

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

Об обобщённых неравномерных сетках Коробова¹

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе рассмотрены обобщённые неравномерные сетки Коробова.

Рассмотрены три новых конструкции: произведение неравномерных сеток по взаимно простым модулям; модифицированные неравномерные сетки; произведение неравномерной сетки и параллелепипедальной сетки по взаимнопростому модулю.

Установлен парадоксальный результат о величине математического ожидания погрешности приближенного интегрирования по модифицированным неравномерным сеткам.

Показано, что алгоритм приближенного интегрирования с помощью произведения неравномерной сетки и параллелепипедальной сетки по взаимнопростому модулю является ненасыщаемым с порядком $\frac{\alpha}{2}$.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция сетки, неравномерные сетки Коробова, гиперболическая дзета-функция решётки.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об обобщённых неравномерных сетках Коробова // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 365–373.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта

№19-41-710004_p_a при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

On generalized non-uniform Korobov grids²

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

Generalized non-uniform Korobov grids are considered in the paper.

Three new constructions are considered: the product of non-uniform grids by mutually simple modules; modified non-uniform grids; the product of an uneven grid and a parallelepipedal grid by a mutually simple module.

A paradoxical result is established about the value of the mathematical expectation of the error of approximate integration over modified non-uniform grids.

It is shown that the algorithm of approximate integration using the product of an uneven grid and a parallelepipedal grid in a mutually simple module is unsaturated with the order $\frac{\alpha}{2}$.

Keywords: hyperbolic zeta function of the grid, uneven Korobov grids, hyperbolic zeta function of the lattice.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On generalized non-uniform Korobov grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 365–373.

1. Введение

В 1956 — 1960 годах при создании теоретико-числового метода в приближенном анализе Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций E_s^α ($\alpha > 1$) с быстро убывающими коэффициентами Фурье, состоящий из функций $f(x_1, \dots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \dots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (1)$$

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

удовлетворяют условиям

$$|C(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{C}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}, \quad (2)$$

где константа C не зависит от $m_1, \dots, m_s$, и для вещественных m полагаем $\bar{m} = \max(1, |m|)$. Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, а поэтому для любого $(\alpha > 1)$ они представляют непрерывные функции.

Рассмотрение классов периодических функций в теоретико-числовом методе в приближенном анализе не является случайным. Дело в том, что особая роль теории чисел в вопросах интегрирования периодических функций была выявлена ещё сто лет тому назад в знаменитой работе Г. Вейля, с которой начинается теория равномерного распределения по модулю 1, и в которой получил общее развитие метод тригонометрических сумм, возникший в работах К. Ф. Гаусса ещё в 1811 г. Фактически интегральный критерий Г. Вейля, доказанный сто лет тому назад, является предшественником теоретико-числового метода Н. М. Коробова в приближенном анализе, который начал создаваться на семинаре **трёх К** в 1956 году через 40 лет после работы Г. Вейля.

Позднее Н. Н. Ченцов, один из трёх руководителей семинара **трёх К**, предложил метод периодизации задач численного интегрирования, который позволил расширить класс функций, для которых можно применять методы теории чисел. С этими методами можно ознакомиться по монографиям [3], [4] и работе [2].

Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.

2. Определения и основные свойства

Классические неравномерные сетки $M(P)$ Коробова, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P :

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{P} \right\}, \left\{ \frac{k^2}{P} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{P} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, P), \quad (3)$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left| S_{M(P)}^*(\vec{m}) \right| \leq \begin{cases} \frac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \quad (4)$$

Поведение рациональных тригонометрических сумм достаточно сложное, поэтому мы не можем дать исчерпывающее описание разбиения Коробова для неравномерных сеток. Можно утверждать только следующее: $K_4 = \emptyset$, $K_1 = P\mathbb{Z}^s$, при $P > (s-1)^2$ имеем $K_0 \cup K_3 \supset \mathbb{Z}^s \setminus p\mathbb{Z}^s$. Если $P = p$, то $K_2 = \emptyset$. Если $P = p^2$, то $K_2 \subset p\mathbb{Z}^s \setminus P\mathbb{Z}^s$.

Из вида неравномерных сеток вытекает одно обобщение их, связанное с рассмотрением произвольного P . Такое обобщение приводит к необходимости использовать для оценок погрешности общие рациональные тригонометрические сумм, которые имеют другой вид оценок чем сумм по простому модулю, или по квадрату простого.

Другое обобщение неравномерных сеток возникает из использования конструкции произведения сеток.

Пусть p — нечетное простое число, тогда рассмотрим сетку $M_2(p) = M(p) \cdot M(p)$. Очевидно, что $|M_2(p)| \leq p^2$. Сетка $M_2(p)$ имеет вид

$$M_2(p) = \left\{ \left(\left\{ \frac{x+y}{p} \right\}, \left\{ \frac{x^2+y^2}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{x^s+y^s}{p} \right\} \right) \mid 0 \leq x, y \leq p-1 \right\}. \quad (5)$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_2(p)$ имеем:

$$\left| S_{M_2(p)}^*(\vec{m}) \right| = \left| S_{M(p)}^*(\vec{m}) \right|^2 \leq \begin{cases} \frac{(s-1)^2}{p} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда следует, что если $N = |M_2(p)|$, то погрешность приближенного интегрирования с помощью обобщенных неравномерных сеток $M_2(p)$ имеет $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, аналогичную оценки погрешности неравномерных сеток Коровова.

Ещё один класс неравномерных сеток получается, если брать произведение неравномерных сеток по разным модулям. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — различные нечетные простые числа, тогда рассмотрим сетку

$$M_s(\vec{p}) = M_s(p_1, \dots, p_k) = M(p_1) \cdot \dots \cdot M(p_k).$$

Очевидно, что $N = |M_s(p_1, \dots, p_k)| = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$. Сетка $M_s(p_1, \dots, p_k)$ имеет

$$M_s(p_1, \dots, p_k) = \left\{ \left(\left(\sum_{j=1}^k \frac{x_j}{p_j} \right), \left(\sum_{j=1}^k \frac{x_j^2}{p_j} \right), \dots, \left(\sum_{j=1}^k \frac{x_j^s}{p_j} \right) \right) \mid 0 \leq x_j \leq p_j - 1, j = 1, 2, \dots, k \right\}. \quad (7)$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_s(\vec{p})$ имеем:

$$\left| S_{M_s(\vec{p})}^*(\vec{m}) \right| = \prod_{j=1}^k \left| S_{M(p_j)}^*(\vec{m}) \right| \leq \begin{cases} \frac{(s-1)^t}{\sqrt{\prod_{\nu=1}^t p_{j\nu}}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, N) = \frac{N}{\prod_{\nu=1}^t p_{j\nu}}, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, N) = N. \end{cases} \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 1. Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M_s(\vec{p})$ справедлива оценка

$$\zeta(\alpha, 1 | M_s(\vec{p})) \leq \frac{s^k (1 + 2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{N}}. \quad (9)$$

Последняя теорема позволяет сделать вывод, что наилучшая оценка погрешности получается для обычных неравномерных сеток, хотя порядок во всех этих случаях одинаковый.

3. Специальная простейшая периодизация и сетки второго рода

Известные способы периодизации либо приводят к увеличению объема вычислений интегрируемой функции, либо используют весовые функции и их производные для преобразования точек сетки.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f(\vec{x})$, заданную на единичном s -мерном кубе $\overline{G}_s = [0; 1]^s$. Пусть у нас имеется сетка $M \subset G_s = [0; 1]^s$. Далее мы построим новую сетку $M_1 \subset \overline{G}_s$, которая позволяет рассматривать интегрируемую функцию как "периодическую".

Рассмотрим замкнутый куб $K_s = [0; 2]^s$ и определим новую функцию $f_1(\vec{x})$ на кубе K_s , осуществляющую простейшую периодизацию:

$$f_1(\vec{x}) = f(\vec{y}), \quad \text{где } \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_s), \quad y_j = \begin{cases} x_j, & \text{при } 0 \leq x_j \leq 1, \\ 2 - x_j, & \text{при } 1 \leq x_j \leq 2. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\iint_{\overline{G}_s} f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{2^s} \iint_{K_s} f_1(\vec{x}) d\vec{x}$$

и функция $f_1(\vec{x})$ периодическая на кубе K_s .

Рассмотрим квадратурную формулу на кубе K_s , построенную с помощью сетки из N точек $M = \{M_1, \dots, M_N\}$ следующим образом:

$$\frac{1}{2^s} \iint_{K_s} f_1(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_1(2M_j) - R_N[f_1],$$

где $R_N[f_1]$ — линейный функционал погрешности квадратурной формулы.

Так как функция $f_1(\vec{x})$ выражается через функцию $f(\vec{x})$, то данную квадратурную формулу можно переписать как квадратурную формулу для функции $f(\vec{x})$ с новой сеткой $M^* = \{M_1^*, \dots, M_N^*\}$, узлы которой заданы равенствами:

$$M_j^* = (M_{1,j}^*, \dots, M_{s,j}^*), \quad M_{\nu,j}^* = \begin{cases} 2M_{\nu,j}, & \text{при } 0 \leq M_{\nu,j} \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2M_{\nu,j}, & \text{при } \frac{1}{2} \leq M_{\nu,j} < 1, \end{cases}$$

$$\iint_{\overline{G}_s} f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(M_j^*) - R_N[f].$$

Предложенную простейшую периодизацию будем называть специальной простейшей периодизацией а сетку $M^* = \{M_1^*, \dots, M_N^*\}$ — сеткой второго рода.

4. Оценки математического ожидания погрешности приближенного интегрирования на классе обобщенных неравномерных сеток Коробова

Наряду с неравномерными сетками (3) рассмотрим ещё один класс обобщённых неравномерных сеток $M(P, \vec{a})$, координаты точек которых имеют вид

$$M_k(\vec{a}) = \left(\left\{ \frac{k + a_1}{P} \right\}, \left\{ \frac{k^2 + a_2}{P} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s + a_s}{P} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, P), \quad (10)$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left| S_{M(P, \vec{a})}^*(\vec{m}) \right| \leq \begin{cases} \frac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \quad (11)$$

Повторяя дословно рассуждения Н. М. Коробова для неравномерных сеток получаем для произвольной сетки вида 10 такой же результат.

ТЕОРЕМА 2. Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M(P, \vec{a})$ справедлива оценка

$$\zeta(\alpha, 1|M(P, \vec{a})) \leq \frac{s(1 + 2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{P}}. \quad (12)$$

У нас имеется P^s различных сеток $M(P, \vec{a})$. Из теоремы 2 следует, что если взять случайным образом произвольную сетку $M(P, \vec{a})$ и численно проинтегрировать произвольную функцию $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, то для погрешности интегрирования $R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})]$ справедлива оценка $|R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})]| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot s(1 + 2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{P}}$. Возникает вопрос об оценке математического ожидания $M(R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})])$. Получается следующий парадоксальный результат

ТЕОРЕМА 3. Для математического ожидания $M(R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})])$ справедлива оценка

$$|M(R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})])| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot (1 + 2\zeta(\alpha))^s}{P^\alpha}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для погрешности $R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})]$ для сетки $M(P, \vec{a})$ имеем следующее представление через ряд Фурье

$$\begin{aligned} R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})] &= \frac{1}{P} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty} C(\vec{m}) \sum_{k=1}^P e^{2\pi i \frac{m_1(a_1+k) + \dots + m_s(a_s+k^s)}{P}} = \\ &= \frac{1}{P} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i \frac{m_1 a_1 + \dots + m_s a_s}{P}} \sum_{k=1}^P e^{2\pi i \frac{m_1 k + \dots + m_s k^s}{P}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда для математического ожидания $M(R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})])$ получаем

$$\begin{aligned} M(R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})]) &= \frac{1}{P^s} \sum_{a_1, \dots, a_s = 0}^{P-1} R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})] = \\ &= \frac{1}{P} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty} C(\vec{m}) \delta_P(m_1) \dots \delta_P(m_s) \sum_{k=1}^P e^{2\pi i \frac{m_1 k + \dots + m_s k^s}{P}} = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty} C(P\vec{m}). \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя к оценке коэффициентов Фурье, получим

$$\begin{aligned} |M(R_{P, \vec{a}}[f(\vec{x})])| &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty} \frac{1}{(Pm_1 \dots Pm_s)^\alpha} = \\ &= \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(\left(1 + \frac{2\zeta(\alpha)}{P^\alpha}\right)^s - 1 \right) < \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot (1 + 2\zeta(\alpha))^s}{P^\alpha} \end{aligned} \quad (16)$$

и теорема полностью доказана. $\square$

5. Модифицированные сетки и произведение сеток

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую сетку $M + \vec{z}$ и дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной сетки M и произвольного $\vec{z}$ модифицированной сеткой $M(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество $M(\vec{z}) = (M + \vec{z}) \cap G_s$.

Сетка $M_1(\vec{z}) = (M + \vec{z}) \cap [-1; 1]^s$.

Модифицированной сеткой Π рода $M'(\vec{z})$ назовем множество

$$M'(\vec{z}) = \{\vec{x} | \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\vec{z})\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квадратурной формулой с модифицированной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ назовем формулу вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (|M'(\vec{z})|)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(M, \vec{z})}[f],$$

$$\text{где } \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\vec{z}), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(M, \vec{z}) = |M'(M, \vec{z})|,$$

$R_{N'(M, \vec{z})}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Квадратурные формулы с модифицированной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется сетка M_1 и параллелепипедальная сетка M_2 . Рассмотрим произведение этих сеток:

$$M = M_1 \cdot M_2 = \{\{\vec{x} + \vec{y}\} | \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{|M_2|} \sum_{\vec{z} \in M_2} \left(|M'(\vec{z})|^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(M_1, \vec{z})}[f] \right), \quad (17)$$

$$R_{N'(M)}[f] = \frac{1}{|M_2|} \sum_{\vec{z} \in M_2} R_{N'(M', \vec{z})}[f]. \quad (18)$$

Формулы (17) — (18) являются аналогами основы для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [1], стр. 192, 193).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для концентрической пары сеток II типа $M_1 \subset M = M_1 \cdot M_2$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину

$$\Delta = \frac{1}{|M_2|} \sum_{\vec{z} \in M_2} |R_{N'(M_1, \vec{z})}[f] - R_{N'(M_1)}[f]|^2. \quad (19)$$

Нетрудно понять, что определение 3 согласуется с аналогичным определением из работы [1] (см. стр. 204), так как сетка M является произведением сетки M_1 и сетки M_2 .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M_1 = M(P)$ — неравномерная сетка, $P = p$ — простое число, $p > s \geq 2$, а $M_2 = M(\vec{a}; N)$ — параллелепипедальная сетка, для которой дзета-функция решётки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}; N)|\alpha) \leq c(\alpha, s) \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha}$, и $N < P$. Для погрешности квадратурной формулы (17) справедлива оценка

$$|R_{N'(M)}[f]| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot c(\alpha, s) \ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \cdot \left(\frac{s-1}{\sqrt{P}} + \frac{1}{P^\alpha} \right). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, точки сетки $M = M(P) \cdot M(\vec{a}; N)$ имеют вид

$$\left(\left\{ \frac{k}{P} + \frac{n}{N} \right\}, \left\{ \frac{k^2}{P} + \frac{na_1}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{P} + \frac{na_{s-1}}{N} \right\} \right), \quad 0 \leq k \leq P-1, 0 \leq n \leq N-1.$$

Отсюда следует, что

$$R_{N'(M)}[f] = \frac{1}{PN} \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} c(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i \left(\frac{km_1}{P} + \frac{nm_1}{N} + \dots + \frac{k^s m_s}{P} + \frac{na_{s-1} m_s}{N} \right)}.$$

Переходя к оценкам и учитывая равенство

$$\delta_N(p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s)) = \delta_N(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s)$$

и оценку $\frac{1}{(\overline{pm_1} \dots \overline{pm_s})^\alpha} \leq \frac{1}{p^\alpha (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}$ при $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$, получим

$$\begin{aligned} |R_{N'(M)}[f]| &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_N(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \left| \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} e^{2\pi i \frac{km_1 + \dots + k^s m_s}{P}} \right| \leq \\ &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(\sum'_{\substack{m_1, \dots, m_s = -\infty \\ (m_1, \dots, m_s, p)=1}}^{\infty} \frac{\delta_N(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \frac{s-1}{\sqrt{P}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_N(p(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s))}{(\overline{pm_1} \dots \overline{pm_s})^\alpha} \right) \leq \\ &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_N(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \cdot \left(\frac{s-1}{\sqrt{P}} + \frac{1}{P^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки гиперболической дзета-функции для решётки решений сравнения следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $0 < c < 1$, $cP < N < P$, тогда для погрешности квадратурной формулы (17) справедлива оценка

$$|R_{N'(M)}[f]| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot s \cdot c(\alpha, s) \ln^{\alpha(s-1)} N'(M)}{c^\alpha N'(M)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, справедливы неравенства: $cP^2 < N'(M) < P^2$, $\sqrt{N'(M)} < P$, $c\sqrt{N'(M)} < N$. Отсюда следует, что

$$\frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \cdot \left(\frac{s-1}{\sqrt{P}} + \frac{1}{P^\alpha} \right) \leq \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N'(M)}{c^\alpha (N'(M))^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}},$$

тем самым утверждение следствия доказано. $\square$

6. Заключение

Предложенная периодизация и новые сетки позволяют по новому рассматривать вопрос о математическом ожидании не только погрешности приближенного интегрирования по неравномерным сеткам Коробова, но также и вопрос о погрешности Фурье интерполяции неперiodических функций по неравномерным сеткам и параллелепипедальным. Этому вопросу будут посвящены наши последующие работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
2. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6091–84.
3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

REFERENCES

1. Dobovol'skaya, L. P., Dobovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185--223.
2. Dobovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ", Dep. v VINITI, № . 609 pp. 1--84.
3. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhenном analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
4. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhenном analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

Получено 4.07.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.