ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-350-353

О формуле Стирлинга

А. Гияси

Гияси Азар — департамент математики, факультет статистики, математики и компьютера; Алламех Табатабаи Университет (Иран).

email: azarghyasi@atu.ac.ir

Аннотация

В данной работе найден вариант формулы Стирлинга, полезный и удобный для приложений. Вывод формулы основан на двух известных утверждениях Эйлера: разложение гамма-функции в бесконечное произведение и формуле Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым числам.

Ключевые слова: гамма-функция Эйлера, формула Стирлинга, формула Эйлера–Маклорена–Сонина.

Библиография: 2 названия.

Для цитирования:

А. Гияси. О формуле Стирлинга // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, с. 350–353.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-350-353

About the Stirling formula

А. Ghyasi

Ghyasi Azar — department of mathematics, faculty of statistics, mathematics, and computer; Allameh Tabatabai University (Iran).

email: azarghyasi@atu.ac.ir

Abstract

In this paper the version of the Stirling formula is found. It is the useful and siutable for applications. A deduction of this formula is based on two the Euler's statements: the expansion of the Gamma-function into the infinite product and the Euler–MacLauren summation formula of values of the smooth function over integers.

Keywords: Euler gamma-function, Stirling formula, Euler–MacLauren–Sonin summation formula.

Bibliography: 2 titles.

For citation:

А. Ghyasi, 2021, “About the Stirling formula”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 350–353.

1. Введение

При любом натуральном $n \geq 1$ и любом вещественном $s > 0$ известная формула Стирлинга имеет вид

$$\ln \Gamma(s) = s \ln s - s - \frac{1}{2} \ln s + \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2n-3)(2n-2)s^{2n-3}} + r_n,$$

где

$$r_n = (-1)^{n-1} \theta \frac{B_n}{(2n-1)2n\xi^{2n-1}}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \xi \leq s,$$

причем числа Бернулли $B_\nu, \nu \geq 1$, определяются из производящего ряда

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

Эту формулу можно распространить на комплексные значения аргумента s . При значениях s достаточно больших по модулю и при положительной вещественной части s она часто используется в приложениях. Тем не менее при возрастании n ввиду быстрого роста чисел Бернулли B_n для фиксированного значения s формула Стирлинга не приводит к повышению точности вычисления значения $\ln \Gamma(s)$.

Настоящая статья посвящена выводу следующего утверждения

ТЕОРЕМА. Пусть $s \geq 2$ — любое вещественное число. Тогда справедлива формула

$$\ln \Gamma(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(s + \frac{1}{2}\right) - \left(s + \frac{1}{2}\right) - \ln s + \ln \sqrt{2\pi} + R,$$

где, полагая

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(z) dz - \frac{1}{12},$$

имеем

$$R = \int_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx.$$

Вспомогательные утверждения.

Приведем общеизвестные теоремы Эйлера (см., например, [1],[2]).

ЛЕММА 1. (Эйлер). *Справедливо следующее предельное соотношение*

$$\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(s),$$

где

$$P_m(s) = \frac{m^s(m-1)!}{s(s+1)\dots(m+s-1)}.$$

ЛЕММА 2. (Формула Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым числам). Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, и пусть

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(z) dz - \frac{1}{12}.$$

Тогда имеем

$$\sum_{a < x \leq b} f(x) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \sigma(x) f''(x) dx + \\ + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \sigma(b)f'(b) + \sigma(a)f'(a).$$

Доказательство теоремы.

Воспользуемся леммой 1. Находим

$$\ln \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n(s),$$

где

$$\ln P_n(s) = s \ln n - \ln s + S,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln k - \ln(k+s)).$$

По лемме 2 (формула Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым числам) имеем

$$S = A + B, \quad A = \int_{0,5}^{n-0,5} (\ln x - \ln(x+s)) dx,$$

$$B = \int_{0,5}^{n-0,5} \sigma(x) \left(\frac{1}{(x+s)^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = B_1 - B_2.$$

Преобразуем интеграл A . Находим

$$A = \int_{0,5}^{n-0,5} \ln x dx - \int_{0,5}^{n-0,5} \ln(x+s) dx = \\ = \int_{0,5}^{n-0,5} \ln x dx - \int_{s+0,5}^{n+s-0,5} \ln x dx = \\ = \int_{0,5}^{s+0,5} \ln x dx - \int_{n-0,5}^{n+s-0,5} \ln x dx = A_1 - A_2.$$

Интегрируя A_1 , получим

$$A_1 = (x \ln x - x) \Big|_{0,5}^{s+0,5} = (s+0,5) \ln(s+0,5) - s+0,5 \ln 2.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем $\ln(1+x/n) = O(x/n)$. Следовательно,

$$A_2 = s \ln n + \int_{-0,5}^{s-0,5} \ln(1+x/n) dx = s \ln n + O(s^2/n).$$

Таким образом, интеграл A примет вид

$$A = (s+0,5) \ln(s+0,5) - s - s \ln n + c_1 + O(s^2/n).$$

Далее преобразуем интеграл B . Имеем

$$B_1 = \int_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx + O\left(\frac{1}{s+n-0,5}\right),$$

$$B_2 = \int_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2} dx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Собирая вместе полученные результаты и устремляя n к бесконечности, находим

$$\ln \Gamma(s) = A + B = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(s + \frac{1}{2}\right) - \left(s + \frac{1}{2}\right) + c_0 + \int_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx.$$

Константа $c_0 = \ln \sqrt{2\pi}$ вычисляется стандартным образом с помощью формулы Лежандра удвоения аргумента гамма-функции Эйлера:

$$2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma(s+0,5) = \Gamma(0,5) \Gamma(2s).$$

2. Заключение

На наш взгляд, полученный нами вариант формулы Стирлинга, может оказаться полезным и удобным в приложениях. Использование формулы Эйлера–Маклорена для функций большей гладкости приводит к более громоздким и сложным соотношениям.

Автор приносит глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. де ла Валле-Пуссен Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых. т. II. — М.-Л.: Гос. техн.-теор. изд-во, 1933, 169-200.
2. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 435-437.

REFERENCES

1. de la Vallee Poussin Ch.-J. 1912. Cours de Analyse Infinitesimale — Paris.
2. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lecture on mathematical analysis. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. 435-437.

Получено 14.09.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.