ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-340-345

О некоторых свойствах константы наилучших совместных диофантовых приближений[1]

Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова

Басалов Юрий Александрович —Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Басалова Анастасия Николаевна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается вопрос поведения значений C_n при возрастании n, где C_n – это константа наилучших совместных диофантовых приближений. Показаны различия в этом вопросе для l_2 и max нормы.

Ключевые слова: диофантовы приближения, константы наилучших совместных диофантовых приближений.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова. О некоторых свойствах константы наилучших диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 340–345.

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 19-41-710004 р_а) при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-340-345

On some properties of the constant of the best joint diophantine approximations[2]

Yu. A. Basalov, A. N. Basalova

Basalov Yurij Aleksandrovich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Basalova Anastasia Nikolaevna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Abstract

The article considers the question of the behavior of the values of C_n with increasing n, where C_n is the constant of the best joint diophantine approximations. Shows the differences in this question for l_2 and max norms are shown.

Keywords: Diophanite approximations, best joint diophantine approximations constants.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, A. N. Basalova, 2021, "On some properties of the constant of the best joint diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 340–345.

1. Введение

Рассмотрим действительный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Мерой его приближений целыми числами будет считать max норму $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n$. Из теоремы Дирихле следует, что эта величина меньше 1 [6]. Точная нижняя грань величины C, такой что существует бесконечно много целых чисел $q, p_1, \ldots, p_n$ таких, что

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < C$$

называется константой наилучших евклидовых приближений $C(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha}$. Константой наилучших совместных диофантовых приближений размерности n называется:

$$C_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} C(\vec{x}).$$

[2]The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a. The work was supported financially by a grant from the Government of the Tula Region under Contract ДС/294 dated November 16, 2021.

2. Случай max нормы

А. Гурвицом было получено [7] значение $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Для больших размерностей точных значений C_n неизвестно, но было получено достаточно много оценок этих значений.

Для размерности $n = 2$ Дж. В. С. Касселс [2] получил оценку снизу $C_2 \geq \frac{2}{7}$, а Дж. Макк [9] и В. Г. Новак [10] получили оценку сверху $C_2 \leq \left(\frac{8}{13}\right)^2$. Это дает неравенство

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447214... > 0.378698 \approx \left(\frac{8}{13}\right)^2 \geq C_2.$$

Возникает вопрос – можно ли для больших n получить аналогичные неравенства? Будет ли последовательность C_n убывать с ростом n?

Наиболее точные оценки сверху (для размерности $n \geq 3$) была получены В. Споном [13]

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^n + (1+u^n)}$$

$$C_3 \leq 0.408319... \quad C_4 \leq 0.390731... \quad C_5 \leq 0.379023...$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \pi, \qquad C_n < \frac{1}{\pi}, \text{ при } n \to \infty.$$

Наиболее точные оценки снизу получаются из неравенства (полученного в работах [2, 5])

$$C_n \geq V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}$$

где $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| \leq 1.$$

а $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел.

Ранее были получены оценки $V_{n,s}$

$$V_{3,1} = 2,\ V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2}, \qquad [3]$$

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9},\ V_{4,1} \geq 2,\ V_{4,0} \geq 4. \qquad [8]$$

В недавних работах [1] нами были получены оценки

$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}},$$

$$V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11},$$

$$V_{n,[n/2]} \geq 0.77... \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n/2}.$$

Для $\Delta_{n,s}$ известны [12] следующие оценки

$$60^{n-2s} \cdot 22^s < \Delta_{n,s} < 92.4...^n, \quad n \to \infty,$$

что дает оценку снизу

$$C_n \geq 0.77... \cdot 0.1387...^{n/2}$$

$$C_3 \geq 0.120605... \quad C_4 \geq 0.044320... \quad C_5 \geq 0.014860...$$

Это значит, что существующие на данный момент оценки не могут дать исчерпывающего ответа на вопрос поведении значений C_n с ростом n.

3. Случай l_2 нормы

Вместо max нормы $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n$ можно рассмотреть l_2 норму $\sum\limits_{i=1}^{n} (q\alpha_i - p_i)^2$ и ввести для нее аналогичные понятия. Точная нижняя грань величины θ, такой что для вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ существует бесконечно много целых чисел $q, p_1, \ldots, p_n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} (q\alpha_i - p_i)^2 < \frac{\theta^{1/n}}{q^{1+1/n}}$$

называется константой наилучших евклидовых приближений $\theta(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha}$.

Константой наилучших евклидовых приближений θ_n называется:

$$\theta_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \theta(\vec{x}).$$

Результат А. Гурвица для $n = 1$ остается в силе: $\theta_1 = 1/\sqrt{5} \approx 0.447214...$. Для размерности $n = 2$ значение θ_2 было вычислено Г. Дэвенпортом и К. Малером [4]: $\theta_2 = 2/\sqrt{23} \approx 0.417029...$. То есть $\theta_1 > \theta_2$. Это наводит на аналогичный вопрос о убывании θ_n убывать с ростом n.

Наиболее точные оценки θ_n для $n \geq 3$ были получены В. Г. Новаком [11]

$$\frac{1}{n^{-n/2} \cdot \sqrt{\Delta_{n,[n/2]}}} \leq \theta_n \leq \frac{n^{-n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2} \cdot \Delta(\mathbb{S}_{n+1})},$$

где $\Delta(\mathbb{S}_{n+1})$ – критический определитель единичной сферы размерности $n + 1$.

$$0.31334... \leq \theta_3 \leq 0.5322..., \qquad 0.39888... \leq \theta_4 \leq 0.75615...,$$

$$0.33385... \leq \theta_5 \leq 1.14155..., \qquad 0.50272... \leq \theta_6 \leq 1.90244....$$

$$0.43830... \leq \theta_7 \leq 3.54384....$$

То есть $\theta_2 < \theta_6$. Значит, θ_n не может монотонно убывать с ростом n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю. А. Оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 20, Вып. 3, 2019, С. 405-429. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12 (4). P. 543–556

4. Davenport. H., Mahler. K., Simultaneous Diophantine approximation // Duke Math. J. 1946. Vol. 13. P. 105–111.

5. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

6. Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.

7. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

8. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32 (2). P. 313–316.

9. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.

10. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

11. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

12. Odlyzko A. M. Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1990. Tome 2. No. 1. P. 119–141.

13. Spohn W.G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 885–894.

REFERENCES

1. Basalov Yu. A. 2019, "Estimations of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 20, Issue 3, pp. 405–429. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

2. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119-121.

3. Cusick T. W. 1980, "Estimates for Diophantine approximation constants", *Journal of Number Theory*, Vol. 12 (4), pp. 543–556.

4. Davenport. H., Mahler. K. 1946 "Simultaneous Diophantine approximation", *Duke Math. J.*, Vol. 1, pp. 105–111.

5. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186-195.

6. Dirichlet L. G. P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 93–95.

7. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279-284.

8. Krass S. 1985, “The N-dimensional diophantine approximation constants“, *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313-316.

9. Mack J. M. 1977, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266-285.

10. Nowak W. G. 1981, “A note on simultaneous Diophantine approximation“, *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33-46.

11. Nowak W. G. 2016, “Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz’s theorem“, *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181-197.

12. Odlyzko A. M. 1990, “Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results“, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, Tome 2, No. 1, pp. 119–141.

13. Spohn W. G. 1968, “Blichfeldt’s theorem and simultaneous Diophantine approximation“, *Amer. J. Math.*, Vol. 90, pp. 885–894.

Получено 17.06.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.