

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

---

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-346-349

**Об одном алгоритме поиска наилучших совместных  
диофантовых приближений<sup>1</sup>**

Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова (г. Тула)

**Басалов Юрий Александрович** — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: basalov\_yuriy@mail.ru*

**Басалова Анастасия Николаевна** — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: joy\_of\_life@mail.ru*

**Аннотация**

В статье рассматривается вопрос улучшение одного алгоритма поиска наилучших совместных диофантовых приближений и оценка его сложности.

*Ключевые слова:* диофантовы приближения, поиск наилучших совместных диофантовых приближений.

*Библиография:* 3 названия.

**Для цитирования:**

Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова, Об одном алгоритме поиска наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 346–349.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 19-41-710004 р\_а) при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г..

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-346-349

**On one algorithm for searching the best joint diophantine approximations<sup>2</sup>**

Yu. A. Basalov, A. N. Basalova (Tula)

**Basalov Yuriy Aleksandrovich** — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: basalov\_yurij@mail.ru***Basalova Anastasia Nikolaevna** — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: joy\_of\_life@mail.ru***Abstract**

The article discusses the issue of improving one algorithm for finding the best joint Diophantine approximations and estimating its complexity.

*Keywords:* Diophantine approximations, searching best joint diophantine approximations.

*Bibliography:* 3 titles.

**For citation:**

Yu. A. Basalov, A. N. Basalova, 2021, “On one algorithm for searching the best joint diophantine approximations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 346–349.

Рассмотрим действительный вектор  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . Будем обозначать расстояние от действительного числа до ближайшего целого, как  $\|x\|_s = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ , где  $\{x\}$  – дробная часть числа  $x$ . В качестве меры приближений вектора  $\vec{\alpha}$  целыми числами будем рассматривать

$$\delta(q, \vec{\alpha}) = \max_{i=1, k} \|q\alpha_i\|.$$

Целое число  $q$  будем называть наилучшим совместным диофантовым приближением вектора  $\vec{\alpha}$ , если для любого  $d < q$

$$\delta(q, \vec{\alpha}) < \delta(d, \vec{\alpha}).$$

Известно, что если  $\vec{\alpha}$  иррационален, то последовательность наилучших совместных диофантовых приближений  $q_i$  бесконечна [3]. В одномерном случае, последовательностью наилучших диофантовых приближений к числу  $\beta$  являются знаменатели подходящих цепных дробей к этому числу [3].

Для многомерного случая существуют различные алгоритмы позволяющие находить наилучшие совместные диофантовы приближения (например [2]), однако они ощутимо сложнее алгоритма разложения числа в цепную дробь.

В статье [1] нами был предложен следующий алгоритм поиска первых  $N$  совместных диофантовых приближений.

<sup>2</sup>The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004 \_p\_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

1. Положить  $r = \delta(1, \vec{\alpha})$ ,  $q_0 = 1$  и

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & p_{:0,1} & \dots & p_{:0,k-1} & p_{:0,k} \end{pmatrix}.$$

где  $p_{0,j}$  – ближайшее целое к  $\alpha_j$ . Матрица  $e$  – описывает базис целочисленного линейного пространства. Каждое следующее наилучшее совместное диофантово приближение ищется как линейная комбинация векторов из этого базиса.

2.  $n = 1$

3. Решить СЛАУ  $e \cdot \vec{x} = \vec{\alpha}$

4. Нормировать вектор  $\vec{x}$

5. Положить  $M = 1$ ,  $q_n = \infty$ .

6. Перебираем точки, соседние точки  $\bar{a}$  с точкой  $[M \cdot \vec{x}]$

$$(a) \quad s = \sum_{1 \leq j \leq k+1} a_j : e_{j,0}.$$

- (b) Если  $s > q_{n-1}$  и  $\delta(s, \vec{\alpha}) < r$  то  $q_n = s$  новое потенциальное наилучшее совместное диофантово приближений.

7. Если  $q_n = \infty$ , то  $M = M + 1$  и перейти на шаг (6).

8.  $r = \delta(q_n, \vec{\alpha})$ . Добавить в  $e$  вектор  $\vec{e}_n = (q_n, p_{n,1}, p_{n,2}, \dots, p_{n,k})$ , где  $p_{n,k}$  – это ближайшее целое к числу  $q_n \cdot \alpha_k$ .

9. По всем  $i$  от 1 до  $k + 1$ :

- (a) Если вектора  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_n\}$  линейно независимы, то новый базис  $e = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_n\}$ . Закончить перебор  $i$ .

- (b) Если  $n = N$  закончить. Иначе  $n = n + 1$ , перейти на шаг (3).

Этот алгоритм основывается на направленном поиске нового наилучшего совместного диофантового приближения, как линейной комбинации предыдущих. Как отмечалось в статье [1], этот алгоритм имеет сложность  $O(M \cdot 3^{k+1} \cdot N)$ , где  $M$  – это максимальный параметр перебора, который может возникать в процессе работы алгоритма. Вопрос о его значения оставался ранее неизученным.

Покажем как можно оценить значения этого параметра. Рассмотрим  $n$ -ую итерацию алгоритма. В начале итерации нам известно текущее  $r$  ( $r = \delta(q_{n-1}, \vec{\alpha})$  – максимум расстояния от ближайшего целого, до  $q_{n-1} \cdot \alpha_i$ ). Мы стараемся найти такое  $q_n$ , что  $\delta(q_n, \vec{\alpha})$  будет меньше чем  $r$ . По теореме Дирихле [3] для любого  $Q$  существует  $q < Q$ , такое что

$$\delta(q, \vec{\alpha}) < \frac{1}{Q^{1/k}}.$$

Положив  $Q = \left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^k$ , получим оценку  $q_n < Q$ . Небольшое положительное число  $\epsilon$  необходимо для случая когда  $q_{n-1} = \left(\frac{1}{r}\right)^k$ .

Теперь оценим значение  $M$ . Так как  $s$  это примерно  $\sum_{1 \leq j \leq k+1} [M \cdot x_j] e_{j,0}$ , и если все  $M \cdot x_j > 1$ , то

$$M \approx \frac{s}{\sum_{1 \leq j \leq k+1} x_j e_{j,0}}$$

Таким образом можно дать оценку

$$M < O(1) \cdot \max \left( \frac{\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^k}{\sum_{1 \leq j \leq k+1} x_j e_{j,0}}, \frac{1}{\min \vec{x}} \right).$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю. А., Пацукова А. Н., О некоторых вопросах диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, Вып. 3, С. 4-27.
2. Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, Вып. 2, С. 35–65.
3. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

## REFERENCES

1. Basalov Yu. A., Pacukova A. N. 2012, “On some questions in Diophantine approximations“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 13, Issue 3, pp. 4–27.
2. Bruno A. D. 2015, “Universal generalization of the continued fraction algorithm“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16, Issue 2, pp. 35–65.
3. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

Получено 17.06.2021 г.

Принято в печать 21.12.2021 г.