **([5], стр. 28)** *Существует такая константа $c_2 > 0$, что*

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = c_2 \ln x + O(1).$$

Лемма 5. *(следствие из предыдущей леммы) Пусть p_n – n-ое простое число. Тогда*

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = O(\ln N).$$

Лемма 6. *Обозначим*

$$f(n) = f(n,x) = card\left\{(p, G_m) : p \leqslant x,\ G_m \leqslant x,\ p + G_m = n\right\}.$$

Если существует такая константа c_3, что для всех $x \geqslant x_0$ (то есть начиная с какого-то фиксированного x_0) справедливо неравенство

$$\sum_{n \leqslant x} f^2(n,x) \leqslant c_3 \sum_{n \leqslant x} f(n,x),$$

то существует такая константа $c_4 > 0$, что для всех $x \geqslant x_0$ справедливо неравенство

$$card\left\{n :\ n \leqslant x,\ f(n,x) > 0\right\} \geqslant c_4 x.$$

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждениям, приведенным в [5] на стр. 192).

Имеем:

$$\sum_{n \leqslant x} f(n,x) \geqslant card\left\{p : p \leqslant \frac{x}{2}\right\} \cdot card\left\{G_m :\ G_m \leqslant \frac{x}{2}\right\} \geqslant c_5 \frac{x}{\ln x} \cdot c_6 \ln x = c_7 x,$$

откуда из неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом

$$\sum_{n \leqslant x} f(n,x) \leqslant \left(card\left\{n :\ n \leqslant x,\ f(n,x) > 0\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \leqslant x} f^2(n,x)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(card\left\{n :\ n \leqslant x,\ f(n,x) > 0\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot c_3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n \leqslant x} f(n,x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

следовательно,

$$card\left\{n:\ n\leqslant x,\ f\left(n,x\right)>0\right\}\geqslant\frac{c_7}{c_3}x=c_4x,$$

что и требовалось. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Ряд*

$$\sum_{d\geqslant 2}{}'\frac{1}{d(t\left(d\right))^{\varepsilon}},$$

где $\varepsilon>0$*, сходится.* Σ' *означает суммирование по бесквадратным числам.*

Доказательство. Доказательство аналогично рассуждениям, приведенным в [5] на стр. 196:

Имеем:

$$\sum_{d\geqslant 2}{}'\frac{1}{d(t\left(d\right))^{\varepsilon}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\sum_{t(d)=n}{}'\frac{1}{d}\right).$$

Пусть

$$c_n=\sum_{t(d)=n}{}'\frac{1}{d},\quad f\left(x\right)=x^{-\varepsilon},\quad C\left(x\right)=\sum_{2<n\leqslant x}\sum_{t(d)=n}{}'\frac{1}{d}.$$

Каждое d встречается в $C\left(x\right)$ не более одного раза, все $d\,|P$,

$$P=\prod_{2<n\leqslant x}F_n<2^{x^2},$$

отсюда

$$C\left(x\right)\leqslant\sum_{d|P}{}'\frac{1}{d}=\prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right)\leqslant\prod_{n\leqslant x^2}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=O\left(\ln x\right)$$

(согласно лемме 2.3).

Применяем преобразование Абеля (см., например, [6], с. 224):

$$\sum_{d\geqslant 2}{}'\frac{1}{d(t\left(d\right))^{\varepsilon}}=\lim_{X\to+\infty}\sum_{2<n\leqslant X}\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\sum_{t(d)=n}{}'\frac{1}{d}\right)=$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left(-\int_2^X\varepsilon x^{-1-\varepsilon}C\left(x\right)dx+C\left(X\right)X^{-\varepsilon}\right)=O\left(1\right).$$

Лемма доказана. □

Итак, для фиксированных $m_1,m_2\geqslant 2$, таких, что $m_1\neq m_2$ и $G_{m_1},G_{m_2}\leqslant x$, получаем (согласно лемме 2.1):

$$card\left\{(p_1,p_2):\ p_1,p_2\leqslant x,p_1-p_2=G_{m_2}-G_{m_1}\ \right\}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\frac{x}{\ln^2 x}\prod_{p\left|\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right)\right.}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leqslant c_8\frac{x}{\ln^2 x}g\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right),$$

где

$$g\left(k\right)=\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Пусть теперь $S=S\left(x\right)$ — число решений уравнения

$$p_1-p_2=G_{m_2}-G_{m_1}$$

в множестве

$$\left\{\left(p_1,p_2,G_{m_1},G_{m_2}\right):\ p_1,p_2,G_{m_1},G_{m_2}\leqslant x;;\ m_1,m_2\geqslant 2\ \right\},$$

а

$$U\left(x\right)=\max\left\{n:\ G_n\leqslant x\right\},$$

тогда

$$\sum_{n\leqslant x}f^2\left(n,x\right)\leqslant S\left(x\right)\leqslant c_8\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{m_1,m_2\in[2,U(x)],\quad m_1\neq m_2}g\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right)+c_9x.$$

Согласно лемме 5, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sum_{m_1,m_2\in[2,U(x)],\quad m_1\neq m_2}g\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right)\leqslant c_{10}\ln^2 x.$$

Далее $\sum'$ означает суммирование по бесквадратным числам (включая единицу, когда другое не оговорено), взаимно простым с числами a, b и с числом (a^2+ab-b^2). Применяя теорему 1, находим, что

$$\begin{aligned}\prod_{p|ab(a^2+ab-b^2)}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\cdot\sum_{m_1,m_2\in[2,U(x)],\quad m_1\neq m_2}g\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right)\leqslant\\ \leqslant\sum_{m_1,m_2\in[2,U(x)],\quad m_1\neq m_2}\ \sum{}'_{d\left|\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right)\right.}\frac{1}{d}=\\ =\sum{}'_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\sum_{m_1,m_2\in[2,U(x)],\quad m_1\neq m_2,\ d\left|\left(G_{m_2}-G_{m_1}\right)\right.}1\leqslant\\ \leqslant\sum{}'_{d\leqslant x}\frac{1}{d}A\left(d,U\left(x\right)\right)=\left(U\left(x\right)\right)^2+\sum{}'_{2\leqslant d\leqslant x}\frac{1}{d}A\left(d,U\left(x\right)\right)=\end{aligned}$$

$$= (U(x))^2 + \sum_{d:\ 2\leqslant d\leqslant x,\ U(x)<\sqrt{t(d)}+1}{}' \frac{1}{d} A(d, U(x)) + \sum_{d:\ 2\leqslant d\leqslant x,\ U(x)\geqslant\sqrt{t(d)}+1}{}' \frac{1}{d} A(d, U(x)) \leqslant$$

$$\leqslant (U(x))^2 + \sum_{d:\ 2\leqslant d\leqslant x,\ U(x)<\sqrt{t(d)}+1}{}' \frac{1}{d}(3U(x)-2) +$$

$$+ \sum_{d:\ 2\leqslant d\leqslant x,\ U(x)\geqslant\sqrt{t(d)}+1}{}' \frac{1}{d} 56(U(x))^2 (t(d))^{-\frac{1}{8}} \leqslant (U(x))^2 + 3U(x) \sum_{2\leqslant d\leqslant x} \frac{1}{d} +$$

$$+56(U(x))^2 \sum_{d\geqslant 2}{}' \frac{1}{d(t(d))^{\frac{1}{8}}} \leqslant c_{11} \ln^2 x,$$

что и требовалось.

Теорема доказана. □

Автор благодарит своего научного руководителя В. Н. Чубарикова за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.

2. Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005. 319 с.

3. Romanoff, N. P. (Романов Н. П.) Uber einige Satze der additiven Zahlentheorie // Math. Ann. 1934. Vol. 109. P. 668–678.

4. Erdos, P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // J. Chinese Math. Soc. 1951. Vol. 1. P. 409–421.

5. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 511 с.

6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999. 694 с.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал

Поступило 30.09.2013