ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-354-358

Уточнение константы Бернштейна — Никольского для сферы с весом Данкля в случае группы октаэдра¹

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский, И. А. Мартьянов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgtail@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула)

e-mail: dvgtail@mail.ru

Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Мы продолжаем исследование точных констант Бернштейна — Никольского для сферических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля. Рассматривается модельный случай группы отражений октаэдра $\mathbb{Z}_2^{d+1}$ и веса $\prod_{j=1}^{d+1} |x_j|^{2\kappa_j}$, когда известен явный вид оператора сплетения Данкля. Мы показываем, что при $\min \kappa = 0$ многомерная задача сводится к одномерной для веса Гегенбауэра, иначе нет.

Ключевые слова: сферический полином, воспроизводящее ядро, вес Данкля, константа Бернштейна — Никольского.

Библиография: 4 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский, И. А. Мартьянов Уточнение константы Бернштейна — Никольского для сферы с весом Данкля в случае группы октаэдра // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 354–358.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-354-358

Refinement of Bernstein–Nikolskii constant for the sphere with Dunkl weight in the case of octahedron group

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii, I. A. Martyanov

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dv@mail@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Martyanov Ivan Anatol'evich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: martyanov.ivan@yandex.ru

Abstract

We continue the study of the sharp Bernstein–Nikolskii constants for spherical polynomials in the space $L^p(\mathbb{S}^d)$ with the Dunkl weight. We consider the model case of the octahedral reflection group $\mathbb{Z}_2^{d+1}$ and weight $\prod_{j=1}^{d+1} |x_j|^{2\kappa_j}$ when the explicit form of the Dunkl intertwining operator is known. We show that for $\min \kappa = 0$ the multidimensional problem is reduced to the one-dimensional problem for the Gegenbauer weight, otherwise not.

Keywords: spherical polynomial, reproducing kernel, Dunkl weight, Bernstein–Nikolskii constant.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii, I. A. Martyanov, 2021, “Refinement of Bernstein–Nikolskii constant for the sphere with Dunkl weight in the case of octahedron group”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 354–358.

В работе [1] мы доказали следующее общее утверждение о взаимосвязи многомерных и одномерных весовых констант Бернштейна — Никольского в пространствах $L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля и $L_{w_\alpha}^p([-1, 1])$ с весом Гегенбауэра. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{S}^d$. Тогда

$$\sup \left| \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa, j})^{r/2} \widehat{g}_j \widetilde{Z}_j^\kappa(x_0, x_0) \right| \leq C_{p, \kappa}(d, n, r) \leq \sup \left| \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa, j})^{r/2} \widehat{g}_j \right| = C_{p, \alpha_\kappa}(n, r), \quad (1)$$

где супремумы берутся по всем полиномам $g \in \mathcal{P}_n$, для которых $\|g\|_{p, w_{\alpha_\kappa}} = 1$.

Интересно уточнить границы (1). Вначале напомним обозначения и основные факты из [1] (см. также [2, 3]). Через $L_v^p(X)$ обозначается весовое пространство измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой $\|f\|_{p, v} = (c_v \int_X |f(x)|^p v(x) dx)^{1/p}$ при $p < \infty$, где $c_v^{-1} = \int_X v(x) dx$; $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Пусть $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^{d+1}$; $\mathcal{P}_n^d$ — пространство сферических полиномов на $\mathbb{S}^d$ порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$; $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических

полиномов степени не выше n ; $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha, \alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha, \alpha)}(1)}$ — модифицированные полиномы Гегенбауэра, ортогональные на $[-1, 1]$ с весом $w_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$; $D_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} t} \frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор Гегенбауэра; для $g(t) = \sum_{j=0}^n \hat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t) \in \mathcal{P}_n$ имеем $(-D_\alpha)^{r/2} g(t) = \sum_{j=0}^n \hat{g}_j \lambda_{\alpha, n}^{r/2} R_n^{(\alpha)}(t)$, где $\lambda_{\alpha, n} = n(n+2\alpha+1)$.

Через $v_\kappa(x) = \prod_{a \in R_+} |\langle a, x \rangle|^{2\kappa(a)}$ обозначается вес Данкля на $\mathbb{R}^{d+1}$, где R_+ — положительная подсистема выбранной системы корней $R \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений $G(R)$. Сужение v_κ на $\mathbb{S}^d$ называется сферическим весом Данкля. Имеем $\Pi_n^d = \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространство κ -гармоник порядка j ; $\{Y_{ji}\}_{i=1}^{h_j(d)}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $h_j(d) = \dim \mathcal{H}_j^d(v_\kappa) = \frac{2j+d-1}{d-1} \binom{j+d-2}{j}$ не зависит от κ ; $\operatorname{proj}_j^\kappa$ — проектор на $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $\Delta_{\kappa, 0}$ — оператор Бельтрами-Данкля; $(-\Delta_{\kappa, 0})^{r/2} \operatorname{proj}_j^\kappa = (\lambda_{\alpha_\kappa, j})^{r/2} \operatorname{proj}_j^\kappa$, где $\alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1$ и $d_\kappa = d + 2 \sum_{a \in R_+} \kappa(a)$ — размерность Данкля.

Пусть $Z_j^\kappa(x, y) = \sum_{i=1}^{h_j(d)} Y_{ji}(x) \overline{Y_{ji}(y)}$ — воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, $\tilde{Z}_j^\kappa(x, y) = \frac{Z_j^\kappa(x, y)}{h_j(d_\kappa)}$. Тогда $\tilde{Z}_j^\kappa(x, y) = V_\kappa[R_j^{(\alpha_\kappa)}(\langle \cdot, y \rangle)](x)$, где V_κ — оператор сплетения Данкля.

Константы Никольского–Бернштейна в $L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^d)$ и $L_{w_\alpha}^p([-1, 1])$ в (1) определяются соответственно равенствами

$$C_{p, \kappa}(d, n, r) = \sup_{f \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|(-\Delta_{\kappa, 0})^{r/2} f\|_\infty}{\|f\|_{p, v_\kappa}}, \quad C_{p, \alpha}(n, r) = \sup_{g \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\|(-D_\alpha)^{r/2} g\|_\infty}{\|g\|_{p, w_\alpha}}.$$

Для $\kappa = 0$ имеем $\tilde{Z}_j^0(x_0, x_0) = 1$ для всех x_0 и j , поэтому (1) влечет

$$C_{p, 0}(d, n, r) = C_{p, d/2-1}(n, r).$$

Для $\kappa \neq 0$ задача становится сложной. В [1] был поставлен вопрос о поведении величин $\tilde{Z}_j^0(x_0, x_0)$ и, как следствие, точности неравенств (1).

Рассмотрим модельный случай группы октаэдра $G(R) = \mathbb{Z}_2^{d+1}$, когда известен явный вид оператора сплетения [2]. В этом случае $R = \{\pm e_1, \dots, \pm e_{d+1}\}$, $R_+ = \{e_j\}_{j=1}^{d+1}$ — единичные орты $\mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa(\pm e_j) = \kappa_j \geq 0$, $v_\kappa(x) = \prod_{j=1}^{d+1} |x_j|^{2\kappa_j}$,

$$V_\kappa f(x) = c_\kappa \int_{[-1, 1]^{d+1}} f(x_1 t_1, \dots, x_{d+1} t_{d+1}) \prod_{i=1}^{d+1} (1+t_i)(1-t_i^2)^{\kappa_i-1} dt, \quad (2)$$

где константа $c_\kappa = c_{\kappa_1} \dots c_{\kappa_{d+1}}$ выбрана из условия $V_\kappa 1 = 1$ и используется соглашение, что для $\kappa_i = 0$ нужно заменить $c_{\kappa_i} (1-t_i^2)^{\kappa_i-1} dt_i$ мерой Дирака $\frac{\delta_{-1}(t_i) + \delta_1(t_i)}{2} dt_i$.

Пусть

$$\min \kappa = \min_{i=1, \dots, d+1} \kappa_i.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\min \kappa = \kappa_1 \geq 0$. Тогда по формуле [2, (7.2.14)] имеем

$$Z_j^\kappa(e_1, e_1) = \frac{j + \lambda_\kappa}{\lambda_\kappa} C_j^{(\lambda_\kappa - \kappa_1, \kappa_1)}(1), \quad \lambda_\kappa = \alpha_\kappa + \frac{1}{2},$$

где $C_j^{(\lambda, \mu)}(t)$ — обобщенные полиномы Гегенбауэра [2, прил. В]. При $\mu = 0$ они совпадают с классическими полиномами Гегенбауэра $C_j^\lambda(t)$. Поэтому

$$\tilde{Z}_j^\kappa(e_1, e_1) = \frac{C_j^{(\lambda_\kappa - \kappa_1, \kappa_1)}(1)}{C_j^{(\lambda_\kappa, 0)}(1)}.$$

Пусть $\kappa_1 = 0$. Тогда $\tilde{Z}_j^\kappa(e_1, e_1) = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Данный факт также следует напрямую из (2) и соглашения для меры:

$$\tilde{Z}_j^\kappa(e_1, e_1) = \int_{-1}^1 R_j^{(\alpha_\kappa)}(t_1)(1+t_1) \frac{\delta_{-1}(t_1) + \delta_1(t_1)}{2} dt_1 = R_j^{(\alpha_\kappa)}(1) = 1.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $G(R) = \mathbb{Z}_2^{d+1}$ и $\min \kappa = 0$, то

$$C_{p,\kappa}(d, n, r) = C_{p,\alpha_\kappa}(n, r).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Данное предложение позволяет использовать результаты для одномерных весовых констант Бернштейна — Никольского в многомерном случае. Например, из результатов работы [4] следует, что для константы Никольского при $p \in [1, \infty)$

$$C_{p,\alpha}(n, 0) = L_{p,\alpha} n^{(2\alpha+2)/p} (1 + O(n^{-1})), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $L_{p,\alpha}$ — константа Никольского в пространстве $L_{|x|^{2\alpha+1}}^p(\mathbb{R})$ для целых функций экспоненциального типа. Поэтому в условиях предложения 1 будет

$$C_{p,\kappa}(d, n, 0) = L_{p,\alpha_\kappa} n^{d_\kappa/p} (1 + O(n^{-1})).$$

Для $\kappa_1 > 0$ равенство из предложения 1 неверно, поэтому оценка $C_{p,\kappa}(d, n, 0) \leq cn^{d_\kappa/p}$, предложенная в [1], неточная. Действительно, из общего порядкового неравенства Никольского для весов с условием удвоения (см. [2], теорема 5.5.1 и пример 5.1.4) следует, что

$$C_{p,\kappa}(d, n, 0) \leq cn^{(d_\kappa - 2 \min \kappa)/p}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В этой связи также заметим, что в силу формулы [2, (B.3.2)] для $j_0 = \lceil j/2 \rceil$

$$\tilde{Z}_j^\kappa(e_1, e_1) = \frac{C_j^{(\lambda_\kappa - \kappa_1, \kappa_1)}(1)}{C_j^{(\lambda_\kappa, 0)}(1)} = \frac{(\lambda_\kappa - \kappa_1 + \frac{1}{2})_{j_0} (\frac{1}{2})_{j_0}}{(\lambda_\kappa + \frac{1}{2})_{j_0} (\kappa_1 + \frac{1}{2})_{j_0}} \asymp j^{-2\kappa_1}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Таким образом, требуется дальнейшее исследование проблемы взаимосвязи точных весовых многомерных и одномерных констант Бернштейна — Никольского. Одна из идей в случае группы $\mathbb{Z}_2^{d+1}$ состоит в сведении к одномерной задаче для общих весов типа Якоби.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.
2. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. N.Y.: Springer, 2013.
3. Dai F., Xu Yu. Analysis on h -harmonics and Dunkl transforms. Basel: Birkhauser/Springer, CRM Barcelona, 2015.
4. Горбачев Д.В., Мартынов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

REFERENCES

1. Gorbachev, D.V. & Dobvol'skii, N.N. 2020. "Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307. (In Russ.)
2. Dai, F. & Xu, Yu. 2013. "Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls", Springer, N.Y.
3. Dai, F. & Xu, Yu. 2015. "Analysis on h -harmonics and Dunkl transforms", Birkhauser/Springer, Basel, CRM Barcelona.
4. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

Получено 15.09.2021 г.

Принято в печать 5.12.2021 г.