

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

Об одном функциональном уравнении¹

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе изучается гиперболическая дзета-функция двумерной решётки приближений Дирихле. Найдено функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β , которое задаёт аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка.

Найденное функциональное уравнение позволяет ставить вопрос о непрерывности для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β .

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция Гурвица.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

About one functional equation²

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

The hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations is studied. A functional equation is found for the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the case of rational β , which sets an analytical continuation on the entire complex plane, except for the point $\alpha = 1$, in which the pole is of the first order.

The found functional equation allows us to raise the question of continuity for the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the case of rational β .

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, Hurwitz zeta function.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "About one functional equation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 359–364.

1. Введение

В работах [2] – [4] была решена проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки. В работе [6] эта проблема нашла своё решение для случая гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки.

Уже случай двумерной решётки приближений Дирихле в случае иррационального β не является декартовой решёткой.

Цель настоящей работы — найти удобное функциональное уравнение для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β .

²The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

2. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

Пусть у нас задано вещественное число $\beta > 0$. Рассмотрим решетку Дирихле диофантовых приближений $\Lambda(\beta)$, заданную равенством

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q, p \in \mathbb{Z}\}$$

с базисом $\vec{\lambda}_1 = (1, \beta)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, -1)$.

Если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова решётка, в противном случае она не является декартовой решёткой. В любом случае она является унимодулярной решёткой.

Гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(\beta)$ задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda(\beta) | \alpha) = \sum_{(q,p) \neq (0,0)} \frac{1}{(\overline{q}q\beta - p)^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

где $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x .

Сначала рассмотрим случай рационального $\beta = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $b \geq 1$. Найдём выражение гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(\frac{a}{b}) | \alpha)$ решётки $\Lambda(\frac{a}{b})$ через периодизированную дзета-функцию Гурвица $\zeta^*(\alpha, w)$, которая в правой полуплоскости задается равенством

$$\zeta^*(\alpha, w) = \sum_{n+w>0} (n+w)^{-\alpha} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, & \text{при } \{w\} = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n + \{w\})^{-\alpha}, & \text{при } \{w\} > 0 \end{cases}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right) \middle| \alpha\right) &= \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{k}{b}\right)}{b^\alpha} \\ &\cdot \left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha} \right) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, сделаем замену переменных суммирования $q = bn + k$, $k = 0, 1, \dots, b-1$, $p = an + \left[\frac{ak}{b}\right] - m$, получим

$$\begin{aligned} \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right) \middle| \alpha\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|bn|^\alpha} + \frac{1}{|-bn|^\alpha} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m}^\alpha} + \\ &+ \sum_{k=1}^{b-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|bn + k|^\alpha} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m + \left\{\frac{ak}{b}\right\}}^\alpha} \right) = \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha} + \\ &+ \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{k}{b}\right)}{b^\alpha} \\ &\cdot \left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha} \right) \end{aligned}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

Для получения аналитического продолжения потребуется продолжение периодизированной дзета-функции Гурвица на всю комплексную плоскость (см. [5]).

$$\zeta^*(\alpha; b) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{0 < n+b} (n+b)^{-\alpha}, & \sigma > 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-1} - I_2(\alpha; 0, 1), & \begin{matrix} \{b\}=0, \\ \sigma > -1 \end{matrix}, \\ \frac{1}{\{b\}^\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-1} + (1-\{b\}) \left(1 - \frac{\alpha\{b\}}{2}\right) - I_2(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}), & \begin{matrix} \{b\} \neq 0, \\ \sigma > -1 \end{matrix}, \\ 2(2\pi)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \left(\sin \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} + \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} \right), & \sigma < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция и

$$I_2(\alpha; q, \beta) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_q^\infty \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{(x+\beta)^2} dx, \quad q > 0, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

В работе [5] показано, что для $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ справедливо равенство

$$\zeta^*(\alpha; w) + \zeta^*(\alpha; 1-w) = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha; w),$$

где $M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}$ — множитель Римана,

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^\alpha}, \quad (\sigma > 1). \quad (2)$$

— дзета-функция Гурвица второго рода.

Кроме этого нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана: $\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha)$.

Учитывая всё выше изложенное, получаем новое функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции декартовой решётки $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$.

ТЕОРЕМА 1. При $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\alpha\right) &= \frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)(1+2M(\alpha)\zeta(1-\alpha))}{b^\alpha} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha; \frac{k}{b}\right)}{b^\alpha} \\ &\cdot \left(2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha, \frac{ka}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по лемме 1 имеем:

$$\begin{aligned} \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\alpha\right) &= \frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1-\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha} \\ &\cdot \left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1-\frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда функциональное уравнение для дзета-функции Римана и периодизированной дзета-функции Гурвица, получим:

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\alpha\right) = \frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)(1+2M(\alpha)\zeta(1-\alpha))}{b^\alpha} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha; \frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}.$$

$$\cdot \left(2M(\alpha)\zeta^{**} \left(1 - \alpha, \frac{ka}{b} \right) + 2 - \frac{1}{\left\{ \frac{ak}{b} \right\}^\alpha} - \frac{1}{\left(1 - \left\{ \frac{ak}{b} \right\} \right)^\alpha} \right)$$

и теорема полностью доказана. $\square$

3. Заключение

Найденное функциональное уравнение позволяет ставить вопрос о непрерывности для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β в левой полуплоскости. Изучение этого вопроса будет темой следующих статей по этой теме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
2. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.
3. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.
4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.
5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
6. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
2. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.
3. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Doklady akademii nauk, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.
4. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, no. 3, pp. 18–23.

5. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ", Chebyshevskij sbornik, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.ский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 19.06.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.