ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-243-251

О полиадических числах Лиувилля[1]

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, РАНХиГС (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно.

Каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел Q_p .

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля(или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

Обозначим, для натурального m

$$\Phi(k, m) = k^{k^{\cdots^{k}}}$$

результат последовательного $m-$ кратного возведения в степень. Пусть

$$n_m = \Phi(k, m)$$

и пусть

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} (n_m)!.$$

Теорема 1. *Для любого натурального числа $k \geq 2$ и любого простого числа p ряд α сходится к трансцендентному элементу кольца Z_p. Иными словами, полиадическое число α глобально трансцендентное.*

Ключевые слова: полиадическое число,полиадическое число Лиувилля.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. Г. Чирский. О полиадических числах Лиувилля. // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 243–251.

[1]Работа выполнена при поддержке проекта Ведущие научные школы МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-243-251

On Polyadic Liouville numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigor'evich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University, RANEPA (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study here polyadic Liouville numbers, which are involved in a series of recent papers.

The canonic expansion of a polyadic number λ is of the form

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

This series converges in any field of $p-$ adic numbers Q_p .

We call a polyadic number λ a polyadic Liouville number, if for any n and P there exists a positive integer A such that for all primes p ,satisfying $p \leq P$ the inequality

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}$$

holds.

Let $k \geq 2$ be a positive integer. We denote for a positive integer m

$$\Phi(k, m) = k^{k^{\cdots^{k}}}$$

Let

$$n_m = \Phi(k, m)$$

and let

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} (n_m)!.$$

Theorem 1. *For any positive integer $k \geq 2$ and any prime number p the series α converges to a transcendental element of the ring Z_p. In other words, the polyadic number α is globally transcendental.*

Keywords: polyadic number,polyadic Liouville number,

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. G. Chirskii, 2021, "Polyadic Liouville numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 243–251.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях и непосредственно продолжает работу [1].

Краткая история вопроса и описание ссылок [1]-[17] приведены в [1]. Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathrm{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях $p-$ адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых $p-$ адических чисел по всем простым числам p. Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых п соответствующем кольце целых $p-$ адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$. Это позволяет ввести понятия алгебраического, трансцендентного, бесконечно трансцендентного и глобально трансцендентного полиадического числа, а также понятия алгебраической зависимости, алгебраической независимости, бесконечной алгебраической независимости и глобальной алгебраической независимости совокупности полиадических чисел, см. [9].

Будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля(или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < A^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$\left|\lambda^{(p)} - A\right|_p < A^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля $p-$адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$этого ряда.

2. Основные результаты

Пусть $k \geq 2$ натуральное число. Пусть $\Phi(k,1) = k, \Phi(k,2) = k^k$ и, для натурального m результат последовательного $m-$ кратного возведения в степень. Иными словами,

$$\Phi(k, m+1) = k^{\Phi(k,m)} \tag{1}$$

Пусть

$$n_m = \Phi(k, m) \tag{2}$$

и пусть

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} (n_m)!. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любого натурального числа $k \geq 2$ и любого простого числа p ряд (3) сходится к трансцендентному элементу кольца Z_p. Иными словами, полиадическое число (3) глобально трансцендентное.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное простое число p.

Обозначим

$$A_N = \sum_{m=0}^{N} (n_m)!, \tag{4}$$

$$r_N = \sum_{m=N+1}^{\infty} (n_m)!. \tag{5}$$

Докажем, что при $N > N_0$ выполняется неравенство

$$|r_N|_p < |A_N|^{-\varphi(N)}, \tag{6}$$

где $\varphi(N)-$ некоторая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $N \to \infty$.

Из определений (2) и (5) следует, что

$$|r_N|_p = |\Phi(k, N+1)!|_p \,.$$

Кроме того,из (1), (2), (4) очевидно следует неравенство

$$|A_N| < 2\Phi(k, N)!. \tag{7}$$

Из равенства (1) также следует, что

$$\Phi(k, N+1) \geq 2^{\Phi(k,N)} \tag{8}$$

(равенство достигается при $k = 2$). Используем известное равенство

$$|M!|_p = p^{-\frac{M - S_M}{p-1}},$$

в котором $M-$ произвольное натуральное число, а S_M- сумма цифр $p-$ ичного разложения числа M. Из него следует, что

$$|M!|_p \leq p^{-\frac{M}{p-1}} p^{\frac{(p-1)\log_p M}{p-1}} = p^{-\frac{M}{p-1}} M. \tag{9}$$

Таким образом, зафиксировав k, получаем

$$|r_N|_p = |\Phi(k, N+1)!|_p = |\Phi(k, N+1)!|_p \leq p^{-\frac{\Phi(k,N+1)}{p-1}} \Phi(k, N+1). \tag{10}$$

Для того, чтобы доказать неравенство (6) достаточно, ввиду (7),(10) доказать, что

$$p^{-\frac{\Phi(k,N+1)}{p-1}} \Phi(k, N+1) < (2(\Phi(k, N)!)^{-\varphi(N)}.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\Phi(k, N+1)\frac{\ln p}{p-1} - \ln \Phi(k, N+1) > \varphi(N) \ln(2\Phi(k, N)!). \tag{11}$$

Используем очевидное неравенство $\ln a! < a \ln a$ и получим, что неравенство (11) следует из неравенства

$$\Phi(k, N+1)\frac{\ln p}{p-1} - \ln \Phi(k, N+1) > 2\varphi(N)\Phi(k, N) \ln(2\Phi(k, N)). \tag{12}$$

Рассмотрим функцию

$$x\frac{\ln p}{p-1}-x.$$

Она возрастает при

$$x>\frac{p-1}{\ln p}.$$

Поэтому если

$$\Phi(k,N+1)>\frac{p-1}{\ln p}, \tag{13}$$

то, согласно (8), неравенство (12) следует из неравенства

$$2^{\Phi(k,N)}\frac{\ln p}{p-1}-\Phi(k,N)\ln 2>2\varphi(N)\Phi(k,N)\ln(2\Phi(k,N)). \tag{14}$$

Так как

$$\frac{2^{\Phi(k,N)}\frac{\ln p}{p-1}-\Phi(k,N)\ln 2}{2\Phi(k,N)\ln(2\Phi(k,N))}\to+\infty$$

при $N\to\infty$, неравенства (13),(14) выполняются при $N>N_0$, если в качестве функции $\varphi(N)$ выбрана, например, величина

$$\frac{2^{\Phi(k,N)}\frac{\ln p}{p-1}-\Phi(k,N)\ln 2}{4\Phi(k,N)\ln(2\Phi(k,N))}.$$

Осталось применить теорему 1 из работы [1], формулировка которой приведена ниже. □

Теорема(Теорема 1.из [1]) *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля* $\mathbb{Q}_p$. *Иными словами, полиадическое число Лиувилля - глобально трансцедентное число.*

Пусть $m-$ натуральное число. Обозначим

$$\Psi(N)=\Phi(N,[\frac{N}{m}]), \tag{15}$$

где символ $[\frac{N}{m}]=l$ обозначает целую часть числа $\frac{N}{m}$. Для любого натурального числа N пусть $N=lm+i$ и пусть для каждого $i=0,1,...,m-1$

$$\alpha_i=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi(km+i)!. \tag{16}$$

Пусть, также,

$$A_{i,N}=\sum_{k=0}^{l}\Psi(km+i)! \tag{17}$$

$$r_{i,N}=\sum_{k=l+1}^{\infty}\Psi(km+i)!. \tag{18}$$

Теорема 2. *Полиадические числа* $\alpha_i, i=0,1,...,m-1$ *глобально алгебраически независимы.*

При доказательстве этой теоремы существенно используется такое утверждение.

Теорема (Теорема 3.[1]) *Пусть всех* $i=1,...,m$

$$\alpha_i=\sum_{n=0}^{\infty}a_{i,n},a_{i,n}\in\mathbb{N} \tag{19}$$

$$A_{i,N}=\sum_{n=0}^{N}a_{i,n} \tag{20}$$

$$r_{i,N}=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_{i,N} \tag{21}$$

Пусть для простого числа p при $N\geq N_p$, где N_p- натуральное число, зависящее от p, выполнены неравенства

$$|r_{i,N}|_p<(\max_{i=1,\dots,m}A_{i,N})^{-\gamma_p(N)}, i=1,...,m, \tag{22}$$

где $\gamma_p(N)\to+\infty$ при $N\to+\infty$. Кроме того, пусть

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\ln|r_{i,N}|_p}{\ln|r_{i+1,N}|_p}=0, i=1,\dots 0,m-1. \lim_{N\to+\infty}\frac{\ln|r_{m,N}|_p}{\ln|r_{1,N+1}|_p}=0 \tag{23}$$

Тогда ряды (19)*сходятся к алгебраически независимым элементам* Z_p.

Следствие. *Если условия этой теоремы выполнены для любого простого числа p то ряды* (19) - *глобально алгебраически независимые полиадические числа.*

Докажем, что при условиях теоремы 2 выполняется условие (22) теоремы 3 [1]. Как и в доказательстве теоремы 1, ввиду (18) выполняется оценка

$$A_{i,N}=\sum_{k=0}^{[\frac{N}{m}]}\Psi(km+i)!<2\Psi(lm+i)!. \tag{24}$$

Точно так же,согласно (19)

$$|r_{i,N}|_p=|\Psi((l+1)m+i)!|_p\,. \tag{25}$$

Проверим для чисел (16)-(18) выполнение условий (19)- (23) теоремы 3 из [1]. Для проверки условия (22) достаточно доказать, что для достаточно больших l выполняется неравенство

$$|r_{0,lm}|_p<(A_{m-1,lm+m-1})^{-\gamma_p(l)}, \tag{26}$$

где $\gamma_p(l)\to+\infty$ при $l\to+\infty$.

Как в (7) и (10), ввиду (24) и (25)

$$|r_{0,lm}|_p=|\Psi((l+1)m)!|_p,$$

$$A_{m-1,lm+m-1}<2\Psi(lm+m-1)!.$$

Поэтому неравенство (26) следует из неравенства

$$|\Psi((l+1)m)!|_p<(2\Psi(lm+m-1)!)^{-\gamma_p(l)}$$

Ввиду (9), оно следует из неравенства

$$\exp(-\frac{\ln p}{p-1}\Psi((l+1)m)+\ln\Psi((l+1)m))<\exp(-\gamma_p(l)\ln(2\Psi(lm+m-1)!)). \tag{27}$$

В свою очередь, неравенство (27) следует из грубого неравенства

$$\frac{\ln p}{2(p-1)}\Psi((l+1)m)>\gamma_p(l)(2\Psi(lm+m-1))\ln(2\Psi(lm+m-1)) \tag{28}$$

По определению (15),

$$\Psi((l+1)m = \Phi((l+1)m, l+1), \Psi(lm+m-1) = \Phi(lm+m-1, l)$$

и из определения функции $\Phi(k, M)$ сразу следует, что

$$\frac{2\Psi(lm+m-1))\ln(2\Psi(lm+m-1)}{\Phi((l+1)m, l+1)} \to 0$$

при $l \to +\infty$. Поэтому выполнение условия (28)с соответствующей функцией $\gamma_p(l)$ очевидно.

Проверка асимптотических равенств (23)сводится к проверке соотношений

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{\ln|\Psi(lm+i)!|_p}{\ln|\Psi(lm+i+1)!|_p}, i = 0, 1, ..., m-1,$$

справедливость которых очевидным образом следует из определения (15). Теорема доказана.

3. Заключение

Полученные результаты будут полезны при исследовании арифметических свойств полиадических рядов, коэффициенты которых связаны с полиадическими числами Лиувилля. Это относится как к развитию метода Зигеля-Шидловского, так и к применениям аппроксимаций Эрмита-Паде первого и второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312

2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467 pp.).

3. Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers.//J.Pure and Appl. Algebra.-1978.-13.-pp.41-47.

4. Waldschmidt M. Independance algebrique de nombres de Liouville.//Lect.Notes Math.-1990.-1415.-pp.225-235.

5. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.// Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.-т.494, с. 69–70.

6. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312

7. Чирский В. Г. Обобщение понятия глобального соотношения.//Труды по теории чисел. Зап.научн.сем.ПОМИ.-322.-ПОМИ,Спб.-2005. с. 220–232.

8. Чирский В. Г.О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем.,мех.-1994.-№3.-с. 93–95.

9. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys.2019.- v.26, № 3, pp. 286–305.

10. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric F– series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, № 2, pp.175–184.

11. Юденкова Е. Ю. Арифметические свойства рядов некоторых классов в полиадической лиувиллевой точке.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312.

12. Юденкова Е. Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость знгачений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках.//Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 334 – 346.

13. Матвеев В. Ю., Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов// Чебышевский сборник.-2018, т.17, вып. 3, с. 156 – 167.

14. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей// Чебышевский сборник. 2019, т.20, вып. 2, с. 383 – 390.

15. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов. // Чебышевский сборник. 2019, т. 20, вып. 2, с. 374 – 382.

16. Самсонов А. С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей II. // Чебышевский сборник. 2021, т. 22, вып. 2, с. 334 – 346.

17. Муньос Васкес А. Х. Арифметические свойства некоторых гипергеометрических F-рядов. // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 519 – 527.

REFERENCES

1. Chirskii V. G., 2021, “On Polyadic Liouville numbers”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 3, pp. 245–255.

2. Shidlovskii, A. B.1989.“ Transcendental Numbers”, *W.de Gruyter.-Berlin.-New York.* 467 pp.

3. Adams. W., 1990, “On the algebraic independence of certain Liouville numbers”,*J.Pure and Appl.Algebra.*, Vol. 13, pp. 41–47.

4. Waldschmidt. M., 1990, “Independance algebrique de nombres de Liouville.”,*Lect.Notes Math.*, Vol. 1415, pp. 225–235.

5. Chirskii V. G., 2020, “Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter”, *Dokl. Math.*, Vol. 102, № 2, pp. 412–413.

6. Chirskii V. G., 2021, “ Arithmetic properties of values at polyadic Liouvillean point of Euler-type series with polyadic Liouvillean parameter”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp. 304–312.

7. Chirskii V. G., 2006, “Generalization of the Notion of a Global Relation”, *(*J. Math. Sci(N.Y)), Vol.137, № 2, pp. 4744–4754.

8. Chirskii V. G., 1994, “Qn series which are algebraically independent in all local fields”, *(*Vestn.Mosc.univ.Ser.1.,Math.,mech.), № 3, pp. 93–95.

9. Chirskii V. G., 2019, “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, № 3, pp. 286–305.

10. Chirskii V. G., 2020, “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, № 2, pp. 175–184.

11. Yudenkova E. Yu., 2021, “ Arithmetic properties of series of certain classes at polyadic Liouvillean point”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp. 304–312

12. Yudenkova E. Yu., 2021, “ Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp. 334–346.

13. Matveev V. Yu., 2016, “ Algebraic independence of certain almost polyadic series”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, № 3, pp. 156–167.

14. Matveev V. Yu., 2019, “ Properties of elements of direct products of fields”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, № 2, pp. 383–390.

15. Krupitsin E. S., 2019, “ Arithmetic properties of series of certain classes”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, № 2, pp. 374–382.

16. Samsonov A. S., 2021, “ Arithmetic properties of elements of direct products of p-adic fields II”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp. 236–256.

17. Munjos Vaskes A. H., 2021, “ Arithmetic properties of certain hypergeometric F-series”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, № 2, pp. 519–527.

Получено 23.08.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 621.762.227 DOI 10.22405/2226-8383-2018-22-5-252-262

Численные методы оптимизации процесса сплавления электроэрозионных частиц сплава КХМС[1]

Е. В. Агеев, А. Ю. Алтухов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, А. А. Калинин

Агеев Евгений Викторович — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: ageev_ev@mail.ru
Алтухов Александр Юрьевич — кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Калинин Антон Алексеевич — Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: antony_ak@mail.ru

Аннотация

В работе представлены результаты оптимизации сплавления электроэрозионной кобальтохромовой шихты, которую проводили путем постановки полного факторного эксперимента и метода крутого восхождения Бокса и Уилсона. Определены оптимальные параметры процесса получения кобальтохромового сплава искровым плазменным спеканием частиц сплава КХМС по твердости. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки искрового плазменного сплавления: температура, давление и время выдержки. Оптимальные параметры работы установки определяли для электроэрозионного материала КХМС, ранее полученного в спирте бутиловом. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации (твердость) для процесса сплавления электроэрозионной кобальтохромовой шихты, которые составили: 223,8 HB при давлении 30 МПа, температуре 560 °C и времени выдержки 3 минуты.

Ключевые слова: электроэрозионный кобальтохромовый порошок, искровое плазменное сплавление, оптимизация процесса, твердость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
Е. В. Агеев, А. Ю. Алтухов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, А. А. Калинин. Численные методы оптимизации процесса сплавления электроэрозионных частиц сплава КХМС // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 252–262.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда. Номер проекта 17-79-20336-П.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 621.762.227 DOI 10.22405/2226-8383-2018-22-5-252-262

Numerical methods for optimizing the process of fusion of electroerosive particles of the KHMS alloy[2]

E. V. Ageev, A. Yu. Altukhov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, A. A. Kalinin

Ageev Yevgeniy Viktorovich — doctor of technical sciences, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: ageev_ev@mail.ru
Altukhov Alexander Yuryevich — candidate of technical sciences, associate professor, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
Gvozdev Aleksander Evgenyevich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Kalinin Anton Alekseevich — Tula State University (Tula).
e-mail: antony-ak@mail.ru

Abstract

The paper presents the results of optimizing the fusion of an electroerosive cobalt-chromium charge, which was carried out by setting up a complete factor experiment and the method of steep ascent of Box and Wilson. The optimal parameters of the process of obtaining a cobalt-chromium alloy by spark plasma sintering of particles of the KHMS alloy in hardness have been determined. The parameters of operation of the spark plasma fusion plant were selected as factors: temperature, pressure and holding time. The optimal parameters of the installation were determined for the electroerosive material KHMS, previously obtained in butyl alcohol. According to the conducted series of experiments, the limiting values of the optimization parameter (hardness) for the process of fusing an electroerosive cobalt-chromium charge were determined, which amounted to: 223.8 HB at a pressure of 30 MPa, a temperature of 560 ° C and a holding time of 3 minutes.

Keywords: electroerosive cobalt-chromium powder, spark plasma fusion, process optimization, hardness.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
E. V. Ageeva, E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, A. A. Kalinin, 2021, "Numerical methods for optimizing the process of fusion of electroerosive particles of the KHMS" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 252–262.

[2]The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation. Project number 17-79-20336-P.

1. Введение

Создание новых многофункциональных мелкодисперсных сплавов, отличающихся сверхвысокой прочностью и другими уникальными свойствами, является приоритетным направлением развития современного металлургического производства. Однако это развитие сдерживается проблемой чрезвычайно высокой стоимости таких материалов, связанной с дефицитностью компонентов, технологической сложностью и дороговизной их получения. Одним из путей решения названной проблемы является переработка в мелкодисперсное сырье легковесных металлоотходов, содержащих дорогостоящие компоненты такие, как Cr, Co и др., силами собственных производственных мощностей предприятий при минимальных затратах энергии и экологическом уроне окружающей среды [1-9].

Основным требованием к порошкам для аддитивных технологий является сферическая форма частиц. Такие частицы наиболее компактно укладываются в определенный объем и обеспечивают «текучесть» порошковой композиции в системах подачи материала с минимальным сопротивлением. Кроме того, порошок должен содержать минимальное количество растворенного газа. Микроструктура порошка должна быть однородной и мелкодисперсной (с равномерным распределением фазовых составляющих) [10-19].

Исходя из требований аддитивного производства к форме порошкового материала предлагается технология электродиспергирования. Однако, до настоящего времени данный способ измельчения металлоотходов в порошковые материалы недостаточно изучен и в промышленности данный способ практически не применяется, ввиду отсутствуя полноценных комплексных сведений о составе, структуре и свойствах диспергированных электроэрозией частиц, а также сплавов, полученных на их основе. Для этого требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований [20, 21].

Следует отметить, что электродиспергирование выгодно отличается от других способов получения порошков микро- и нанофракций относительно невысокими энергетическими затратами и экологической чистотой. Одним из преимуществ предложенной технологии является применение в качестве исходных материалов отходов, которое значительно дешевле чистых компонентов, используемых в традиционных технологиях. Кроме того, данная технология позволяет, за счет возможности регулирования в широких пределах энергетических параметров процесса, управлять распределением размеров и формой получаемых порошков [22, 23].

Для устранения указанных недостатков в рамках намеченных исследований для аддитивных технологий предлагаются к использованию порошковые композиции, полученные из сплавов на основе Co-Cr электроэрозионным диспергированием.

Решение данных задач позволит решить проблему создания многофункциональных мелкодисперсных сплавов за счет электроэрозионной металлургии отходов цветных металлов и легированных сплавов.

Целью настоящей работы являлось исследование сплавляемости электроэрозионных кобальтохромовых порошков, изготавливаемых для аддитивных изделий.

2. Основной текст статьи

Для получения Co-Cr порошковых материалов были выбраны отходы сплава марки КХМС «ЦЕЛЛИТ» (Co – 63%, Cr – 27%, Mo – 5%, Ni – 2%, Fe – 2%). Диспергирование этих отходов проводили в бутиловом спирте, который использовали в качестве рабочей жидкости, на установке для электроэрозионного диспергирования токопроводящих материалов (Патент РФ №2449859). В результате диспергирования отходов кобальтохромового сплава происходило его разрушение в результате локального воздействия кратковременных электрических разрядов между электродами, находящимися в рабочей жидкости с образованием частиц.

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	T, ^oC	P, МПа	t, мин.
		X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0	510	20	2
Интервал варьирования	Δx_i	50	10	1
Верхний уровень	+1	560	30	3
Нижний уровень	-1	460	10	1

Таблица 1: Уровни и интервалы варьирования

№ п/п	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$	Y_1	Y_2	Y_3	$\overline{Y}_i$	$S^2_{воспр}$
1	++	-	-	-	+	+	+	-	160	161	162	161	2
2	+++	+	-	-	-	-	+	+	190	191	190	190,3	0,67
3	+	-	+	-	-	+	-	+	174	175	176	175	2
4	+	+	+	-	+	-	-	-	200	202	201	201	2
5	+	-	-	+	+	-	-	+	181	181	181	181	0
6	+	+	-	+	-	+	-	-	210	211	212	211	2
7	+	-	+	+	-	-	+	-	188	188	188	188	0
8	+	+	+	+	+	+	+	+	227	227	228	227,3	3,07

Таблица 2: Матрица планирования эксперимента

Заготовки сплавов получали в системе искрового плазменного сплавления SPS 25-10 «Thermal Technology» (США).

Из свойств, лимитирующих ресурс изделий, технологически просто и информативно определяется твердость, поэтому оптимизацию процесса сплавления проводили по твердости. Оптимизацию сплавления электроэрозионной кобальтохромовой шихты проводили путем постановки полного факторного эксперимента и метода крутого восхождения Бокса и Уилсона. Блок-схема методики оптимизации представлена на рисунках 1-3.

3. Результаты и их обсуждение

Согласно блок-схемам методики, представленным на рисунках 1-3, были выбраны уровни и интервалы варьирования (таблица 1) и составлены матрицы планирования для экспериментов, проведенных с электроэрозионными кобальтохромовыми частицами (таблица 2).

Согласно проведенным расчетам, было получено уравнение регрессии, моделирующие полный факторный эксперимент:

$$\hat{y} = 191,8 + 15,5X_1 + 6X_2 + 10X_3 + 0,75X_1X_2 + 1,75X_1X_3 - 0,18X_2X_3 + 1,58X_1X_2X_3$$

Проверка показала, что все коэффициенты уравнения являются значимыми.

Проверку уравнений на адекватность проводили с использованием критерия Фишера. В результате расчета установлено, что уравнение регрессии адекватно.

Полученное уравнение было использовано для расчета крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение начинали из нулевой точки (основные уровни). Согласно проведенной серии опытов, результаты которых представлены в таблице 3, определены предельные значения параметра оптимизации $\hat{y}$ (твердость) для процесса сплавления электроэрозионных кобальтохромовых частиц, которые составили: 223,8 HB при давлении 30 МПа, температуре 560 °C и времени выдержки 3 минуты.

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса использована модель первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3$$

где X_1, X_2, X_3 – факторы,

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0			
Интервал варьирования	Δx_i			
Верхний уровень	+1			
Нижний уровень	-1			

Каждый опыт проводится трижды (y_1, y_2, y_3).
Используя уравнения $X_1 = \frac{U-O}{\Delta x_{i(U)}}$; $X_2 = \frac{v-O}{\Delta x_{i(v)}}$; $X_3 = \frac{C-O}{\Delta x_{i(C)}}$, перекодируем значения факторов и составим матрицу планирования эксперимента.

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y_1	y_2	y_3	$\overline{y}_i$	$S^2_{\text{воспр}i}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-					
2	+	+	-	-	-	-	+	+					
3	+	-	+	-	-	+	-	+					
4	+	+	+	-	+	-	-	-					
5	+	-	-	+	+	-	-	+					
6	+	+	-	+	-	+	-	-					
7	+	-	+	+	-	-	+	-					
8	+	+	+	+	+	+	+	+					

Рис. 1: Блок-схема методики оптимизации процесса сплавления (этап 1)

1. $\overline{y_i} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

2. Определяем дисперсию параллельных опытов:

$$S^2_{\text{воспр}_i} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}\left(y_{ij} - \overline{y_i}\right)^2$$

3. Вычисляем сумму дисперсии воспроизводимости для всех опытов $\sum_{i=1}^{8} S^2_{\text{воспр}_i}$

4. Осуществляем проверку дисперсий с использованием критерия Кохрена:

$$G_{\text{расч}} = \frac{S^2_{max}}{\sum_{i=1}^{n} S_{\text{воспр}_i}}$$

Сравниваем $G_{\text{расч}}$ и $G_{\text{табл}}$. Если $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$, принимаем гипотезу об однородности дисперсий. Если $G_{\text{расч}} > G_{\text{табл}}$, дисперсия неоднородная.

5. Вычисляем дисперсию воспроизводимости для всех экспериментов

$$S^2_{\text{восп}} = S^2_{(y)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S^2_{\text{воспр}_i}$$

6. Вычисляем ошибку всего эксперимента

$$S(y) = \sqrt{S^2_{(y)}}$$

7. Рассчитываем коэффициенты уравнения

$b_i = \frac{1}{N}\sum_1^N X_{in}\overline{y_i}$, $b_0 = \frac{1}{N}\sum_1^N \overline{y_i}$, $b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_1^N X_{in}X_{jn}\overline{y_i}$

8. Составление уравнения регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3$$

9. Проверяем статистическую значимость коэффициентов.

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}}$$

Далее определяем доверительный интервал длиной $2\Delta b_i$:

$$\Delta b_i = t_{табл} S(b_i)$$

Табличное значение $t_{табл}$ выбираем для числа степеней свободы $f = N(m-1)$

Сравниваем Δb_i и b_i. Если $\Delta b_i > b_i$, то коэффициент не значимый – исключаем из уравнения регрессии. Если $\Delta b_i < b_i$, то коэффициент значимый – оставляем в уравнении регрессии.

10. Проверяем уравнение на адекватность

Находят значения F- критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{расч} = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{восп}} = \frac{S^2_{ад}}{S^2(y)}$$

Для того чтобы воспользоваться таблицей F-критерия, необходимо определить число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ и $f_{\text{восп}}$: $f_{\text{ад}} = N - 1$, $f_{\text{восп}} = N(m-1)$.

Исходя из найденных значений $fад$, $fвосп$ находим по таблице $Fтабл$. Если $Fрасч < Fтабл$, то уравнение считают адекватным.

Рис. 2: Блок-схема методики оптимизации процесса сплавления (этап 2)

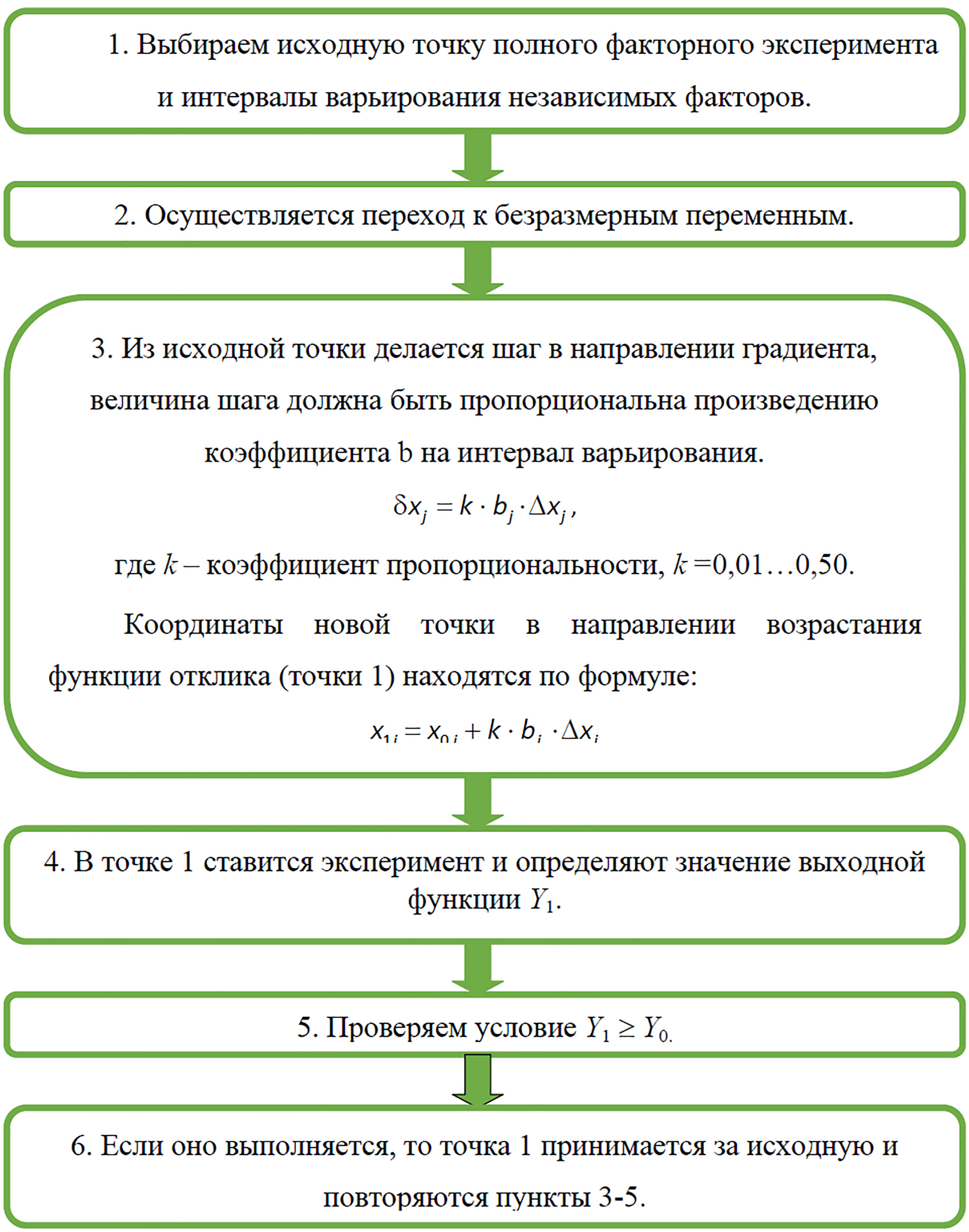

Рис. 3: Блок-схема методики оптимизации процесса сплавления (этап 3)

Наименование	X_1 (T, °C)	X_2 (P, МП a)	X_3 (t, мин.)	$\hat{y}$, HB
Основной уровень	510	20	2	–
Коэффициент b_i	15,5	6	10	–
Интервал варьирования ξ_i	50	10	1	–
$b_i \cdot \xi_i$	775	60	10	–
Шаг Δ_i	38,75	3	0,5	–
Округленный шаг	39	3	1	–
Опыт 1	549	23	3	214,9
Опыт 2	560	26	3	220,5
Опыт 3	560	29	3	223,1
Опыт 4 (max)	560	30	3	223,8

Таблица 3: Расчет крутого восхождения

4. Заключение

1. Проведено определение оптимальных параметров процесса сплавления электроэрозионных кобальтохромовых частиц искровым плазменным сплавлением путем проведения полного факторного эксперимента. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки искрового плазменного сплавления: температура, давление и время выдержки. Оптимальные параметры работы установки определяли для электроэрозионного материала КХМС, ранее полученного в спирте бутиловом.

2. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации $\hat{y}$ (твердость) для процесса сплавления электроэрозионной кобальтохромовой шихты, которые составили: 223,8 HB при давлении 30 МПа, температуре 560 °C и времени выдержки 3 минуты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Song B., Dong S., Zhang B. et al. Effects of processing parameters on microstructure and mechanical property of selective laser melted Ti6Al4V. // Materials & Design, 2012, Vol. 35. P. 120–125.

2. Song B., Dong S., Coddet P. et al. Fabrication and microstructure characterization of selective laser melted FeAl intermetallic parts // Surface and Coatings Technology, 2012, Vol. 206. P. 4704–4709.

3. Loeber L., Biamino S., Ackelid U. et al. Comparison of Selective Laser and Electron Beam Melted Titanium Aluminides // Conference paper of 22nd International symposium "Solid freeform fabrication proceedings", University of Texas, Austin, 2011. P. 547-556.

4. Biamino S., Penna A., Ackelid U. et al. Electron beam melting of Ti–48Al–2Cr–2Nb alloy: microstructure and mechanical properties investigation // Intermetallics, 2011, Vol. 19. P. 776–781.

5. Safdar A., Wei L.Y., Snis A., Lai Z. Evaluation of microstructural developmentin electron beam melted Ti–6Al–4V // Materials Characterization, 2012, Vol. 65. P. 8–15.

6. Safdar A., He H.Z., Wei L.Y., Snis A. et al. Effect of process parameters settings and thickness on surface roughness of EBM produced Ti–6Al–4V // Rapid Prototyping Journal, 2012. Vol. 18 (5). pp.401–408.

7. Gu D.D., Meiners W., Wissenbach K., Poprawe R. Laser additive manufacturing of metallic components: materials, processes and mechanisms // International Materials Reviews, 2012, Vol. 57 (3). P. 133-164.

8. Wang Z., Guana K., Gaoa M. The microstructure and mechanical properties of deposited-IN718 by selective laser melting // Journal of Alloys and Compounds, 2012, Vol. 513. P. 518–523

9. Григорьянц А.Г., Третьяков Р.С., Фунтиков В.А. Повышение качества поверхностных слоев деталей, полученных лазерной аддитивной технологией // Технология машиностроения. 2015. № 10. С. 68-73.

10. Вулпе М.Н., Колесников Д.Н., Морушкин А.Е. Лазерная сварка заготовок, полученных аддитивными технологиями // Технология машиностроения и материаловедение. 2017. № 1. С. 142-144.

11. Нигметзянов Р.И., Сундуков С.К., Фатюхин Д.С. Влияние ультразвуковой обработки на шероховатость поверхности деталей, полученных аддитивными технологиями // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2016. №. (315). С. 47-53.

12. Чумаков Д.М. Перспективы использования аддитивных технологий при создании авиационной и ракетно-космической техники // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 31.

13. Григорьянц А.Г., Новиченко Д.Ю., Смуров И.Ю. Лазерная аддитивная технология изготовления покрытий и деталей из композиционного материала // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 7. С. 38-46.

14. Лейцин В.Н., Пономарев С.В., Дмитриева М.А., Ивонин И.В., Тырышкин И.М. Моделирование процесса спекания изделий из низкотемпературной керамики, формируемых аддитивными технологиями // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 4. С. 21-27.

15. Волосова М.А., Окунькова А.А., Конов С.Г., Котобан Д.В. Аддитивные технологии: от технического творчества к инновационным промышленным технологиям // Техническое творчество молодежи. 2014. № 5 (87). С. 9-14.

16. Федоров М.М. Разработка замкнутой технологической цепочки изготовления деталей ГТД по аддитивным технологиям // Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П.А. Соловьева. 2017. № 1 (40). С. 115-118.

17. Ковалев О.Б. Моделирование процессов в технологиях лазерного аддитивного изготовления объемных металлоизделий // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2016. Т. 80. № 4. С. 408.

18. Смирнов В.В., Шайхутдинова Е.Ф. Внедрение аддитивных технологий изготовления деталей в серийное производство // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2013. № 2-2. С. 90-94.

19. Смирнов В.В., Ганеев А.А., Шайхутдинова Е.Ф. Применение аддитивных технологий для изготовления деталей из интерметаллидных сплавов на основе титана // Ползуновский альманах. 2013. №. 2. С. 78-80.

20. Ageev E.V., Latypov R.A. Fabrication and investigation of carbide billets from powders prepared by electroerosive dispersion of tungsten-containing wastes // Russian Journal of Non-Ferrous Metals. 2014. T. 55. No. 6. pp. 577-580.

21. Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. Manufacture of cobalt–chromium powders by the electric discharge dispersion of wastes and their investigation // Russian metallurgy (Metally). 2018. T. 2018. No. 12. pp. 1177-1180.

22. Агеев Е.В., Латыпов Р.А. Получение и исследование заготовок твердого сплава из порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамсодержащих отходов // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2014. № 5. С. 50-53.

23. Аддитивные изделия из электроэрозионного кобальтохромового порошка / Е.В.Агеев, Е.В. Агеева, А.Ю. Алтухов // Металлург. 2021. – №10. – С. 78-81.

REFERENCES

1. Song, B., Dong, S., Zhang, B. et al. 2012, "Effects of processing parameters on microstructure and mechanical property of selective laser melted Ti6Al4V", *Materials & Design*, Vol. 35. P. 120–125.

2. Song, B., Dong, S., Coddet, P. et al. 2012, "Fabrication and microstructure characterization of selective laser melted FeAl intermetallic parts", *Surface and Coatings Technology*, Vol. 206. P. 4704–4709.

3. Loeber, L., Biamino, S., Ackelid, U. et al. 2011, "Comparison of Selective Laser and Electron Beam Melted Titanium Aluminides", *Conference paper of 22nd International symposium "Solid freeform fabrication proceedings"*, University of Texas, Austin, P. 547-556.

4. Biamino, S., Penna, A., Ackelid, U. et al. 2011, "Electron beam melting of Ti–48Al–2Cr–2Nb alloy: microstructure and mechanical properties investigation", *Intermetallics*, Vol. 19. P. 776–781.

5. Safdar, A., Wei, L.Y., Snis, A., Lai, Z. 2012, "Evaluation of microstructural developmentin electron beam melted Ti–6Al–4V", *Materials Characterization*, Vol. 65. P. 8–15.

6. Safdar, A., He H. Z., Wei L. Y., Snis, A. et al. 2012, "Effect of process parameters settings and thickness on surface roughness of EBM produced Ti–6Al–4V", *Rapid Prototyping Journal*, Vol. 18 (5). pp.401–408.

7. Gu D. D., Meiners, W., Wissenbach, K., Poprawe, R. 2012, "Laser additive manufacturing of metallic components: materials, processes and mechanisms", *International Materials Reviews*, Vol. 57 (3). P. 133-164.

8. Wang, Z., Guana, K., Gaoa, M. 2012, "The microstructure and mechanical properties of deposited-IN718 by selective laser melting" *Journal of Alloys and Compounds*, Vol. 513. P. 518–523

9. Grigoryants A.G., Tretyakov R.S., Funtikov V.A. 2015, "Improving the quality of surface layers of parts obtained by laser additive technology", *Technology of mechanical engineering.* № 10. C. 68-73.

10. Vulpe M.N., Kolesnikov D.N., Morushkin A.E. 2017, "Laser welding of blanks obtained by additive technologies", *Technology of mechanical engineering and materials science.* № 1. C. 142-144.

11. Nigmetzyanov R.I., Sundukov S.K., Fatyukhin D.S. 2016, “Influence of ultrasonic treatment on the surface roughness of parts obtained by additive technologies“, *Fundamental and applied problems of engineering and technology.* №. (315). C. 47-53.

12. Chumakov D.M. 2014, “Prospects for the use of additive technologies in the creation of aviation and rocket and space technology“, *Proceedings of MAI.* № 78. C. 31.

13. Grigoryants A.G., Novichenko D.Yu., Smurov I.Yu. 2011, “Laser additive manufacturing technology of coatings and parts made of composite material“, *News of higher educational institutions. Mechanical engineering.* № 7. C. 38-46.

14. Leitsin V.N., Ponomarev S.V., Dmitrieva M.A., Ivonin I.V., Tyryshkin I.M. 2016, “Modeling of the sintering process of products made of low-temperature ceramics formed by additive technologies“, *Physical Mesomechanics.* T. 19. № 4. C. 21-27.

15. Volosova M.A., Okunkova A.A., Konov S.G., Kotoban D.V. 2014, “Additive technologies: from technical creativity to innovative industrial technologies“, *Technical creativity of youth.* № 5 (87). C. 9-14.

16. Fedorov M.M. 2017, “Development of a closed technological chain for the manufacture of GTE parts using additive technologies“, *Bulletin of the Rybinsk State Aviation Technological Academy named after P.A. Solovyov.* № 1 (40). C. 115-118.

17. Kovalev O.B. 2016, “Modeling of processes in technologies of laser additive manufacturing of bulk metal products“, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. The series is physical.* T. 80. № 4. C. 408.

18. Smirnov V.V., Shaikhutdinova E.F. 2013, “Introduction of additive manufacturing technologies of parts into serial production“, *Bulletin of Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev.* № 2-2. C. 90-94.

19. Smirnov V.V., Ganeev A.A., Shaikhutdinova E.F. 2013, “Application of additive technologies for the manufacture of parts from intermetallic alloys based on titanium“, *Polzunovsky Almanac.* №. 2. C. 78-80.

20. Ageev E.V., Latypov R.A. 2014, “Fabrication and investigation of carbide billets from powders prepared by electroerosive dispersion of tungsten-containing wastes“, *Russian Journal of Non-Ferrous Metals.* T. 55. No. 6. pp. 577-580.

21. Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Y., Ageeva E.V. 2018, “Manufacture of cobalt–chromium powders by the electric discharge dispersion of wastes and their investigation“, *Russian metallurgy (Metally).* T. 2018. No. 12. pp. 1177-1180.

22. Ageev E.V., Latypov R.A. 2014, “Obtaining and research of hard alloy blanks from powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-containing waste“, *Izvestiya vysshochnykh uchebnykh uchebnykh. Non-ferrous metallurgy.* № 5. C. 50-53.

23. Ageev E.V., Ageeva E.V., Altukhov A.Yu. 2021, “Additive products from electroerosive cobalt-chromium powder“, *Metallurg.* – №10. – C. 78-81.

Получено 18.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 51 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-263-269

Ещё раз о «десанте» московских математиков в Петроград в 1921 году

С. С. Демидов

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: serd42@mail.ru

Аннотация

Заметка посвящена приезду в июне 1921 года большой группы московских математиков, главным образом учеников Н.Н. Лузина, в Петроград для участия в мемориальных заседаниях по случаю 100-летия со дня рождения П. Л. Чебышева. Этот исторический визит стал первой в советской истории математической конференцией, а также первым шагом москвичей в преодолении возникшей ещё в 1880-е годы конфликтной ситуации во взаимоотношениях математиков двух столиц.

Ключевые слова: П. Л. Чебышев, Московская школа теории функций, Российская Академия наук, Петербургская математическая школа, Петроградский университет.

Библиография: 8 названия.

Для цитирования:
С. С. Демидов Ещё раз о «десанте» московских математиков в Петроград в 1921 году // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 263–269.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 51 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-263-269

Once again about the «landing» of Moscow mathematicians in Petrograd in 1921

S. S. Demidov

Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: serd42@mail.ru

Abstract

The note is devoted to the arrival in June 1921 of a large group of Moscow mathematicians, mainly students of N. N. Luzin, to Petrograd to participate in memorial meetings on the occasion of the 100th anniversary of the birth of P. L. Chebyshev. This historic visit became the first mathematical conference in Soviet history, as well as the first step of Muscovites in overcoming the conflict situation that arose in the 1880s in the relationship between mathematicians of the two capitals.

Keywords: P. L. Chebyshev, Moscow school of function theory, Russian Academy of Sciences, Petersburg mathematical school, Petrograd University.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
S. S. Demidov, 2021, “Once again about the «landing» of Moscow mathematicians in Petrograd in 1921” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 263–269.

1. Введение

Ранним утром на площадь перед Николаевским вокзалом Петрограда высыпала шумная кампания людей, по преимуществу молодых. Это были прибывшие из Москвы математики, в большинстве своём ученики профессора Николая Николаевича Лузина. Какие это были точно дата и день недели установить сегодня сложно. Можно сказать только, что это было начало июня – к июню относил это событие Л.А. Люстерник [1, 2], а на 26 мая, как тогда считали[1], приходился день рождения Пафнутия Львовича Чебышева: москвичи прибыли как раз на торжества, которые проводились их петроградскими коллегами в ознаменование 100-летия великого математика. Приехали, как вспоминал Л.А. Люстерник, «университетские профессора Н.Н. Лузин, В.А. Костицын, С.П. Фиников с жёнами, старая гвардия Лузитании – В.В. Степанов, ... В.Н. Вениаминов, П.С. Урысон, «ивановцы»[2] А.И. Некрасов – ректор Ивановского политехнического ин-та, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, А.Н. Власов, аспиранты 1-го и 2-го МГУ – С.Д. Россинский, В.С. Богомолова, А.Ю. Зеленская, С.С. Ковнер и только что закончившая досрочно университет и оставленная при нём Н.К. Бари, человек 8 – 9 старшекурсников –

[1] Как было установлено В.Е. Прудниковым, обнаружившим соответствующую запись в метрической книге храма Преображения Господня в селе Спас – Прогнанье Калужской губернии, Чебышев родился 4 (16) мая 1821 г. см [3].

[2] В жестокую пору гражданской войны спасавшиеся от голода и холода в Иваново - Вознесенске.

студентов, среди них Юлия Рожанская, «Татуля» (Татьяна Юльевна) Айхенвальд, Бэла Певзнер, Митя Перепёлкин, Коля Нюберг и др., в том числе – автор», Л.А. Люстерник [2], [с. 190]. Шумная кампания, «взявшись под руку, “широким фронтом” двинулась по мостовой Невского проспекта» (на котором практически отсутствовал транспорт – город только начинал приходить в себя после событий великой революции) к Дворцовой площади. Подробности об этом «десанте» мы черпаем сегодня из двух источников – из уже упомянутых воспоминаний Лазаря Ароновича Люстерника (1899 – 1981) [1, 2] и недавно опубликованных мемуаров [4] Владимира Александровича Костицына (1883 – 1963). Оба участника событий описывали их по памяти, уже будучи пожилыми людьми[3], и отдельные, зачастую важные, моменты, переданы ими по-разному, а иногда даже входят во взаимное противоречие. Так Костицын называет среди приехавших П.С. Александрова (и даже числит его среди докладчиков на заседании Петроградского математического общества – об этом ниже), тогда как Люстерник пишет, что Павел Сергеевич заболел и в Петроград не поехал. Впрочем, ничего удивительного в таком разнобое нет – память подводит. К тому же оба рассказчика принадлежали в описываемое время к совершенно разным кругам московского математического сообщества – Костицын к профессорскому (он был в то время одной из самых влиятельных фигур в советской научной администрации и ехал, в частности, уладить некоторые проблемы, возникшие в управлении Пулковской обсерваторией), Люстерника же следует причислить к самым «низам» на его иерархической лестнице – он был просто студентом. Так что их положение и, соответственно этому, информированность, а потому и сама «оптика» были совершенно различными. Впрочем, в вопросе о наличии в «десанте» Александрова следует верить Лазарю Ароновичу: он делился своими воспоминаниями на торжественном заседании, посвящённом столетию Московского математического общества [1], в присутствии самого Александрова, в то время как Костицын писал их в Париже, не имея никаких возможностей для проверки сообщаемой информации. В других же вопросах следует доверять скорее Костицыну, обитавшему «в верхах». Так Люстерник пишет [2], [с. 189]: «Приглашение приять участие в юбилее, естественно, было послано Московскому университету – alma mater П.Л. Чебышева – и Московскому математическому обществу, членом-учредителем которого он был». Костицын же сообщает [4], [с. 202]: «около 40 московских математиков, молодых и не столь молодых ... должны были выехать в Петроград без приглашения, потому что Академия наук, верная своим традициям, никого из Москвы не пригласила». И потому, когда москвичи уже добрались до Академии наук, там «были напуганы такой обширной делегацией и не проявили ни гостеприимства, ни корректности: под предлогом, что программа чествования уже выработана, представителям Москвы не было предоставлено слово для приветствия» [4], [с.203].

Удивляться такому приёму особенно не приходится. Московские и питерские математики к тому времени вот уже почти сорок лет как пребывали в состоянии конфронтации, зачастую переходившей в открытые столкновения. Напомним лишь о дебатах по поводу результатов В.Г. Имшенецкого 1887 – 1891 гг. о методах нахождения дробно-рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений, все коэффициенты которых и свободный член – целые рациональные функции (см. [5], [с. 433]). Москвичи (К.А. Андреев, П.А. Некрасов и др.) поддержали петербургского академика, с яростной критикой которого выступили его петербургские коллеги (А.А. Марков, А.Н. Коркин, К.А. Поссе). Дебаты эти завершились заседанием Московского математического общества в июне 1892 года, после которого Имшенецкий скончался в одной из московских гостиниц. Или о столкновении москвичей с петербуржцами в связи с результатами С.В. Ковалевской об интегрировании уравнений движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки, в 1888 году удостоенных премии Академии наук Франции. А.А. Марков обнаружил пробелы в её доказательствах и обрушился на Ковалевскую с резкой

[3]Записи В. А. Костицына датируются маем 1950 года, воспоминания Л. А. Люстерника 1961 годом, когда он «на некоторое время по состоянию здоровья» оказался «оторванным от обычных занятий» [1], [с. 21].

критикой. В её защиту выступили московские математики П.А. Некрасов и Г.Г. Аппельрот, попытавшиеся заполнить эти пробелы (см. [6]).

Конфронтацию петербургских и московских математиков следует рассматривать в контексте культурной оппозиции двух столиц, носившей в основании своём причины идеологического характера. Если Санкт-Петербург обозначил для России западно-европейский вектор развития, то Москва стала символом ушедшего Московского царства, старого уклада жизни, старых культурных традиций (см. [7]). Две столицы с самого начала оказались в культурном противостоянии. Петербург ощущал себя городом европейским – не говоря уже о самом его облике, о настроениях в области литературы и искусства, здесь всегда более отчётливо проявлялись прозападные религиозные, мировоззренческие и политические устремления. Здесь царил дух совсем иной, чем в златоглавой, с её спокойным размеренным бытом, с её подчёркнутой русскостью, православием, большей, чем в северной столице, преданностью престолу. И то, что в Петербурге пребывала Императорская Российская Академия наук, лишь усиливало элитарный характер столичного научного сообщества, в частности, математического, противопоставляя его сообществу провинциальному, в том числе московскому, в свою очередь никогда не расстававшемуся с претензиями математиков старейшего российского университета. В Петербурге и Москве сложились математические сообщества совершенно разные по духу, в конечном итоге определившему взгляды на математику и теоретические предпочтения, обусловившие различия в тематике исследований. Сложившееся конфронтационные взаимоотношения обострились в 90-е годы, когда после уходи из жизни П.Л. Чебышева, старавшегося сохранять добрые отношения со свой Alma mater, фактическим лидером петербуржцев стал воинственный А.А. Марков[4].

Не принесли мира в отношения и начавшаяся в 1914 году Первая мировая война, разразившиеся в 1917 году революции и последовавшая за ними гражданская война. Тяжело пережили все эти события наука и образование. Отсутствие нормального снабжения продуктами питания и топливом поставило городское население на грань выживания. Особенно тяжко пришлось крупным городам, прежде всего Петрограду и Москве, в которую в 1918 году переехала столица государства. В 1921 году закончилась гражданская война и стала постепенно налаживаться мирная жизнь. В Петрограде начал работать Физико-математический институт Академии наук, директором которого стал В.А. Стеклов (именно из него в 1934 выделится Математический институт им. В.А. Стеклова – один из ведущих математических институтов XX столетия), а в Московском университете уже велась работа по организации Научно-исследовательского института математики и механики[5], открытого в 1922.

Такова была ситуация в Петрограде и Москве в июне 1921 года – в дни, когда петроградские математики решили праздновать столетие со дна рождения создателя Петербургской математической школы великого русского математика П.Л. Чебышева.

Посвящённое этой дате торжественное заседании Академии наук (а оно было собрано через день после прибытия в Петроград московского «десанта») открылось докладом А.В. Васильева, который, пишет Костицын [4], [с. 206], «рассказал биографию Чебышева и дал очень хороший обзор его деятельности. Говорить о работах Чебышева по теории чисел должен был академик Марков, который, никогда, по-видимому, не способен говорить на тему и всегда должен выказывать оппозицию установленной власти». И теперь «он говорил не столько о

[4]Эта «холодная война» математиков двух столиц накладывала отпечаток на жизнь всего российского математического сообщества, так как профессура российских университетов в значительной степени состояла из воспитанников столичных университетов.

[5]Люстерник вспоминал [2], [с. 25]: «Добавлю: и в вагоне (то есть по дороге из Москвы в Петроград – С. Д.), и в студенческом общежитии (где поселили молодёжь из московского «десанта»; профессоров разместили в Доме Учёных – С. Д.) дискутировалась новость - предстоящее открытие в Москве при МГУ Института математики и механики». Надо думать, что эта новость обсуждалась и в гостинице Дома Учёных, где остановился со своей женой и В. А. Костицын - один из создателей и руководителей нового института.

Чебышеве, сколько о хорошей эпохе, в которую жил Чебышев, тогда как теперь “каждый безграмотный товарищ может явиться сюда, заявить, что я ничего не понимаю в теории чисел, и выгнать меня вон”. И надо было слышать тон, каким было произнесено это ненавистное слово “товарищ”».

Далее, здесь мы уже предоставим слово Люстернику [2], [с. 25][6], «В. А. Стеклов прочёл доклад “Теория и практика в трудах П.Л. Чебышева”, вышедший через два года в свет[7]».

Возможность выступить с докладами была предоставлена москвичам на следующий день на приуроченных к юбилею Чебышева заседаниях Петроградского математического общества, которые проходили в здании университета. Из петербуржцев, как пишет Люстерник [2], [с.25], на этих заседаниях выступили Я.В. Успенский, Б.А. Венков, Г.М. Фихтенгольц и др., из москвичей – Н.Н. Лузин, А.И. Некрасов, П.С. Урысон. А также, добавим мы, В.А. Костицын. Об этом мы узнаём из его воспоминаний (см. [4], [с.204]: «Из нас докладывали Некрасов, Александров[8], Урысон и я»). Про доклад Костицына Люстерник либо запамятовал, как Костицын о лузинском докладе, либо посчитал за благо о докладе эмигранта (а Костицын в 1928 г. эмигрировал во Францию, впрочем к тому времени его уже не было в живых) не упоминать. О содержании московских докладов (обо всех кроме костицынского) мы знаем от Люстерника следующее [3], [с. 192]: «А.И. Некрасов рассказал о своих работах по теории нелинейных интегральных уравнений, возникших в связи с теорией распространения волн. Развитый им метод их решения получил название «метод Некрасова». Лузин строил пример аналитической функции, стремящейся к бесконечности всюду на границе круга сходимости; для этого приходилось вести построения на последовательности окружностей, стремящихся к граничной. Конечно, лузитанцы «болели» за своего шефа, который должен был показать «зазнавшимся петербуржцам» класс математики. Когда Лузин кончил, Павел Урысон подбежал к нему и воскликнул: «Николай Николаевич, Вы их забили своими кругами!...». Доклад самого П.С. Урысона был посвящён некоторым топологическим свойствам плоских континуумов. Ни мы, ни сам докладчик не понимал, что это первая ласточка новой математической школы – топологической».

Этот пассаж Люстерник завершил следующими словами: «Так состоялась первая в советское время математическая конференция, первая встреча математиков двух крупнейших научных центров». Мы же к этим словам добавим следующее: так без видимого внешнего успеха завершилась первая попытка москвичей сломать лёд в отношениях с петербуржцами. Ни о каком серьёзном прорыве в этих отношениях (хотя москвичи и делали шаги, призванные их наладить – так Н.Н. Лузин нанёс визит проживавшему тогда в Петергофе А.А. Маркову [1], [с.27]) нельзя было говорить, если в 1926 году, то есть через добрые пять лет после означенного события, академик Я.В. Успенский в письме академику А.Н. Крылову дал такую оценку творчеству Н.Н. Лузина и созданной им школе (цитирую по [8], [с. 193]): «Относительно Лузина я знаю, что он хороший специалист в своей области (теория множеств и связанная с нею канторовско-лебеговская дребедень), блестящий профессор, создавший в Москве школу своих учеников и своим влиянием упразднивший настоящую математику в Москве».

Последующее десятилетие внесло целый ряд изменений во взаимоотношения математиков двух математических школ, которые развивались тем более успешно, что очень многое стало зависеть от связей со столицей, которой теперь уже стала Москва. Однако конец кон-

[6] У Костицына эта информация отсутствует.

[7] С некоторыми сокращениями текст доклада Стеклова воспроизведён в первом томе *Успехов математических наук* за 1946 год - во 2 (12) выпуске (с. 4-11), посвящённом 150 - летию П. Л. Чебышева.

[8] Мы уже говорили о том, что память подвела Костицына - у него сложилось убеждение, что Александров участвовал в «десанте». Так, описывая прогулку москвичей по ночному Петрограду (а это был июнь - время белых ночей), Костицын даже пишет [4], [с. 204]:«...Павел Самуилович Урысон ничего не замечал, кроме разлитой вокруг красоты, а его alter ego, Павел Сергеевич Александров, с ненавистью смотрел на “дорогого учителя”». Для нас такая «ошибка» должна служить серьёзным предупреждением: критически относится к информации, доставленной памятью.

фронтации положил внешний фактор, вмешательство посторонней силы – державной воли «отца народов» И.В. Сталина. В осуществляемых им реформах будущее здание Советской науки мыслилось им в виде пирамиды, управляемой из вершины, в которой располагается «штаб советской науки» – в соответствии с его идеями реорганизованная Академия наук СССР, которая должна всегда быть у него «под рукой», то есть в Москве. В соответствии с этим Президиум Академии и 14 ведущих институтов следовало перевести в Москву, что и было осуществлено в 1934 году. Так что в 1934 Математический институт им. В.А. Стеклова переехал в Москву и представители двух великих школ были вынуждены жить и трудиться вместе. Возник их удивительный синтез, усиленный учёными, приехавшими в столицу из других центров математической мысли – синтез, заложивший основу для формирования Советской математической школы – одной из определяющих развитие мировой математической мысли второй половины XX столетия.

И математический «десант» из Москвы, высадившийся ранним июньским утром 1921 года на Николаевском вокзале Петрограда, стал первым шагом в её строительстве, хотя никто из участников этого события не мог об этом тогда даже и помыслить. Вот, как об этом писал Л.А. Люстерник [2], [с. 28]: «Состоялась первая после революции встреча двух основных математических школ и она показала, что несмотря на все трудности и потери, математическая наука в нашей стране жива. Более того, она пускает молодые ростки. И мы, в большинстве своём мальчишки и девчонки в науке, оказались у истоков большой реки советской математической науки. Мы оказались в каком-то смысле прикосновенными к её зарождению. Конечно, мы тогда явно не осознавали, но что-то чувствовали в этом роде».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Люстерник Л.А. Выступление на юбилейном заседании Московского математического общества // Успехи математических наук. Т. 20. Вып. 3. с. 21 – 30.

2. Люстерник Л.А. Молодость Московской математической школы // Успехи математических наук. Т. 22. Вып. 23. с. 189 – 239.

3. Прудников В.Е. Пафнутий Львович Чебышев (1821 – 1894). М.: Наука. 1976.

4. Костицын В.А. «Моё утраченное счастье …»: Воспоминания, дневники. Т. 1. М.: Новое литературное обозрение. 2017.

5. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. М.: Наука. 1968.

6. Михайлов Г.К., Степанов С.Я. К истории задачи о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования // Историко-математические исследования. 1984. Вып. 28. с. 223 – 246.

7. Демидов С.С. Повесть о двух городах / Демидов С.С. Математика в России на поворотах истории. Сборник статей. М.: МЦНМО. 2021. с. 65 – 79.

8. Ермолаева Н.С. Новые материалы к биографии Н.Н. Лузина // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. с. 191 – 203.

REFERENCES

1. Lyusternik L.A. Address at the jubilee session of the Moscow mathematical society // Uspekhi matematicheskikh nauk. V. 20. № 3. pp. 21 – 30.

2. Lyusternik L.A. The early years of the Moscow mathematical school // Uspekhi matematicheskikh nauk. V. 22. № 2. pp. 189 – 239.

3. Prudnikov V. E., 1976, Paphnutiy Lvovich Chebyshev (1821 – 1894). Moscow.: Nauka.

4. Kostitsyn V.A., 2017, “My Lost Happiness…”: Memories, diaries. V. 1. Moscow: New literary review.

5. Yushkevich A.P., 1968, History of mathematics in Russia before 1917. Moscow: Nauka.

6. Mikhailov G.K., Stepanov S.Ya., 1984, On the history of the problem of the rotation of a rigid body around a fixed point in the cases of Hess and Kovalevskaya and their geometric modeling // Istoriko-matematicheskie Issledovaniya. Vol. 28. pp. 223 – 246.

7. Demidov S.S., 2021, A Tale on Two Cities / Demidov S.S. Mathematics in Russia at the Turns of History. Digest of articles. Moscow: MTsNMO. pp. 65 – 79.

8. Ermolaeva N.S., 1989, New materials for the biography of N.N. Luzin // Istoriko-matematicheskie Issledovaniya. Vol. 31. pp. 191 – 203.

Получено 11.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-270-306

Пути развития математического анализа в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого (к 70-летию образования кафедры математического анализа)

И. В. Денисов

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

Осенью 1938 года был организован Тульский государственный педагогический институт (впоследствии переименованный в Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого). Штат института составляли приглашенные иногородние преподаватели. Это обстоятельство определяло весь учебный процесс, так как дисциплины вычитывались сжатыми блоками и в короткие сроки. Одним из трех факультетов был физико-математический с единственной кафедрой математики и физики. Осенью 1939 года на факультет удалось пригласить молодых ученых-математиков, специалистов в области математического анализа и дифференциальных уравнений. Ими были супруги П. В. Соловьев и В. М. Гущина. Оба они – уроженцы Тульской области, получили образование и защитили кандидатские диссертации в Москве. П. В. Соловьев имел хорошие научные результаты и как ученый мог бы создать школу математического анализа на факультете, но в 1941 году началась война, и он добровольцем ушел на фронт, где погиб в 1943 году. В 1950 году из кафедры математики и физики были выделены две математические кафедры, одна из которых – кафедра математического анализа. Первым заведующим кафедрой математического анализа стал профессор С. П. Слугинов, бывавший в Туле наездами из Москвы, а штат кафедры состоял из 8 человек. В июне 1951 года кафедру возглавил известный ученый в области теории функций, доктор физико-математических наук, профессор В. И. Левин. С его именем связано становление аспирантуры на кафедре и факультете. Первой выпускницей аспирантуры кафедры, успешно защитившей диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, стала С. Н. Лёвина, ученица профессора В. И. Левина. Учениками профессора В. И. Левина были многие выпускники ТГПУ им. Л. Н. Толстого , впоследствии работавшие на кафедре. В 1960-х годах укрепилась научная и педагогическая составляющая кафедры математического анализа: на кафедру из других вузов были приняты доценты В. И. Антропова (1964), В. И. Рыбаков (1969) и А. С. Симонов (1971). В разные годы среди преподавателей кафедры были первоклассные специалисты, оставившие заметный след в математике, но наибольших успехов кафедра добилась в 1970–80-е годы. Это было связано с обеспеченностью высококвалифицированными кадрами. В статье через историю кафедры, а также через деятельность ее заведующих и преподавателей прослеживаются пути развития математического анализа на факультете.

Ключевые слова: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, математический анализ.

Библиография: 199 названий.

Для цитирования:

И. В. Денисов Пути развития математического анализа в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого (к 70-летию образования кафедры математического анализа) // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 270–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-270-306

Ways of development of mathematical analysis at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (to the 70th anniversary of the formation of the Department of Mathematical Analysis)

I. V. Denisov

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

In the fall of 1938, the Tula State Pedagogical Institute (later renamed the L. N. Tolstoy Tula State Pedagogical University) was organized. The staff of the institute consisted of invited teachers from other cities. This circumstance determined the entire educational process, since the disciplines were read in compressed blocks and in a short time. One of the three faculties was physics and mathematics with the only department of mathematics and physics. In the fall of 1939, the faculty managed to invite young scientists-mathematicians, specialists in the field of mathematical analysis and differential equations. They were the spouses P. V. Soloviev and V. M. Gushchina. Both of them - natives of the Tula region, received their education and defended their PhD theses in Moscow. P. V. Soloviev had good scientific results and as a scientist could have created a school of mathematical analysis at the faculty, but in 1941 the war broke out, and he volunteered for the front, where he died in 1943. In 1950, two mathematical departments were separated from the Department of Mathematics and Physics, one of which was the Department of Mathematical Analysis. The first head of the Department of Mathematical Analysis was Professor S. P. Sluginov, who was in Tula on visits from Moscow, and the staff of the department consisted of 8 people. In June 1951, the department was headed by a well-known scientist in the field of the theory of functions, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor V. I. Levin. The formation of postgraduate studies at the department and faculty is associated with his name. The first graduate of the department's postgraduate studies, who successfully defended her thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, was S. N. Levina, a student of Professor V. I. Levin. The students of Professor V. I. Levin were many graduates of TSPU named after L. N. Tolstoy, who later worked at the department. In the 1960s, the scientific and pedagogical component of the Department of Mathematical Analysis was strengthened: associate professors V. I. Antropova (1964), V. I. Rybakov (1969) and A. S. Simonov (1971). Over the years, among the teachers of the department there were first-class specialists who left a noticeable mark in mathematics, but the department achieved the greatest success in the 1970s-80s. This was due to the provision of highly qualified personnel. The article traces the development of mathematical analysis at the faculty through the history of the department, as well as through the activities of its heads and teachers.

Keywords: Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, mathematical analysis.

Bibliography: 199 titles.

For citation:
I. V. Denisov, 2021, "Ways of development of mathematical analysis at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (to the 70th anniversary of the formation of the Department of Mathematical Analysis)" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 270–306.

1. Введение

«Все проходит...» Пройдет и человеческая память. Возможно, останутся скупые строки документов, из которых вряд ли удастся сложить целостную картину становления, развития и ухода в небытие коллектива высококлассных специалистов, преданных своему делу людей. Оглядываясь назад, невольно сожалеешь, что в свое время не потрудился записать свидетельства живых очевидцев событий, которые нужно помнить. Теперь приходится вспоминать и использовать архивные материалы.

Пути развития математического анализа в ТГПУ им. Л. Н. Толстого прослеживаются через историю кафедры, а также через деятельность заведующих и преподавателей. Это определило структуру предлагаемой статьи. Использованные источники разделены на части со сквозной нумерацией источников: вначале идет библиография (12 источников), а затем – сочинения, сгруппированные по фамилиям.

2. Основные вехи истории кафедры

Точно известно, что осенью 1938 года был организован Тульский государственный педагогический институт всего с тремя факультетами. Одним из них был физико-математический факультет с единственной кафедрой математики и физики. Штат института состоял из 21 человека, и большинство составляли приглашенные иногородние преподаватели. Это обстоятельство определяло весь учебный процесс, так как дисциплины вычитывались сжатыми блоками и в короткие сроки. Кажется, тульских математиков не было вообще.

Наконец осенью 1939 года на факультет удалось пригласить молодых ученых-математиков, специалистов в области математического анализа и дифференциальных уравнений. Ими были супруги П. В. Соловьев и В. М. Гущина. Оба они – уроженцы Тульской области, получившие образование в Москве. После окончания аспирантуры 2-го Московского государственного университета и защиты кандидатских диссертаций их направили работать в Узбекистан.

Павел Васильевич Соловьев (род. 25.11.1906 г. в Тульской области – погиб в 1943 году) был назначен деканом физико–математического факультета. Его научные интересы были связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, им были рассмотрены некоторые частные случаи нелинейной задачи Римана. Удалось составить список трудов П. В. Соловьева [13] – [18], у автора статьи имеется оттиск статьи [13]. П. В. Соловьев имел хорошие результаты и как ученый мог бы создать школу математического анализа на факультете, но в 1941 году началась война, и он добровольцем ушел на фронт, где погиб в 1943 году. Библиография, касающаяся П. В. Соловьева, представлена в [1] – [3].

В 1941 году деканом факультета становится Валентина Михайловна Гущина, которая проработала на этом посту 20 лет. Трудно представить, что оставшаяся с двумя маленькими детьми на руках женщина сможет руководить развивающимся коллективом. Однако, благодаря своим внутренним качествам, Валентина Михайловна не только смогла вырастить и поставить на ноги своих дочерей, но и по-матерински заботиться о факультете. Именно она обеспечила не только развитие, но и расцвет факультета на годы вперед.

С 1950 года начинается история кафедры математического анализа в Тульском государственном педагогическом институте, когда единственная кафедра физико-математического факультета была разделена и появились две математические кафедры: кафедра математического анализа (зав. кафедрой проф. С. П. Слугинов) и кафедра геометрии и алгебры (зав. кафедрой доц. Н. П. Петрушкин). На кафедре математического анализа работало 8 человек.

В том же 1950 году на кафедре математического анализа сменился заведующий: на эту должность был назначен доцент В. Д. Подсыпанин. Из его несомненных заслуг следует отметить преданность математике и старания по открытию аспирантуры. Первым аспирантом под руководством В. Д. Подсыпанина стал В. И. Баулин, выпускник Астраханского педагогического института. Однако первый блин стал комом. В связи с защитой диссертации В. И. Баулина сложилась следующая ситуация. На заседании кафедры 24.09.1953 г. было заслушано выступление заведующего, доцента В. Д. Подсыпанина «Об итогах работы аспиранта В. И. Баулина над диссертацией». Постановили: «Аспирант Баулин В. И. в течение трехлетнего пребывания в аспирантуре успешно и полностью сдал кандидатский минимум и в настоящее время подготовил к защите диссертацию на тему «О неопределенном уравнении $x^3+y^3+Az^3=3Bxyz\ldots$» В. И. Баулин был командирован в Ленинград для защиты диссертации. Официальный оппонент профессор Д. К. Фаддеев дал отрицательный отзыв, и диссертация в последний момент была снята с защиты. В. И. Баулин уехал в Астрахань преподавать математику. Через два года из Астраханского педагогического института в адрес Тульского пединститута и в Министерство просвещения было направлено письмо. В нем, в частности, указывалось, что Тульский педагогический институт и научный руководитель доцент В. Д. Подсыпанин «не проявляет никакого интереса к дальнейшей судьбе своего аспиранта т. Баулина...» В результате пришлось вести переписку с Министерством просвещения и Астраханским педагогическим институтом, материалы которой сохранились в архиве ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

В июне 1951 года кафедру математического анализа возглавил известный ученый в области теории функций, доктор физико-математических наук, профессор В. И. Левин. С его именем связано становление аспирантуры на кафедре и факультете. Уже 1 октября 1951 г. его первой аспиранткой становится С. Н. Лёвина, выпускница Тульского педагогического института. С. Н. Лёвина стала первой выпускницей аспирантуры кафедры, успешно защитившей диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Учениками профессора В. И. Левина были многие выпускники института, впоследствии работавшие на кафедре: Н. С. Ефимова, В. С. Аристова (Зотова), И. С. Есипова, В. М. Чернов, Л. В. Исаева (Пестун) и др.

До 1966 года название кафедры менялось с «математического анализа» на «высшую математику» и обратно. С 1956–1957 учебного года на факультете были образованы три математические кафедры. Кафедру математического анализа возглавила В. М. Гущина. В 1964 году физико-математический факультет был разделен на два факультета: математический и физико-технический. К математическому факультету отошли две кафедры: высшей математики и элементарной математики. Приказом по Министерству просвещения РСФСР № 5-232 от 19.07.1966 г. кафедра высшей математики была реорганизована в кафедру математического анализа.

В 1960-х годах укрепилась научная и педагогическая составляющая кафедры математического анализа. На кафедру поступили доценты В. И. Антропова (1964), В. И. Рыбаков (1969) и А. С. Симонов (1971). Выросло мастерство питомцев В. М. Гущиной – Н. С. Ефимовой, В. С. Аристовой (Зотовой) и Л. В. Исаевой (Пестун). В 1973–1977 гг. автор статьи был слушателем лекций Л. В. Исаевой, на которых бывали случаи, когда студентам предлагалось у доски завершить доказательство неоконченной теоремы. И студенты это делали. Почти все преподаватели кафедры вели кружки и читали спецкурсы. Вспоминаю, как на последнем курсе работал в кружке Л. В. Исаевой по функциональному анализу, кроме этого посещал спецкурс по функциональному анализу А. С. Симонова. Этого показалось мало, и мне удалось уговорить В. И. Рыбакова объявить незапланированный спецкурс по теории меры. Такой спецкурс состоялся, и послушать его собралось достаточно много студентов. В эти годы под руководством старшего преподавателя кафедры математического анализа В. Е. Зубарева была создана летняя математическая школа для старшеклассников. Очевидно, что мастерство преподавателей кафедры математического анализа определяло интересы многих студентов в математике. Кроме этого, преподавателей кафедры математического анализа всегда отличала активная гражданская позиция, что, несомненно, способствовало развитию факультета.

В 1976 году состоялся выход на пенсию В. М. Гущиной и произошла смена декана факультета. С этого времени приоритет отдается алгебраической школе проф. М. Д. Гриндлингера, который руководил аспирантурой на факультете. Это способствовало подготовке большого числа квалифицированных кадров по комбинаторной теории групп. Специализация в области математического анализа, геометрии и методики преподавания математики стала возможной только в других городах.

В 70-ые годы началась смена поколений: на освободившееся в 1976 году место В. М. Гущиной пришел А. Г. Луценко. В 1977 г. после окончания института приступил к работе И. В. Денисов. В 80-ые годы коллектив кафедры стал пополняться молодыми преподавателями – талантливыми выпускниками: 1986 г. – В. А. Шулюпов, 1987 г. – Н. М. Исаева, 1988 г. – Д. Э. Ребров (проработал до 1995 года), 1990 г. – Е. В. Манохин (проработал до 2009 года). Были приняты также В. М. Чернов (1982 г.) и А. Г. Пашковская (1982 г.). Штатное расписание увеличилось до 14 ставок, приходилось вести совместительство.

Однако в конце 90-х годов начались сокращения штатов. Пришлось проводить на пенсию старшего преподавателя В. Е. Зубарева. Доцента А. С. Симонова перевели на педагогический факультет. При очередной кампании по оптимизации кадров сократилось и количество математических кафедр. По разработанному в университете плану на математическом факультете нужно было оставить две из трех кафедр. Руководством факультета было решено присоединить кафедру математического анализа к кафедре алгебры, не смотря на то, что по штатному расписанию кафедра алгебры оказалась самой малочисленной – всего 3,5 ставки. Вопреки ожиданиям, руководство университета выбрало другой вариант, остановившись на традиционном делении в подобных случаях (с одной стороны – алгебра и геометрия, а с другой – математический анализ). В 2002-м году сменился заведующий кафедрой математического анализа, им снова стал А. С. Симонов, защитивший в 2001 году докторскую диссертацию по методике преподавания математики. Однако это был уже совершенно другой человек, сильно отличавшийся от того, какого я знал в 70-ые годы. Возможно, сказался возраст и напряженная работа над докторской диссертацией, что привело к усталости и потере активности: он перестал отстаивать интересы кафедры. В результате 1 февраля 2008 года математическому анализу пришлось потесниться: появилась «кафедра математического анализа, теории чисел и приложений». Параллельно этому продолжалась реорганизация факультета, которая привела к тому, что 1 декабря 2008 года прекратили свое существование все математические кафедры, будучи объединенными в одну кафедру алгебры, математического анализа и геометрии. Символично, что математический анализ оказался «окруженным» алгеброй и геометрией. В настоящее время на объединенном факультете математики, физики и информатики функционирует эта единственная математическая кафедра со штатным расписанием всего 10,5 ставок. Из них штатные специалисты бывшей кафедры математического анализа занимают 2,5 ставки.

Вспоминая атмосферу кафедры до начала 2000-х годов, следует отметить дружелюбный настрой среди преподавателей. Застолья не практиковались, но все основные события отмечались: часто дарили книги по математике и разные мелочи. В двухтысячных годах традиции стали куда-то уходить, этому способствовала обстановка в стране и внутренние, субъективные факторы.

3. Вклад заведующих кафедрой в развитие математического анализа

Первым заведующим кафедрой математического анализа в 1950 году стал профессор Слугинов Серапион Петрович. В архиве ТГПУ им. Л. Н. Толстого не удалось обнаружить каких-либо сведений о С. П. Слугинове. Помог сайт http://www.fnperm.ru/ «Забытые имена Пермской губернии» и библиографические источники [1], [3]. С. П. Слугинов родился 15 июня 1879 года в Н. Новгороде. В 1906 г. окончил математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета с дипломом первой степени и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1910 г. сдал магистерский экзамен и получил звание приват-доцента Казанского университета. Кроме университета преподавал математику в учительском институте, военно-инженерном техникуме и других средних учебных заведениях г. Казани. В 1920 г. по конкурсу был избран на кафедру математики Самарского университета, где впоследствии работал профессором, в 1921 г. – профессор кафедры математики Пермского университета. В 1922 г. утвержден ГУСом в должности профессора. В 1923–1927 гг. – заместитель председателя и председатель физико-математической предметной комиссии, в 1927–1928 гг. – председатель физико-технического отделения педфака. С 1930 г., когда от университета отделились институты, до 1 сентября 1934 г. – профессор пединститута. Одновременно до 1935 г. состоял профессором университета. Таким образом, в университете С. П. Слугинов работал с 1921 по 1930 г. и с 1932 по 1936 г. В течение всего периода деятельности в Пермском университете С. П. Слугинов возглавлял кафедру математики. Несколько лет был председателем физико-математического общества при Пермском университете, редактировал математический раздел «Журнала физико-математического общества» и труды математического семинара. Его главные научные работы посвящены исследованию аналитических функций. Всего им опубликовано более 60 статей в отечественных и зарубежных журналах. Некоторые работы С. П. Слугинова удалось найти в электронном каталоге Российской национальной библиотеки (см. [19] – [39]), последняя работа датирована 1927-м годом. Пребывание С. П. Слугинова в Тульском пединституте было скоротечным. Последние годы он проживал в Москве.

К сожалению, не удалось установить, проживал ли С. П. Слугинов в Туле или бывал наездами, но по воспоминаниям очевидцев он приезжал на работу в экипаже. В 1950-м году это уже было в диковинку: кажется, в городе остался только один экипаж. Студенты выбегали на улицу, чтобы не пропустить момент появления профессора.

В 1950–1951 учебном году кафедру математического анализа возглавлял Подсыпанин Владимир Дмитриевич (16.01.1910, Тверь – 11.10.1968, Тула). Он окончил Ленинградский педагогический институт в 1937 году, под руководством профессора Д. К. Фаддеева в 1940 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук и в 1943 году получил звание доцента. В ТГПИ В. Д. Подсыпанин проработал с 1949-го по 1968 год, его основные научные интересы – теория чисел. Список трудов В. Д. Подсыпанина представлен в библиографическом разделе источниками [3], [4].

28 июня 1951 года заведующим кафедрой математического анализа был утвержден профессор Левин Виктор Иосифович (01.12.1909, Могилев – 03.11.1986, Москва). Сведения о В. И. Левине удалось найти в архиве ТГПУ им. Л. Н. Толстого, на сайте МПГУ http://mpgu.su/ и в статье [6].

В. И. Левин окончил Высшее техническое училище в Берлине (1932) и аспирантуру Кембриджского университета, ученик Г. Харди, доктор физико-математических наук (1939), профессор (1939). Несколько лет В. И. Левин преподавал в Калькуттском университете, затем вернулся в СССР, преподавал и заведовал кафедрами высшей математики МЭИ (1938—1949), Пензенского индустриального института (1949—1951), Московского заочного педагогического института (1951—1959), Московского института стали (1959—1962). В 1961—1985 гг. зав. кафедрой математической физики МГПИ, декан факультета повышения квалификации. Председатель математической комиссии при Главном управлении военно-учебных заведений Министерства просвещения РСФСР. Член методического совета по физике, математике и астрономии общества «Знание».

В. И. Левин оставил заметный след в развитии математического анализа в Тульском пединституте. Работал в ТГПИ в 1951–1956 гг., однако в связи с совмещением работы в московском институте в сентябре 1951 г. написал заявление с просьбой перевести его на должность профессора. Для факультета он подготовил двух кандидатов физико-математических наук и ряд преподавателей, составивших основу кафедры. В свою очередь впоследствии эти преподаватели подготовили студентов для дальнейшей работы в области математического анализа и дифференциальных уравнений.

Виктор Иосифович начал исследования в области теории однолистных функций студентом Берлинского высшего технического училища. По отношению к однолистным функциям s-кратной симметрии Сегё высказал предположение о зависимости коэффициентов только от s. При $s = 1$ это было доказано Литлвудом, а при $s = 2$ – Литлвудом и Полиа. В. И. Левин доказал предположение Сегё для $s = 3$.

В последующих работах В. И. Левин провел исследования асимптотических разложений некоторого класса функций и функциональных неравенств. Были усилены отдельные неравенства (в том числе точное неравенство Гильберта), уточнено двухпараметрическое неравенство Гильберта, доказаны точные неравенства, обобщающие неравенство Карлсона. Получены обобщения с произвольными весовыми функциями интегрального неравенства Кноппа. Установлен широкий класс неравенств для истокообразно представимых функций и получены новые неравенства с производными, существенно обобщающие неравенство Оппенгейма. Подготовлены переводы оригинальных изданий Г. Харди, Э. Беккенбаха, Р. Беллмана, Д. Литлвуда. Список сочинений В. И. Левина представлен работами [40] – [81], а библиография [1] – [3], [5], [6].

28 марта 1952 г. в должности заведующего кафедрой математического анализа вновь утвержден доцент В. Д. Подсыпанин.

С 1956–1957 учебного года кафедру математического анализа возглавляла Гущина Валентина Михайловна (21.02.1907, Тула — август 2006, Тула), которая проработала в ТГПИ с 1939-го по 1976 год. В 1930 году она окончила 2-й МГУ (ныне МПГУ), 1937 – кандидат физико-математических наук, 1938 – доцент. Работы В. М. Гущиной посвящены доказательству существования и единственности решений некоторых классов нелинейных интегральных уравнений на основе принципа сжатых отображений и принципа Шаудера (см. соч. В. М. Гущиной [82], [83], библиография [2], [3], [5]).

В 1960–1966 годах кафедра имела название «высшей математики» и ее снова возглавлял доцент В. Д. Подсыпанин.

В 1966–1971 годах кафедру математического анализа возглавляла В. М. Гущина, теперь уже не являвшаяся деканом факультета.

В 1971–1982 годах кафедру математического анализа возглавлял Симонов Александр Сергеевич (04.09.1932, Москва – 20.02.2013, Тула). В 1951 г. А. С. Симонов поступил и в 1955 г. окончил ТГПИ, по распределению с 1955 по 1956 год работал учителем математики в средней школе Хабаровского края. С 1956 г. по 1961 г. – ассистент кафедры высшей математики Хабаровского железнодорожного института. В 1961 г. поступил в аспирантуру Хабаровского пединститута, научный руководитель – доцент Л. М. Лихтарников. Для завершения работы над диссертацией был командирован в Воронежский университет, где в 1966 защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук на тему «Обобщенные решения с повышенной гладкостью квазилинейных эллиптических уравнений». Затем продолжил работу в Хабаровских вузах.

С 1971 по 2013 год работал в ТГПИ. В 1985 г. преподавал математику в республике Куба. В 2001 году защитил диссертацию «Математические модели экономики в школьном курсе математики» по специальности «13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания» на соискание ученой степени доктора педагогических наук (научный консультант – Г. В. Дорофеев). В 2002 г. присвоено ученое звание профессора. Активно занимался учебной и научно–методической работой. Подготовил к поступлению в аспирантуру по математическому анализу И. В. Денисова. Основные научные интересы – популяризация математических знаний, математические модели экономики в школьном курсе математики. Список сочинений А. С. Симонова [84] –

[110], библиография [4], [7].

В 1982–1987 годах кафедру математического анализа возглавлял Чернов Виктор Михайлович (27.12.1931, Тула – 30.08.2002, Тула). С 1946 по 1950 год он учился в Тульском коммунально–строительном техникуме, который окончил с отличием, 1950–54 – студент физико-математического факультета ТГПИ, 1954–57 – аспирант профессора В. И. Левина, 1956 – ассистент кафедры математического анализа. После окончания аспирантуры в 1957 году переходит на работу в Тульский механический институт. Сначала -– ассистент, затем старший преподаватель, заведующий кафедрой вычислительной математики и программирования ТПИ, декан факультета ТК, заведующий кафедрой высшей математики, заместитель декана механического факультета. В 1964 году защитил кандидатскую диссертацию. Преподавал математику в республике Египет.

В 1982 году В. М. Чернов был избран на должность заведующего кафедрой математического анализа ТГПИ, в 1984–93 гг. являлся проректором по научной работе. Научные работы в области интегральных преобразований опубликованы в период работы в ТПИ (см. соч. В. М. Чернова [111] – [115], библиография [4]).

В 1987–1996 годах кафедру математического анализа возглавлял Луценко Алексей Георгиевич (род. 21.05.1951 в Туле). В 1972 году он окончил ТГПИ и поступил в аспирантуру кафедры математического анализа МГПИ им. В. И. Ленина. Его официальным научным руководителем был профессор Бокштейн Меер Феликсович (один из создателей отечественной школы по алгебраической топологии и гомологической теории размерностей топологических пространств: лемма и гомоморфизм Бокштейна входят в современные учебники по алгебраической топологии стран всего мира). Однако задача для исследования была поставлена старшим научным сотрудником ЦЭМИ АН СССР Борисом Александровичем Ефимовым, который стал его фактическим научным руководителем по диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.04 – геометрия и топология» по теме «Инъективные булевы пространства». Ее успешная защита состоялась в 1984 году. Целью работы являлось изучение инъективных булевых пространств, их отображений и операций над ними. При этом особое внимание уделялось исследованию пространств несчётного веса, поскольку случай счётного веса был подробно изучен ранее в работах других авторов. В работе использовались методы теории обратных спектров, а также методы теории диадических бикомпактов и метод булевых алгебр. Была показана замкнутость класса инъективных булевых пространств относительно некоторых операций, найдена простая спектральная характеристика инъективных булевых пространств. Доказано существование открытой ретракции на любое подпространство Дугунджи. Дано обобщение конструкции продолжения бикомпактов, как следствие получено решение задачи о продолжении канторова множества. Исследовался вариант спектральной теоремы Е. В. Щепина в сингулярном случае для однородных инъективных булевых пространств.

А. Г. Луценко работал в ТГПИ в 1976–2002 гг., вел большую общественную работу. После защиты диссертации его интересы сместились в область методики преподавания математики. 1988 г. – доцент. В 2002 году перешел на работу в Тульский филиал ВЗФЭИ, где до 2013-го года заведовал кафедрой математики. Список сочинений А. Г. Луценко [116] – [122].

В 1996–2002 годах кафедру математического анализа возглавлял автор настоящей статьи Денисов Игорь Васильевич (род. 02.08.1956 в Тульской области). В 1973 году он поступил на математический факультет ТГПИ им. Л. Н. Толстого, который окончил в 1977 году и приступил к работе на кафедре математического анализа в должности ассистента. Руководителем его дипломной работы являлся А. С. Симонов, который рекомендовал своего ученика профессору С. Г. Крейну в качестве возможного аспиранта, а преподаватель по математическому анализу Л. В. Пестун (через профессора В. И. Левина) договорилась об очном целевом месте в аспирантуре при кафедре математического анализа МГПИ им. В. И. Ленина. В 1978 году состоялось поступление в аспирантуру, и вскоре его научным руководителем был утвержден профессор С. Г. Крейн, работавший в то время в Воронежском лесотехническом институте. Три года обучения в аспирантуре прошли между Тулой – Москвой – Воронежем. Несмотря на эти трудности, были получены результаты и в срок представлена кандидатская диссертация на тему «Сингулярные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве». В ней была построена теория дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой вида

$$t^{-m}\frac{dy}{dt} = A(t)y.$$

На предзащите в МГПИ им. В. И. Ленина отмечалось, что полученные результаты составляют новую главу функционального анализа. Примерно 1,5 года ушло на ожидание выхода статьи в журнале «Успехи математических наук». В 1982 году в Воронежском государственном университете им. Ленинского комсомола состоялась успешная защита диссертации на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности «01.01.01 – математический анализ».

Вернувшись в Тулу, И. В. Денисов продолжил работу на кафедре сначала в должности ассистента, а затем – доцента, профессора, заведующего кафедрой. Из-за удаленности Тулы от Воронежа и в связи с невозможностью регулярной работы в научном семинаре в начале 90-х годов с согласия профессора С. Г. Крейна состоялся переход И. В. Денисова в семинар по малому параметру при кафедре математики физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Новым наставником и научным консультантом И. В. Денисова стал заведующий кафедрой математики физического факультета МГУ профессор В. Ф. Бутузов. Пришлось кардинально сменить тематику исследований и заняться разработкой метода углового пограничного слоя, который представляет собой одну из ветвей теории асимптотических разложений. Общеизвестно, что основоположником теории асимптотических разложений является А. Пуанкаре, сформулировавший в 1886 г. понятие асимптотического ряда. Позже в 1904 г. в связи с исследованиями течения газа при обтекании летательных аппаратов Л. Прандтль ввел понятие пограничного слоя, который следует учитывать в достаточно малой зоне соприкасающихся сред, что обусловлено наличием трения. Этот эффект получил название вязкого течения, в отличие от невязкого течения (описываемого уравнениями Навье – Стокса и наблюдаемого за пределами малой зоны). Аналогичный эффект был отмечен при теплоотдаче с поверхности тела, а также при исследованиях других задач, которые возникали в химической кинетике, синергетике, биологии, астрофизике, лазерной оптике. Значение теории пограничного слоя проявилось в связи с переходом к гиперзвуковым скоростям.

Параллельно физическим исследованиям развивалась асимптотическая теория дифференциальных уравнений с малым параметром и к середине 20 века были накоплены многочисленные результаты в этом направлении. Для последующего развития теории определяющими явились работы конца сороковых - начала пятидесятых годов академика А. Н. Тихонова. В 1957 г. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник сформулировали общий подход к построению асимптотических разложений решений краевых задач. Ими были рассмотрены не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и линейные дифференциальные уравнения в частных производных с малыми параметрами при производных. Задачи рассматривались в областях с гладкими границами, а асимптотические разложения решений строились в виде сумм регулярной и погранслойной частей. Погранслойная часть учитывалась только вблизи границы области. Таким образом, появился асимптотический метод пограничных функций. Развитие этого метода связано с работами В. А. Треногина, А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и др.

В 1970-х годах В. Ф. Бутузов применил метод пограничных функций к задачам в областях с негладкими границами. В 1972 году было рассмотрено разностное уравнение с краевыми условиями на границе прямоугольника. Асимптотическое разложение решения было построено в виде суммы регулярной, погранслойной и угловой частей. Так появился метод угловых пограничных функций. В 1978 году этот метод был применен к параболическим уравнениям.

В прямоугольнике была рассмотрена начально-краевая задача для линейного сингулярно возмущенного уравнения. В отличие от метода Люстерника–Вишика обыкновенных пограничных функций, которые определялись из обыкновенных дифференциальных уравнений, оказалось недостаточно для построения асимптотики решения. Потребовались еще и угловые пограничные функции, которые определялись из линейных параболических уравнений с постоянными коэффициентами. Впоследствии В. Ф. Бутузовым и его учениками были рассмотрены разнообразные прикладные задачи, исследование которых проводилось с помощью метода угловых пограничных функций. В основном рассматривались линейные задачи, либо нелинейные задачи с краевыми условиями второго рода.

Переход к нелинейным уравнениям оказался сопряженным с принципиальными трудностями, касающимися, прежде всего, отсутствия методов решения нелинейных задач и получения необходимых оценок. Возникающих проблем удавалось избежать при рассмотрении второй краевой задачи (задачи Неймана). Однако в теории дифференциальных уравнений с частными производными основополагающей является первая краевая задача (задача Дирихле), исследование которой для нелинейных эллиптических и параболических уравнений в областях с негладкими границами было проведено в работах И. В. Денисова. В отличие от линейного случая при построении полной асимптотики решения пришлось доказывать разрешимость нелинейных эллиптических и параболических уравнений того же типа, что и исходное уравнение. Это удалось сделать с помощью метода верхних и нижних решений, и таким образом появился нелинейный метод угловых пограничных функций. В 1991 году была опубликована первая статья по данной тематике, а к 2008-му году были получены результаты, легшие в основу докторской диссертации по теме «Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с частными производными». Защита состоялась в 2010-м году на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова. Степень доктора физико-математических наук присвоена по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

И. В. Денисов подготовил к поступлению в аспирантуру МГУ имени М. В. Ломоносова по дифференциальным уравнениям В. А. Шулюпова. Список основных сочинений И. В. Денисова представлен работами [123] – [149].

В завершающие 2002–2008-е годы кафедру математического анализа снова возглавлял А. С. Симонов.

И. В. Денисов для завершения работы над докторской диссертацией перешел на должность старшего научного сотрудника.

4. Вклад преподавателей кафедры

За время своего существования коллективом кафедры было воспитано не одно поколение талантливых выпускников факультета, некоторые из которых пополнили ряды преподавателей кафедры математического анализа.

Лёвина Софья Николаевна (23.09.1929, село Кишкино Тульской области – 26.04.2004, Москва) окончила ТГПИ в 1951 году, ученица профессора В. И. Левина, защитила кандидатскую диссертацию (1955), получила звание доцента (1965). 50 лет С. Н. Лёвина посвятила педагогической деятельности. Работала в ТГПИ до 1974 года, а с августа 1974 года по апрель 2004 года преподавала на кафедре высшей математики МГТУ ГА. Всегда вела большую партийную и общественную работу, являлась автором большого числа научных и учебно–методических трудов. За трудовые успехи награждена значком «Отличник народного просвещения» и почётными грамотами министерства просвещения РСФСР и МГТУ ГА, неоднократно поощрялась благодарностями и другими знаками отличия. Список сочинений С. Н. Лёвиной [150] – [152], библиография [3], [5].

Ефимова Нина Сергеевна (13.10.1931, Тула – 26.12.2013, Тула) в 1949 году окончила школу и поступила на физико-математический факультет ТГПИ. Закончив с отличием институт, была рекомендована в аспирантуру профессора В. И. Левина. В 1953 году поступила в аспирантуру по математическому анализу и окончила ее в 1956 году. Работала в ТГПИ с 1956 по 1987 год на кафедрах высшей математики и математического анализа. В 1957–59 годах была деканом физико-математического факультета, в 1986–1987 гг. – заместителем декана математического факультета, вела большую общественную работу. За свою трудовую деятельность была награждена Нагрудным значком «Отличник народного просвещения» (РСФСР), Нагрудным значком «За отличные успехи в работе» (СССР), медалью «За трудовую доблесть» в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, а также многочисленными грамотами и благодарностями. Научные работы в области асимптотических разложений в ряды и методики преподавания математического анализа. С 1987 года на пенсии. Список сочинений Н. С. Ефимовой [153], библиография [5].

Аристова (Зотова) Валентина Савватьевна (03.08.1932, Тула – 27.04.2007, Тула) окончив школу с серебряной медалью, в 1951 году поступила на физико–математический факультет ТГПИ. Институт закончила с отличием и была рекомендована в аспирантуру профессора В. И. Левина. В 1955 году была принята в аспирантуру по специальности математический анализ. После окончания аспирантуры с 1958 по 1988 год работала на кафедрах высшей математики и математического анализа ТГПИ до ухода на пенсию, вела большую общественную работу. Награждена Нагрудным значком «Отличник народного просвещения» (РСФСР), Нагрудным значком «За отличные успехи в работе» (СССР), медалью «За трудовую доблесть» в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, а также многочисленными грамотами и благодарностями. Научные работы в области тауберовых теорем, научно-методические статьи по вопросам преподавания математического анализа. Список сочинений В. С. Аристовой имеется в архиве ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Исаева (Пестун) Любовь Васильевна (10.02.1933, Смоленская область – 22.12.2017, Тула) в 1950 году, окончив школу с серебряной медалью, была принята на физико–математический факультет ТГПИ. Институт закончила с отличием в 1954 году. По распределению работала с 1954 по 1958 год в дагестанском ауле Ашты учителем математики и завучем средней школы. С 1958 по 1960 год работала на кафедре элементарной математики ТГПИ. Летом 1960 года поступила в аспирантуру профессора В. И. Левина по специальности математический анализ, которую закончила в 1963 году. После этого работала на кафедрах высшей математики и математического анализа до ухода на пенсию в 1988 году. Была заместителем декана математического факультета, вела большую общественную работу. Награждена Нагрудным значком «Отличник народного просвещения» (РСФСР), Нагрудным значком «За отличные успехи в работе» (СССР), медалью «За трудовую доблесть» в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, а также многочисленными грамотами и благодарностями. Научные работы в области интегральных преобразований и дифференциальных уравнений в частных производных, методические работы по вопросам преподавания математического анализа. Несколько лет была заместителем декана математического факультета. Вела большую общественную работу на факультете и в институте. Список сочинений Л. В. Исаевой (Пестун) представлен [154], библиография – [5].

Среди преподавателей кафедры были выпускники и других высших учебных заведений. Наиболее заметный след в развитии кафедры оставили В. И. Антропова и В. И. Рыбаков.

Антропова Варвара Ивановна (17.12.1924, с. Орловка Кировского р-на Восточно - Казахстанской области – неизвестно) в 1949 году окончила с отличием физико–математический факультет Казахского государственного университета по специальности высшая математика, в 1952 году – аспирантуру АН Казахской ССР, 1956 – кандидат физико–математических наук, 1958 – доцент. До лета 1964 года работала в Таджикском государственном университете, а с 01.09.1964 по 16.07.1985 – в ТГПИ в должности доцента. Бессменный организатор математических вечеров на факультете. Научные интересы – история математики, список сочинений В. И. Антропова [155] – [164].

Рыбаков Владислав Иванович (13.12.1939, Томск – 27.09.2016, Тула) на протяжении работы в ТГПИ с 1969-го по 2000-й год являлся ведущим специалистом факультета по математическому анализу.

В 1940-м году семья переехала в Красноярск, где В. И. Рыбаков окончил среднюю школу (1957 год) и поступил на факультет математики и черчения Красноярского пединститута. В 1962 году окончил его и получил специальность преподавателя математики средней школы. В 1962–1964 гг. работал учителем восьмилетней школы г. Черногорска.

В 1964–1967 учился в аспирантуре кафедры математического анализа МГПУ им. В. И. Ленина под руководством профессора Очана Юрия Семеновича (специалист по дескриптивной теории множеств и математическому анализу, автор популярного «Сборника задач по математическому анализу»).

В 1968 году В. И. Рыбаков защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по теме «Некоторые вопросы интегрирования векторнозначных функций».

В 1967–1968 гг. работал старшим преподавателем кафедры высшей математики Тюменского пединститута, в 1968–1969 гг. – и. о. зав. кафедрой математики Шуйского пединститута. В 1969-м году переходит в ТГПИ сначала доцентом, потом старшим научным сотрудником (1974–1976). В 1978–1979 гг. уезжал в Ярославский университет. После возвращения в Тулу работал доцентом и потом профессором.

Научные интересы В. И. Рыбакова были связаны с теорией меры и интеграла. В течение всей своей жизни Владислав Иванович вёл неустанную научную работу и полученные им результаты заслуживают внимательного изучения. В 1968 году вышли его первые работы (см. соч. В. И. Рыбакова [1, 2]), обозначенные на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

В [165] рассматривались векторные меры, имеющие σ-конечную вариацию, со значениями в вещественном банаховом пространстве X. Изучалась возможность представления таких мер интегралом от векторной функции по скалярной мере. При условии рефлексивности пространства X показано, что векторная мера представляется интегралом Петтиса от сепарабельнозначной функции, значения которой принадлежат X. Приведен пример нерефлексивного пространства X, в котором такое представление не имеет места. В качестве приложения дано представление линейного ограниченного оператора из L_1 в X в виде интеграла Гельфанда. В заключение статьи даны необходимые и достаточные условия для представления векторной меры интегралом Бохнера.

В [166] получено обобщение теоремы Радона – Никодима на случай векторных мер со значениями в банаховом пространстве. Ранее подобная ситуация рассматривалась при довольно жестких ограничениях в статье M. Rao, опубликованной в ведущем американском журнале «Proceedings of the National Academy of Sciences» в 1964-м году.

В [167] описание числовой меры, относительно которой непрерывна векторная мера, распространено на случай произвольной векторной меры со значениями в банаховом пространстве. В мировой литературе этот результат получил название теоремы Рыбакова (см. [8] – [12] библиографии).

Статья [168], в связи с изучением X-мартингалов, закрывает вопрос перехода от функций, интегрируемых в смысле Бохнера, на более общую ситуацию – на мартингалы для векторнозначных функций, интегрируемых в смысле Петтиса. Для этого нужно решить вопрос о существовании условных ожиданий, и именно в данной заметке строится пример, показывающий, что, вообще говоря, не существует условного ожидания для функции, интегрируемой в смысле Петтиса.

Последующие работы [169] – [182] также посвящены распространению скалярной меры на векторные меры со значениями в банаховом пространстве.

В. И. Рыбаков подготовил к поступлению в аспирантуру нескольких способных студентов. Впоследствии его ученики А. Г. Луценко и Е. В. Манохин стали кандидатами физико–математических наук и работали на кафедре математического анализа.

Самофалова Галина Федоровна (19.10.1937, Тула - 25.08.2021, Тула) в 1955 году окончила школу № 15 и поступила на физико–математический факультет ТГПИ, где проявила себя как способная студентка. После окончания института по распределению отработала три года на Сахалине. Вернувшись в 1963 году домой, была принята ассистентом в родной институт, где проработала до выхода на пенсию в 1997 году. Галину Федоровну всегда отличали дружелюбие к окружающим и жизнерадостность, она умела организовать плодотворный учебный процесс. Г. Ф. Самофалова не имеет научных трудов.

Зубарев Валерий Евгеньевич (27.12.1940, Тула – 22.11.2013, Тула) в 1958 году окончил с серебряной медалью школу и поступил на физико–математический факультет ТГПИ. По окончании института в 1963 году получил квалификацию «Учитель математики и черчения» и сразу же был командирован в МОПИ им. Н. К. Крупской для стажировки по кафедре геометрии. Вернувшись в Тулу, 5.11.1964 приступил к работе в качестве ассистента кафедры геометрии и элементарной математики. Однако в конце ноября был призван в Советскую армию, где прослужил до 21.08.1965. После демобилизации приступил к работе в качестве ассистента кафедры высшей математики, которая в 1966 году была переименована в кафедру математического анализа. В. Е. Зубарев по праву считается организатором ЮМШ, которая в 70-ые годы активно работала на базе одного из пионерских лагерей. В 1979 году был рекомендован в очную целевую аспирантуру по математическому анализу при Калужском techinституте, однако не стал поступать в нее. С 1 февраля 1988 года и до ухода на пенсию 7 июля 2002 года работал в качестве старшего преподавателя. В. Е. Зубарев не имел научных трудов.

Манохин Евгений Викторович (21.09.1963, Тула) в 1981 г. окончил среднюю школу № 31 с золотой медалью. В 1981-1986 гг. обучался в ТГПИ им. Л. Н. Толстого, занимался научными исследованиями в области пространств Банаха под руководством доцента В. И. Рыбакова. Затем работал в школе. Научные исследования (по использованию метода эквивалентных норм) продолжил в аспирантуре под руководством профессора М. И. Кадеца. В 1992 г. в Харьковском университете защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (тема диссертации «О геометрических и линейно-топологических свойствах некоторых пространств Банаха», специальность «01.01.01 – математический анализ»). В 1996 г. присвоено звание доцента по кафедре математического анализа. При работе на кафедре математического анализа рассматривал обобщенные параллелепипедальные сетки и весовые функции, решетки и гиперболическую дзета-функцию решеток, пространства функций E_s^α и AF_s. Работал в ТГПИ с 1990 по 2009 г. Список сочинений Е.В. Манохина представлен работами [183] – [187].

Шулюпов Владимир Алексеевич (30.11.1964, Тула - 31.07.2021, Тула) в 1981 г. окончил среднюю школу № 28. В 1981–1986 гг. обучался в ТГПИ им. Л. Н. Толстого и после окончания приступил к работе в должности ассистента кафедры математического анализа. В 1986–1988 гг. проходил службу в Советской армии. Вернувшись на кафедру, занимался научными исследованиями в области дифференциальных уравнений под руководством И. В. Денисова. В 1990–1993 гг. обучался в аспирантуре МГУ имени М. В. Ломоносова при кафедре дифференциальных уравнений. В 1995 году под руководством профессора А. С. Филиппова защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (тема диссертации «Качественные исследования систем с гистерезисом», специальность «01.01.02 – дифференциальные уравнения»). В 2006 г. присвоено звание доцента по кафедре математического анализа. В. А. Шулюпов являлся мастером спорта по русским шашкам. Увлечение турнирами привело его к организации в 1997 году математических боев среди школьников, к этому делу он сумел привлечь преподавателей не только ТГПИ, но и других тульских вузов. С 2002-го года В. А. Шулюпов проводил всероссийские турниры математических боев студентов. Список сочинений В. А. Шулюпова представлен работами [188] – [193].

Исаева Нина Магомедрасуловна (21.02.1965, Тула) в 1982 году, окончив с золотой медалью общеобразовательную школу № 4 г. Тулы, поступила на математический факультет ТГПИ им. Л. Н. Толстого. Уже в студенческие годы проявилось ответственное отношение к учебе, что во многом способствовало дальнейшей трудовой деятельности, которая началась на кафедре математического анализа сначала в должности лаборанта, затем – ассистента, старшего преподавателя, доцента. Наибольшее влияние на формирование научных интересов Н. М. Исаевой оказал профессор А. А. Яшин, под руководством которого в 2004 г. была защищена диссертация «Системное моделирование патологических процессов при заболеваниях гепатобилиарной системы» на соискание учёной степени кандидата биологических наук по специальности «05.13.01. – системный анализ, управление и обработка информации (биологические науки)». В 2012 г. Н. М. Исаева утверждена в учёном звании доцента. Список сочинений Н. М. Исаевой представлен работами [194] – [199].

Пашковская Алла Геннадьевна (12.08.1953, Тула) в 1971–1975 гг. обучалась на математическом факультете ТГПИ им. Л. Н. Толстого, затем год работала учителем математики в средней школе № 9 г. Тулы, а в 1976 году устроилась инженером в ТулаНИИчермет. В 1986–1990 гг. обучалась в очной аспирантуре Института металлургии им. А. А. Байкова АН СССР, где защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. В ТулаНИИчермет проработала до ноября 1990 года. 2.11.1990 приступила к работе на кафедре математического анализа ТГПИ им. Л. Н. Толстого сначала в должности ассистента, а затем доцента. 1.07.2009 г. перешла на кафедру технологии, машиноведения и безопасности жизнедеятельности, где проработала до 31.08.2013 г. Научные работы в области сплавов со стеклообразующей способностью. Список сочинений А. Г. Пашковской имеется в архиве ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

5. Заключение

История показывает, что кафедра математического анализа на математическом факультете ТГПИ им. Л. Н. Толстого в 1950-ом году была оформлена только номинально. Процесс становления растянулся на долгое время, и только в 1970-80-ые годы наступила стабильность, основанная на кадровой укомплектованности. Однако события в стране и просчеты руководства привели к разрушению наработанных цепочек развития математического анализа на факультете. На мой взгляд, нынешнее состояние математического анализа на факультете можно сравнить с довоенными годами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика в СССР за тридцать лет, 1917–1947. М. : Гостехиздат, 1948. 1044 с.

2. Математика в СССР за сорок лет, 1917–1957: в 2 т. М. : Физматгиз, 1959. Т. 1 : Обзорные статьи. 1002 с.

3. Математика в СССР за сорок лет, 1917–1957: в 2 т. М. : Физматгиз, 1959. Т. 2 : Биобиблиография. 821 с.

4. Математика в СССР 1958–1967. Том второй: Биобиблиография. Вып. 2. М-Я. М.: Наука, 1970. 762 с.

5. Математика в СССР 1958–1967. Том второй: Биобиблиография. Вып. 1. А-Л. М.: Наука, 1969. 814 с.

6. Базилевич И. Е., Болотовский Б. М., Годунова Е. К., Маркушевич А. И. Виктор Иосифович Левин (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат.наук. 1970. Т. 25, № 1(151). С. 205-210.

7. Денисов И. В., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Чубариков В. Н. К 80-летию Александра Сергеевича Симонова // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 3(43). С. 111-115.

8. Ricker W. J. Rybakov's theorem in Frechet spaces and completeness of L_1-spaces // Austral. Math. Soc. (Series A). 1998. № 64. P. 247-252.

9. Fernandez A., Naranjo F. Rybakov's theorem for vector measures in Frechet spaces // Indag. Math. (New Series). 1997. № 8. P. 33-42.

10. Vector and Operator Valued Measures and Applications. Editors Don H. Tucker, Hugh B. Maynard (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah). 1973. Pages 474.

11. Notas de Matematica (58): Vector Measures and Control Systems, Series: North-Holland Mathematics Studies. 1975. Volume 20. P. 169.

12. Handbook of Measure Theory. Volume I. 2002. Pages 249.

13. Соловьев П. В. Fonctions de Green des Equations Paraboliques // Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS. 1939. V. XXIV, № 2. P. 107-109.

14. Соловьев П. В. О периодических решениях некоторых линейных уравнений четвертого порядка // Докл. АН СССР. 1939. Т. 25. С. 729-732.

15. Соловьев П. В. Решение уравнений эллиптического и параболического типа для малых областей // Матем. сб. 1939. Т. 5 (47). С. 473–486.

16. Соловьев П. В. Решение параболического уравнения с переменными коэффициентами. М. Учен. зап. ун-та. 1939. Вып. 15. С. 81–94.

17. Соловьев П. В. Некоторые замечания о периодических решениях нелинейных уравнений гиперболического типа // Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1939. С. 149–164.

18. Соловьев П. В. Об одной граничной задаче в теории аналитических функций // Докл. АН СССР. 1941. Т. 33. С. 190–192.

19. Слугинов С. П. Теория радикалов. Казань: Типо-лит. Н. М. Чижовой. 1910. 20 с.

20. Слугинов С. П. «Nouvelles annalles de matematiques» dirige par C.-A. Laisant, C. Bourlet, R. Bricard. Paris, 1913: Рецензия. Казань: Центр. типография. 1914. 10 с.

21. Слугинов С. П. Пропорции и прогрессии. Казань: Типо-лит. Н. М. Чижовой. 1910. 37 с.

22. Слугинов С. П. О. М. Суворов: Биог. очерк. Казань: Типо-лит. Имп. ун-та. 1912. 4 с.

23. Слугинов С. П. Криволинейные интегралы и их развитие. Казань: Типо-лит. Ун-та, 1912. 30 с.

24. Слугинов С. П. Смешанные алгебраические задачи: Повторит. курс всех отд. алгебры для учеников 7 и 8 кл. гимназий и 6 кл. реал. уч-щ. Казань: Казан. пед. музей. 1912. 146 с.

25. Слугинов С. П. Функциональное исчисление. Казань: Типо-лит. Имп. ун-та. 1913. 22 с.

26. Слугинов С. П. Основы теории чисел: Лекции, чит. в Казан. ун-те. Казань: В. Ф. Маркелов и В. А. Шаронов. 1913. 150 с.

27. Слугинов С. П. Применение принципа алгебраической взаимности в теории дробей и теории радикалов. Казань: Центр. тип. 1914. 8 с.

28. Слугинов С. П. Теория аналитических функций. Казань: типо-лит. Имп. ун-та. 1914. 175 с.

29. Слугинов С. П. Физионистское течение в геометрии: [Докл., чит. в заседании Физ.-мат. комис. 4 окт. 1913 г.]. Казань: типо-лит. Имп. ун-та. 1914. 16 с.

30. Слугинов С. П. Отзыв о работе Я. М. Шатуновского «Der grosste gemeinschaftliche teiler von algebraischen zahlen zweiter ordnung negativer diskkriminante und die zerkegung dieser zahlen in primfaktoren». (Общий наибольший делитель алгебраических чисел 2-го порядка с отрицательным дискриминантом и разложение этих чисел на первоначальных множителей). Leipzig, 1912 г. Казань: Типо-лит. Имп. ун-та. 1915. 8 с.

31. Слугинов С. П. Об аксиомах геометрии. Казань: Центр. тип. 1916. 16 с.

32. Слугинов С. П. Основной курс высшей алгебры: Ч. 1. Казань: типо-лит. Имп. ун-та. 1916.

33. Слугинов С. П. Важнейшие теоремы метрической геометрии и их связь между собою; Основания плоской тригонометрии. Самара: Тип. Совнархоза. 1922. 8 с.

34. Слугинов С. П. Важнейшие теоремы метрической геометрии и их связь между собою. Самара: Тип. Совнархоза. 1922. 8 с.

35. Слугинов С. П. Некоторые приложения теории аналитических функций; Основной курс высшей алгебры: Ч. 2, гл. 3. Самара: Сам. гос. ун-т. 1923. С. 83-118.

36. Слугинов С. П. Лекции по введению в анализ. Пермь, 1924. 227 с.

37. Слугинов С. П. Начала математического анализа. Пермь: Изд-во Госпросснаба. 1925.

38. Слугинов С. П. Д. Н. Зейлигер, профессор механики Казанского государственного университета: (По поводу 40-летия его ученой, педагогической и общественной деятельности). Пермь: тип. «Пермпромкомбината», 1927. 6 с.

39. Слугинов С. П. К 45-летнему юбилею научно-педагогической деятельности проф. Г. К. Суслова. Пермь: тип. «Пермпромкомбината». 1927. 5 с.

40. Левин В. И. Bemerkung zu den schlichten Abbildungen der Einheitskreises, Jahresber DMV. 1932. № 42. P. 68-70.

41. Левин В. И. Uber die Abschnitte von Potenzreihen, welche mit ihrer ersten Ableitung im Einheitskreise beschrankt sind, Sitzber BMG. 1933. № 32. P. 53-59.

42. Левин В. И. Ein Beitrag zu dem Milloux-Landauschen Satz., Jahresber DMV. 1934. № 44. P. 262-265.

43. Левин В. И. Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen, Math. Z. 1934. № 38. P. 306-311.

44. Левин В. И. Uber die Koeffizientensummen einiger Klassen von Potenzreihen, Math. Z. 1934. № 38. P. 565-590.

45. Левин В. И. Some remarks on the coefficients of schlicht functions, Proc. London Math. Soc. 1935. № 39. P. 467-480.

46. Левин В. И. On some integral inequalities involving periodic functions, J. London Math. Soc. 1935. № 10. P. 45-48.

47. Левин В. И. On the two-parameter extension and analogue of Hilbert's inequality, J. London Math. Soc. 1936. № 11. P. 119-124.

48. Левин В. И. Two remarks on Hilbert's double series theorem, J. Indian Math. Soc. 1937. Vol. 11. № 3. P. 111-115.

49. Левин В. И. Two remarks on van der Corput's generalisations of Knopp's inequality, Kon. Akad. van Wetensch, Amsterdam. 1937. Vol. 40. № 5. P. 429-431.

50. Левин В. И. О неравенствах. I // Матем. сборник. 1938. Т. 3 (45). С. 341-346.

51. Левин В. И. О неравенствах. II // Матем. сборник. 1938. Т. 4 (46). С. 309-324.

52. Левин В. И. О неравенствах. III // Матем. сборник. 1938. Т. 4 (46). С. 325-332.

53. Левин В. И. О неравенствах. IV // Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1938. Т. 36. С. 525-542.

54. Левин В. И. Об одном континуальном аналоге ряда Маклорена // Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. 1944. Т. 42. С. 51-53.

55. Левин В. И. Точные константы в неравенствах типа Карлсона // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. С. 635-638.

56. Левин В. И. Ряды и интегралы Фурье. Элементы операционного исчисления. М., Советское радио, 1948. 116 с.

57. Левин В. И. По поводу одной задачи С. Рамануджана // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5. № 3 (37). С. 161-166.

58. Левин В. И. Предельная оценка точности асимптотических разложений некоторого класса функций // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. С. 13-16.

59. Левин В. И., Гросберг Ю.М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.–Л., Гостехиздат, 1951. 576 с.

60. Левин В. И., Фукс Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.–Л., Гостехиздат, 1951. 308 с.

61. Левин В. И. Предельная оценка точности асимптотических разложений некоторого класса функций // Тр. Москов. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 383-395.

62. Левин В. И. О подготовке учителей математики в педагогических институтах, доклад № 3. Изд. АПН РСФСР. 1953. С. 1-16.

63. Левин В. И. Оценка некоторых числовых рядов // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. № 4 (62). С. 191-194.

64. Левин В. И. О некоторых определителях, составленных из членов арифметической прогрессии высшего порядка // Уч. зап. Тульского гос. пед. ин-та. 1954. Вып. 5. С. 73-75.

65. Левин В. И. Определения элементарных трансцендентных функций через интегральные представления // Уч. зап. Тульского гос. пед. ин-та. 1954. Вып. 5. С. 76-105.

66. Левин В. И. Методические указания к программе по курсу «Математический анализ» (для 1-го курса физико–математических факультетов педагогических институтов). М., Учпедгиз, 1955. С. 1-56.

67. Левин В. И. Методы математической физики. Учебное пособие для физико–математических факультетов педагогических институтов (1-е издание). М., Учпедгиз, 1956. 238 с.

68. Левин В. И. Обобщение арифметико-геометрического среднего // Матем. просвещение. 1957. № 2. С. 195-204.

69. Левин В. И. Элементарное доказательство одной теоремы теории средних // Матем. просвещение. 1958. № 3. С. 177-181.

70. Левин В. И. Основные вопросы преподавания математических дисциплин на заочных отделениях и разработка методической литературы // Сб. «Заочн. педагогич. образование». 1958. № 15. С. 5–18.

71. Левин В. И. Некоторые вопросы преподавания математики в средней школе // Матем. просвещение. 1959. № 4. С. 145-150.

72. Левин В. И. Уравнения математической физики. М., Наука, 1964. 287 с.

73. Левин В. И., Годунова Е. К. Обобщение неравенства Карлсона // Матем. сборник. 1965. Т. 67 (109). С. 643-646.

74. Левин В. И., Годунова Е. К. Некоторые качественные вопросы теплопроводности // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1966. Т. 6. С. 1097-1103.

75. Левин В. И., Перетурин А. Ф. Взаимодействие физики и математики // Физика в школе. 1966. № 6. С. 15-21 .

76. Левин В. И. Ортогональные семейства плоских кривых // Математика в школе. 1966. № 2. С. 13-24.

77. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. М., Знание, 1968. 47 с.

78. Левин В. И., Годунова Е. К. Об одном неравенстве Марони // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 2. С. 221-224 .

79. Левин В. И., Годунова Е. К., Чебаевская И. В. Новые исследования по функциональным неравенствам. Материалы 6-й межвузовской физ.-матем. научной конференции Дальнего Востока, т. 3 .

80. Левин В. И., Годунова Е. К. Общий класс неравенств, содержащий неравенство Стеффенсена // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 3. С. 339-344.

81. Левин В.И. Жизнь и творчество индийского математика С. Рамануджана. Историко-матем. исслед. 1960. Вып. 13. С. 335-378.

82. Гущина В.М. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений // Тула, Учен. зап. Пед. ин-та. 1954. Вып. 5. С. 107-128.

83. Гущина В.М. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений общего вида // Тула, Учен. зап. Пед. ин-та. 1960. Вып. 7. С. 224-245.

84. Симонов А.С. Метод Фурье для одного интегро–дифференциального уравнения эллиптического типа // Тр. Науч. объедин. физ.-матем. фак. вузов Дальн. Вост. 1963. Вып. 3. С. 70-74.

85. Симонов А.С. Априорные оценки для интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Науч. объедин. преподавателей физ.-матем. фак. пед. ин-тов Дальн. Вост. 1965. Вып. 5. С. 150-165.

86. Кононенко В.И., Лихтарниковым Л.М., Симонов А.С. О знаке решения одной краевой задачи // Тр. Науч. объедин. преподавателей физ.-матем. фак. пед. ин-тов Дальн. Вост. 1965. Вып. 5. С. 59-73.

87. Симонов А.С. О существовании решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений // Тр. Науч. объедин. преподавателей физ.-матем. фак. пед. ин-тов Дальн. Вост. 1965. Вып. 5. С. 166-178.

88. Крейн С.Г., Симонов А.С. Теорема о гомеоморфизмах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 6. С. 1226-1228.

89. Симонов А.С. Видоизменение теоремы Лере–Лионса и его приложение к решению нелинейных эллиптических уравнений // Тр. семинара по функц. анализу. Воронеж. 1967. Вып. 9. С. 157-166.

90. Крейн С.Г., Левин В.И., Кононенко В.И., Симонов А.С. Л. М. Лихтарников // Математика в школе. 1985. № 3. С. 77.

91. Виленкин Н.Я., Симонов А.С., Сурвилло Г.С. Программа 10–11 классов с гуманитарным уклоном // Новая модель школы «Диалектика и экология». М.: Авангард, 1992. С. 248-251.

92. Симонов А.С. О математических моделях экономики в школьном курсе математики // Математика в школе. 1997. № 5. С. 72-75.

93. Симонов А.С. Парабола безопасности // Математика в школе. 1998. № 1. С. 83-90.

94. Симонов А.С. Некоторые применения геометрической прогрессии в экономике // Математика в школе. 1998. № 3. С. 27-37.

95. Симонов А.С. Проценты и банковские расчеты // Математика в школе. 1998. № 4. С. 37-45.

96. Симонов А.С. Сложные проценты // Математика в школе. 1998. № 5. С. 30 - 42.

97. Симонов А.С. Сегодняшняя стоимость завтрашних платежей // Математика в школе. 1998. № 6. С. 34-37.

98. Симонов А. С. Об одном способе введения понятия производной // Математика в школе. 1999. № 4. С. 56-63.

99. Симонов А. С. Не выплеснуть ребенка вместе с водой // Математика в школе. 2001. № 3. С. 62-64.

100. Симонов А. С., Инютина Е. В. Геометрическая прогрессия в экономике // Математика в школе. 2001. № 5. С. 17-21.

101. Симонов А. С., Игнатьева Н. И. Об одном приложении понятия «Производная» к решению экономических задач // Математика в школе. 2001. № 9. С. 43-52.

102. Симонов А. С., Сурвилло Г. С. Планирование и контрольные работы для 8–9 классов с углубленным изучением математики // Математика в школе. 2002. № 7.

103. Виленкин Н. Я., Симонов А. С., Сурвилло Г. С. Алгебра–10. Для классов с углубленным изучением дисциплин. Ч. 1 / (учеб, пособие, напечатано на основании решения коллегии Мин-ва образования республики Хакассии) Новосибирск: Наука, 1992. 81 с.

104. Виленкин Н. Я., Симонов А. С. Математический анализ функций многих переменных. В 3 частях. Ч. 1. Основные структуры математического анализа. М.: Альфа, 1992. 58 с.

105. Виленкин Н. Я., Симонов А. С. Математический анализ функций многих переменных. В 3 частях. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. М.: Альфа, 1992. 79 с.

106. Виленкин Н. Я., Симонов А. С. Математический анализ функций многих переменных. В 3 частях. Ч. 3. Интегральное исчисление функций многих переменных. М.: Альфа, 1992. 87 с.

107. Виленкин Н. Я., Симонов А. С., Сурвилло Г. С. Алгебра–10. Для классов с углубленным изучением гуманитарных дисциплин. Ч. II / Мин-во образования РФ, Абаканский гос. пед. ин-т им. Н. Ф. Катанова, редакция издательского отдела АРИИ им. Н. Ф. Катанова. Абакан, 1993. 165 с.

108. Виленкин Н. Я., Симонов А. С., Сурвилло Г. С., Кудрявцев А. И. Алгебра–9: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. / Рекомендовано главным управлением развития общего среднего образования Мин-ва образования РФ. Включено в федеральный комплект учебников. М.: Просвещение, 1996. 384 с.

109. Симонов А. С. Экономика на уроках математики: Учебное пособие (рекомендовано Мин-вом образования РФ). М.: Школа–Пресс. 1999.

110. Виленкин Н. Я., Симонов А. С., Сурвилло Г. С., Кудрявцев А. И. Алгебра–9. Учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики. / Рекомендовано министерством образования и науки РФ. Изд.8, доработанное. М.: Просвещение. 2011.

111. Чернов В. М. Предельные соотношения для некоторых интегральных преобразований // Уч. зап. Заоч. пед. ин-та. М. 1959. Вып. 3. С. 103-143.

112. Чернов В. М. Некоторые предельные соотношения для двустороннего преобразования Лапласа и их приложения // Изв. вузов. Математика. 1961. № 4. С. 125-136.

113. Чернов В. М. Некоторые свойства двустороннего двумерного преобразования Лапласа // Изв. вузов. Математика. 1962. № 5. С. 115-127.

114. Чернов В. М. Некоторые вопросы операционного исчисления на основе двустороннего двумерного преобразования Лапласа–Карсона // Изв. вузов. Математика. 1963. № 2. С. 140-151.

115. Чернов В. М. Асимптотические свойства двумерного преобразования Лапласа // Изв. вузов. Математика. 1965. № 1. С. 158-167.

116. Васин Л. А., Городничев С. В., Луценко А. Г. Формирование портфеля заказов при отсутствии неопределенности // Известия Тульского государственного университета. Экономические и юридические науки. 2013. № 3. С. 3-11.

117. Луценко А. Г. Управляющие элементы (controls) в системе MMathcad как инструментальная основа для разработки управляемых визуальных средств обучения и их использования в учебном процессе // Известия Тульского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12. № 5. С. 173.

118. Луценко А. Г. Компьютерное моделирование в обучении математике будущих экономистов // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2006. № 7. С. 121.

119. Луценко А. Г. Опыт использования системы Mathcad 11 при обучении высшей математике // Математика в высшем образовании. 2005. № 3. С. 53-64.

120. Луценко А. Г. Управляемые визуальные средства обучения математическому анализу // Педагогическая информатика. 2004. № 4. С. 67-74.

121. Луценко А. Г. Об инъективных булевых пространствах // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. № 4. С. 219.

122. Луценко А. Г. О ретрактах DT // Математические заметки. 1982. Т. 31. № 3. С. 433.

123. Денисов И. В. Асимптотическое решение иррегулярно сингулярного уравнения в банаховом пространстве // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. № 5. С. 181-182.

124. Денисов И. В. О количестве срезаний для сингулярного уравнения // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения: Сб. научн. тр. Куйбышев: КГУ. 1982. С. 45-46.

125. Денисов И. В. Об асимптотическом решении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, неразрешенных относительно производной // Вычислительная математика и математическая физика: Сб. научн. тр. М.: МГПИ им. В. И. Ленина. 1982. С. 77–84.

126. Денисов И. В. Дифференциальные уравнения с конечномероморфным операторным коэффициентом в банаховом пространстве // Доклады АН СССР. 1985. Т. 282. № 6. С. 1289-1293.

127. Денисов И. В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно - возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. Бишкек: Илим. 1991. С. 37.

128. Денисов И. В. Квазилинейные сингулярно возмущенные эллиптические уравнения в прямоугольнике // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1995. Т. 35. № 11. С. 1666-1678.

129. Денисов И. В. Об асимптотических решениях сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Теория и приложения методов малого параметра: Сб. научн. тр. Обнинск: ОИАЭ. 1996. С. 32.

130. Денисов И. В. Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1996. Т. 36. № 10. С. 56-72.

131. Денисов И. В. Оценка остаточного члена в асимптотике решения краевой задачи // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1996. Т. 36. № 12. С. 64–67.

132. Денисов И. В. Первая краевая задача для линейного параболического уравнения в пространстве // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1616-1623.

133. Денисов И. В. Задача нахождения главного члена угловой части асимптотики решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1999. Т. 39. № 5. С. 779-791.

134. Денисов И. В. О классах функций, определяемых функциональными неравенствами // Известия Тульского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». 2000. Т.6. Вып. 1. С. 79-84.

135. Денисов И. В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнениях // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2001. Т. 41. № 3. С. 390-406.

136. Денисов И. В. Угловой погранслой в немонотонных сингулярно возмущенных краевых задачах с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 9. С. 1674-1692.

137. Денисов И. В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 62-79.

138. Денисов И. В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник. 2009. Т. X. Вып. 2 (30). С. 79-108.

139. Денисов И. В., Денисова Т. Ю., Родионов А. В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных параболических уравнениях // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. № 3 (43). С. 28-46.

140. Бутузов В. Ф., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в нелинейных эллиптических задачах, содержащих производные первого порядка // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21. № 1. С. 7-31.

141. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2017. Т. 57. № 2. С. 255-274

142. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 575-585.

143. Денисов И. В., Денисов А. И. Математические модели процессов горения // Вестник РАЕН. Издание Российской академии естественных наук. 2019. Т. 19. № 2. С. 64-66.

144. Денисов И. В., Денисов А. И. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59. № 1. С. 102-117.

145. Денисов И. В., Денисов А. И. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59. № 9. С. 1581-1590.

146. Денисов И. В., Добровольский Н. М. Жизнь и научная деятельность Альберта Рубеновича Есаяна // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 1 (69). С. 432-436.

147. Денисов И. В., Денисов А. И. Математические модели процессов горения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. 2020. Т. 185. С. 82-88.

148. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61. № 2. С. 256-267.

149. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61, С. 1894-1903.

150. Лёвина С. Н. О решении уравнения колебаний на всей оси времен // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114. № 6. С. 18-20.

151. Лёвина С. Н. Операторное решение некоторых задач математической физики на всей оси времен // Уч. зап. Пед. ин-та. Тула, 1960. Вып. 7. С. 113-137.

152. Лёвина С. Н. Об одной задаче на всей оси времен // Волж. матем. сб. 1965 Вып. 3. С. 207-210.

153. Ефимова Н. С. Двойные асимптотические разложения // Уч. зап. Пед. ин-та. Тула, 1960. Вып. 7. С. 98-112.

154. Исаева Л. В. Решение задачи Коши для уравнения // Волж. матем. сб. 1965 Вып. 3. С. 289-295.

155. Антропова В. И. Михаил Васильевич Остроградский // Вестник высшей школы. 1954. № 9. С. 49-50.

156. Антропова В. И. Публичные лекции по интегральному исчислению М. В. Остроградского. Труды Ин-та истории естеств. и техн. 1955. Вып. 5. С. 304-320.

157. Антропова В. И. К истории интегральной теоремы М. В. Остроградского. Труды Ин-та истории естеств. и техн. 1957. Вып. 17. С. 229-269.

158. Антропова В. И. О работах Фурье, Остроградского и Пуассона по теплопроводности и жидкостях // Вопросы истории естеств. и техн. 1957. № 3. С. 49-61.

159. Антропова В. И. Примечания. В книге: Остроградский М. В. «Избранные труды». 1958. С. 484-495.

160. Антропова В. И. Комментарии (№ № 51–103). В книге: Остроградский М. В. «Полное собрание трудов», 1. Киев. 1959. С. 269-284.

161. Антропова В. И. Комментарии и примечания к «Запискам интегрального исчисления» М. В. Остроградского. В книге «Михаил Васильевич Остроградский, 1862–1962». М. 1961. С. 253-263.

162. Антропова В. И. Первые систематические курсы по теории потенциала. В сб. «Вопр. истории физ.-матем. н.», М. 1963. С. 139-140.

163. Антропова В. И. Примечания к «Мемуару о распространении тепла внутри твердых тел» М. В. Остроградского // Истор.-матем. исследования. 1965. Вып. 16. С. 97-126.

164. Антропова В. И. О геометрическом методе «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона // Истор.-матем. исследования. М. 1966. Вып. 17. С. 205-228.

165. Рыбаков В. И. Пространство Асплунда: еще один критерий // Матем. заметки. 2007. Т. 82. № 1. С. 118-124.

166. Рыбаков В. И. Банаховы пространства со свойством PC // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 4. С. 568-577.

167. Рыбаков В. И. Еще один класс пространств Намиоки // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 2. С. 263–268.

168. Рыбаков В. И. Об интегрируемости по Петтису стоуновского преобразования // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 238–253.

169. Рыбаков В. И. О сходимости на границе единичного шара сопряженного пространства // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 753–758.

170. Рыбаков В. И. О функционалах, сохраняющих результант // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 1. С. 65-70.

171. Рыбаков В. И. Одно усиление теоремы Намиоки и m-допустимые множества // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 4. С. 599-615.

172. Рыбаков В. И. Банаховы пространства с k- и m-допустимыми множествами // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 1. С. 49-64.

173. Рыбаков В. И. Универсальная измеримость тождественного отображения банахова пространства в некоторых топологиях // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 2. С. 305-314.

174. Рыбаков В. И. Некоторые свойства мер на нормированном пространстве, обладающем свойством RN // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 1. С. 81-92.

175. Рыбаков В. И. Некоторые случаи сведения изучения слабо интегрируемых функций к изучению функций, интегрируемых в смысле Петтиса // Изв. вузов. Матем. 1975. № 11. С. 98-101.

176. Рыбаков В. И. Одно обобщение интеграла Бохнера на случай локально выпуклых пространств // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 577-588.

177. Рыбаков В. И. Выделение из векторной меры части, представимой интегралом Бохнера // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 5. С. 797-808.

178. Рыбаков В. И. О векторных мерах со значениями в локально выпуклых пространствах // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. № 4. С. 95-96.

179. Рыбаков В. И. Об условных математических ожиданиях для интегрируемых в смысле Петтиса функций // Матем. заметки. 1971. Т. 10. № 5. С. 565-570.

180. Рыбаков В. И. К теореме Бартла–Данфорда–Шварца о векторных мерах // Матем. заметки. 1970 Т. 7. № 2. С. 247-254.

181. Рыбаков В. И. Теорема Радона–Никодима и представление векторных мер интегралом // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 2. С. 282-285.

182. Рыбаков В. И. О векторных мерах // Изв. вузов. Матем. 1968. № 12. С. 92-101.

183. Манохин Е. В. О К-локально равномерно выпуклых пространствах // Изв. вузов. Матем. 1991. № 5. С. 32-34.

184. Манохин Е. В. Г-слабо локально равномерная выпуклость в пространствах Банаха // Известия Вузов. Математика. 1998. № 1. С. 51-54.

185. Добровольский Н. Е. В.М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодической функции // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 3. С. 56-67.

186. Манохин Е. В. Банаховы матрицы // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. 2003. Т. 9. Вып. 1. С. 129-141.

187. Манохин Е. В. Некоторые множества в l_1^n и константа Юнга // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9. Вып. 1. С. 144-147.

188. Шулюпов В. А. Дифференциальные уравнения, описывающие замкнутую систему, содержащую звено с гистероном // Вестник МГУ. Серия I. 1995. № 2. С. 25-29.

189. Шулюпов В. А. Дифференциальные уравнения, описывающие замкнутую систему, содержащую звено с гистероном // Дифференциальные уравнения. 1995. № 5. С. 914.

190. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Шулюпов В. А. Факториал и рекурсия // Изв. Тул. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 1999. Т. 5. Вып. 1. С. 100-113.

191. Шулюпов В. А. Возможный вид отдельной полутраектории двумерной автономной замкнутой системы, содержащей звено с гистероном // Информационные технологии, инновации, инвестиции, математические методы и модели. Межвузовский сборник научных трудов, Тула, 2012. С. 177-181.

192. Шулюпов В. А. Качественное исследование двумерной системы, содержащей звено с гистероном. Тула. Издательство ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2012. 92 с.

193. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Шулюпов В. А. Программирование в Mathcad на примерах. Тула. Изд-во ТГПУ. 2010. 330 с.

194. Исаева Н. М., Субботина Т. И. Математическое моделирование зависимости между общим и прямым билирубином для некоторых болезней печени // Вестник новых медицинских технологий. Тула. Изд-во ТулГУ. 2001. Т. IX. № 1. С. С.34-36.

195. Исаева Н. М., Субботина Т. И., Яшин А. А. Литогенные свойства желчи и «золотое сечение» // Вестник новых медицинских технологий. Тула. Изд-во ТулГУ. 2006. Т. XIII. № 4. С. 175-177.

196. Исаева Н. М., Субботина Т. И., Хадарцев А. А., Яшин А. А. Код Фибоначчи и «золотое сечение» в экспериментальной патофизиологии и электромагнитобиологии. ГУП НИИ НМТ, ООО НИЦ «Матрикс». Москва – Тула – Тверь: ООО Издательство «Триада». 2007.

197. Исаева Н. М., Куротченко С. П., Савин Е. И., Субботина Т. И., Яшин А. А. «Золотое сечение» как критерий тяжести патоморфологических изменений при воздействии на организм вращающихся и импульсных бегущих магнитных полей // Вестник новых медицинских технологий. Тула. Изд-во ТулГУ. 2009. Т. XVI. № 3. С. 38-39.

198. Исаева Н. М., Иванов В. Б., Савин Е. И., Субботина Т. И., Яшин А. А., Хасая Д. А. Исследование активности регуляции агрегатного состояния крови при воздействии на организм электромагнитного излучения с позиций «золотого сечения» // Вестник новых медицинских технологий. Тула. Изд-во ТулГУ. 2011. Т. XVIII. № 4. С. 30-32.

199. Исаева Н. М., Купеев В. Г., Савин Е. И., Субботина Т. И., Яшин А. А. Применение корреляционно-регрессионного анализа для исследования активности свободно-радикальных процессов под воздействием электромагнитного излучения, введения фитомеланина и стволовых клеток // Вестник новых медицинских технологий. Тула. Изд-во ТулГУ. 2011. Т. XVIII. № 4. С. 48-50.

REFERENCES

1. 1948, “Mathematics in the USSR for thirty years, 1917–1947“, *Gostekhizdat, Moscow*, 1044 p.

2. 1959, “Mathematics in the USSR for forty years, 1917–1957: in 2 volumes V. 1: Review articles“, *Fizmatgiz, Moscow*, 1002 p.

3. 1959, “Mathematics in the USSR for forty years, 1917–1957: in 2 volumes. V. 2: Biobibliography“, *Fizmatgiz, Moscow*, 821 p.

4. 1970, “Mathematics in the USSR 1958–1967. Volume Two: Biobibliography. Issue 2. M–Z“, *Nauka, Moscow* , 762 p.

5. 1969, “Mathematics in the USSR 1958–1967. Volume Two: Biobibliography. Issue 1. A–L“, *Nauka, M* , 814 p.

6. Bazilevich, I. E., Bolotovsky, B. M., Godunova E. K. & Markushevich A. I. 1970, “Viktor Iosifovich Levin (on the occasion of his sixtieth birthday)“, *Uspekhi Mat.Nauk.*, vol. 25, no. 1 (151), pp. 205-210.

7. Denisov, I. V., Dobrovolsky, N. M., Rebrova, I. Yu. & Chubarikov V. N. 2012, “To the 80th anniversary of Alexander Sergeevich Simonov “, *Chebyshev collection*, V. 13, no. 3 (43), pp. 111-115.

8. Ricker, W. J. 1998, “Rybakov's theorem in Frechet spaces and completeness of l_1 – spaces“, *Austral. Math. Soc. (Series A)*, no. 64, pp. 247-252.

9. Fernandez, A. & Naranjo, F. 1997, “Rybakov's theorem for vector measures in Frechet spaces“, *Indag. Math. (New Series)*, no. 8, pp. 33-42.

10. 1973, “Vector and Operator Valued Measures and Applications“, *Editors Don H. Tucker, Hugh B. Maynard (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah)*, pages 474.

11. 1975, “Notas de Matematica (58): Vector Measures and Control Systems“, *Series: North-Holland Mathematics Studies*, volume 20, pages 169.

12. 2002, *Handbook of Measure Theory*, volume I, pages 249.

13. Soloviev, P. V. 1939, “Fonctions de Green des Equations Paraboliques“, *Comptes Rendus (Doklady) de l’Academie des Sciences de l’URSS*, v. XXIV, no. 2, pp. 107-109.

14. Soloviev, P. V. 1939, “On periodic solutions of some linear equations of the fourth order“, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, vol. 25, pp. 729-732.

15. Soloviev, P. V. 1939, “Solution of equations of elliptic and parabolic type for small domains“, *Matem. Sat.*, vol. 5 (47), pp. 473-486.

16. Soloviev, P. V. 1939, “Solution of a parabolic equation with variable coefficients“, *Uchen. app. univ. M.* , no. 15, pp. 81-94.

17. Soloviev, P. V. 1939, “Some remarks on periodic solutions of nonlinear equations of hyperbolic type“, *Izvestiya AN SSSR. Department of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical series*, pp. 149-164.

18. Soloviev, P. V. 1941, “On a boundary value problem in the theory of analytic functions“, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, vol. 33, pp. 190-192.

19. Sluginov, S. P. 1910, “The theory of radicals“, *N. M. Chizhova, Tipo-lit, Kazan*, 20 p.

20. Sluginov, S. P. 1914, “"Nouvelles annalles de matematiques"dirige par C.-A. Laisant, C. Bourlet, R. Bricard. Paris, : Review. 1913“, *Centre. typography, Kazan*, 10 p.

21. Sluginov, S. P. 1910, “Proportions and progression“, *N. M. Chizhova, Tipo-lit, Kazan*, 37 p.

22. Sluginov, S. P. 1912, “O. M. Suvorov: Biog. feature article“, *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*, 4 p.

23. Sluginov, S. P. 1912, “Curvilinear integrals and their development“, *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*, 30 p.

24. Sluginov, S. P. 1912, “Mixed Algebraic Problems: Repeat. course of all dep. algebra for students of grades 7 and 8 gymnasiums and 6 cells. real. uch-sch“, *Kazan. ped. museum, Kazan*, 146 p.

25. Sluginov, S. P. 1913, “Functional calculus“, *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*, 22 p.

26. Sluginov, S. P. 1913, “Fundamentals of number theory: Lectures, cheat. to Kazan. University“, *V. F. Markelov and V. A. Sharonov, Kazan*, 150 p.

27. Sluginov, S. P. 1914, “Application of the principle of algebraic reciprocity in the theory of fractions and the theory of radicals“, *Centre. typography, Kazan*, 8 p.

28. Sluginov, S. P. 1914, “The theory of analytic functions“, *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*, 175 p.

29. Sluginov, S. P. 1914, “Physionistic flow in geometry: [Dokl., Chit. in a meeting Phys.-mat. commission. 4 oct. 1913]“, *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*, 16 p.

30. Sluginov, S. P. 1915, "Review of the work of Ya. M. Shatunovsky "Der grosste gemeinschaftliche teiler von algebraischen zahlen zweiter ordnung negativer diskkriminante und die zerkegung dieser zahlen in primfaktoren". (Common greatest divisor of 2nd order algebraic numbers with negative discriminant and decomposition of these numbers into initial factors). Leipzig, 1912", *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*, 8 p.

31. Sluginov, S. P. 1916, "On the axioms of geometry", *Centre. typography, Kazan*, 16 p.

32. Sluginov, S. P. 1916, "The main course of higher algebra: Part 1", *Imp. University, Tipo-lit, Kazan*

33. Sluginov, S. P. 1922, "The most important theorems of metric geometry and their connection with each other; Foundations of flat trigonometry", *Typ. Economic Council, Samara*, 8 p.

34. Sluginov, S. P. 1922, "The most important theorems of metric geometry and their connection with each other", *Typ. Economic Council, Samara*, 8 p.

35. Sluginov, S. P. 1923, "Some applications of the theory of analytic functions; The main course of higher algebra: Part 2, Chapter 3", *Himself. state un-t, Samara.* . P. 83–118.

36. Sluginov, S. P. 1924, "Lectures on Introduction to Analysis", *Perm*, 227 p.

37. Sluginov, S. P. 1925, "The beginnings of mathematical analysis", *Publishing house of Gosrossnab, Perm.*

38. Sluginov, S. P. 1927, "D. N. Zeiliger, professor of mechanics at Kazan State University: (On the occasion of the 40th anniversary of his scientific, pedagogical and social activities)", *Typ. "Permpromkombinata Perm*, 6 p.

39. Sluginov, S. P. 1927, "To the 45th anniversary of the scientific and pedagogical activity of prof. G. K. Suslova", *Typ. "Permpromkombinata Perm*, 5 p.

40. Levin, V. I. 1932, "Comment on the simple illustrations of the unit circle", *Jahresber DMV*, № 42, pp. 68-70.

41. Levin, V. I. 1933, "On the sections of power series which are bounded with their first derivative in the unit circle", *Sitzber BMG*, № 32, pp. 53-59.

42. Levin, V. I. 1934, "A contribution to the Milloux-Landauschen set", *Jahresber DMV*, № 44, pp. 262-265.

43. Levin, V. I. 1934, "A contribution to the coefficient problem of simple functions", *Math. Z.*, № 38, pp. 306-311.

44. Levin, V. I. 1934, "On the sums of coefficients of some classes of power series", *Math. Z.*, № 38, pp. 565-590.

45. Levin, V. I. 1935, "Some remarks on the coefficients of simple functions", *Proc. London Math. Soc.*, № 39, pp. 467-480.

46. Levin, V. I. 1935, "On some integral inequalities involving periodic functions", *J. London Math. Soc.*, № 10, pp. 45-48.

47. Levin, V. I. 1936, "On the two-parameter extension and analogue of Hilbert's inequality", *J. London Math. Soc.*, № 1, pp. 119-124.

48. Levin, V. I. 1937, "Two remarks on Hilbert's double series theorem", *J. Indian Math. Soc.* , v. 11, № 3, pp. 111-115.

49. Levin, V. I. 1937, "Two remarks on van der Corput's generalizations of Knopp's inequality", *Kon. Akad. Van Wetensch, Amsterdam*, v. 40, № 5, pp. 429-431.

50. Levin, V. I. 1938, "On inequalities. I", *Mat. collection*, № 3 (45), pp. 341-346.

51. Levin, V. I. 1938, "On inequalities. II", *Mat. collection*, № 4 (46), pp. 309-324.

52. Levin, V. I. 1938, "On inequalities. III", *Mat. collection*, № 4 (46), pp. 325-332.

53. Levin, V. I. 1938, "On inequalities. IV", *Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Department of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical series*, vol. 36, pp. 525-542.

54. Levin, V. I. 1944, "On one continual analogue of the Maclaurin series", *Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Department of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical series*, v. 42, pp. 51-53.

55. Levin, V. I. 1948, "Sharp constants in Carlson-type inequalities", *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, v. 59, pp. 635-638.

56. Levin, V. I. 1948, "Fourier series and integrals. Elements of operational calculus", *Soviet radio, M.*, 116 p.

57. Levin, V. I. 1950, "Concerning a problem of S. Ramanujan", *Uspekhi Mat. sciences*, v. 5, no. 3 (37), pp. 161-166.

58. Levin, V. I. 1951, "A limiting estimate for the accuracy of asymptotic expansions of a certain class of functions", *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, vol. 80, pp. 13-16.

59. Levin, V. I. & Grosberg, Yu. M. 1951, "Differential equations of mathematical physics", *Gostekhizdat, M.-L.*, 576 p.

60. Levin, V. I. & Fuks, B. A. 1951, "Complex variable functions and some of their applications", *Gostekhizdat, M.-L.*, 308 p.

61. Levin, V. I. 1953, "Limit estimate of the accuracy of asymptotic expansions of a certain class of functions", *Trudy Inst. Moscow. mat. society*, vol. 2, pp. 383-395.

62. Levin, V. I. 1953, "On the training of teachers of mathematics in pedagogical institutes, report No. 3", *Ed. APN RSFSR*, pp. 1-16.

63. Levin, V. I. 1954, "Estimation of some numerical series", *Uspekhi Mat. sciences*, v. 9, No. 4 (62), pp. 191-194.

64. Levin, V. I. 1954, "On some determinants composed of members of a higher order arithmetic progression", *Uch. app. Tula state ped. in-t*, № 5, pp. 73-75.

65. Levin, V. I. 1954, "Definitions of elementary transcendental functions in terms of integral representations", *Uch. app. Tula state ped. in-t*, № 5, pp. 76-105.

66. Levin, V. I. 1955, "Methodical instructions for the program for the course "Mathematical analysis"(for the 1st year of physics and mathematics faculties of pedagogical institutes)", *Uchpedgiz, M.*, pp. 1-56.

67. Levin, V. I. 1956, “Methods of Mathematical Physics. Textbook for physics and mathematics faculties of pedagogical institutes (1st edition)“, *Uchpedgiz, M.*, 238 p.

68. Levin, V. I. 1957, “Generalization of the arithmetic-geometric mean“, *Matem. education*, no. 2, pp. 195-204.

69. Levin, V. I. 1958, “An elementary proof of a theorem in the theory of means“, *Matem. education*, no. 3, pp. 177-181.

70. Levin, V. I. 1958, “The main questions of teaching mathematical disciplines in correspondence departments and razrazny and razrarazheniya“, *Correspondence pedagogical education*, no. 15, pp. 5-18.

71. Levin, V. I. 1959, “Some questions of teaching mathematics in secondary school“, *Matem. education*, no. 4, pp. 145-150.

72. Levin, V. I. 1964, “Equations of mathematical physics“, *Nauka, Moscow*, 287 p.

73. Levin, V. I. & Godunova, E. K. 1965, “Generalization of Carlson’s inequality“, *Matem. collection*, v. 67 (109), pp. 643-646.

74. Levin, V. I. & Godunova, E. K. 1966, “Some qualitative questions of heat conduction“, *Zhurnal Vychisl. mat. and mat. physics*, vol. 6, pp. 1097-1103.

75. Levin, V. I. & Pereturin , A. F. 1966, “The interaction of physics and mathematics“, *Physics at school*, no. 6, pp. 15-21.

76. Levin, V. I. 1966, “Orthogonal families of plane curves“, *Mathematics at school*, No. 2, P. 13-24.

77. Levin, V. I. 1968, “Ramanujan is the mathematical genius of India“, *Knowledge, M.*, 47 p.

78. Levin, V. I. & Godunova, E. K. 1967, “On a Maroni inequality“, *Mat. notes*, v. 2, no. 2, pp. 221-224.

79. Levin, V. I., Godunova, E. K. & Chebaevskaya, I. V. “New research on functional inequalities. Materials of the 6th Interuniversity Phys.-Math. scientific conference of the Far East“, vol. 3.

80. Levin, V. I. & Godunova, E. K. 1968, “A general class of inequalities containing Steffensen’s inequality“, *Mat. notes*, vol. 3, no. 3, pp. 339-344.

81. Levin, V. I. 1960, “The life and work of the Indian mathematician S. Ramanujan“, *Historical-mat. issled.*, № 13, pp. 335-378.

82. Gushchina, V. M. 1954, “On a class of nonlinear integral equations“, *Uch. app. Tula state ped. in-t*, № 5, pp. 107-128.

83. Gushchina, V. M. 1960, “Existence and uniqueness theorems for nonlinear integral equations of general form“, *Uch. app. Tula state ped. in-t*, № 7, pp. 224-245.

84. Simonov, A. S. 1963, “Fourier’s method for one integro-differential equation of elliptic type“, *Tr. Sci. unite. phys.-math. fac. universities Dal. Vost.*, Nn. 3, pp. 70-74.

85. Simonov, A. S. 1965, “A priori estimates for integro-differential equations“, *Tr. Sci. combined. teachers phys.-math. fac. ped. in-tov Dal. Vost.*, № 5, pp. 150-165.

86. Kononenko, V. I., Likhtarnikov, L. M. & Simonov, A. S. 1965, “On the sign of the solution of a boundary value problem“, *Tr. Sci. combined. teachers phys.-math. fac. ped. in-tov Dal. Vost.*, № 5, pp. 59-73.

87. Simonov, A. S. 1965, “On the existence of solutions of some quasilinear elliptic equations“, *Tr. Sci. combined. teachers phys.-math. fac. ped. in-tov Dal. Vost.*, № 5, pp. 166-178.

88. Crane, S. G. & Simonov, A. S. 1966, “A theorem on homeomorphisms“, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, vol. 167, № 6, pp. 1226-1228.

89. Simonov, A. S. 1967, “Modification of the Leray–Lions theorem and its application to the solution of nonlinear elliptic equations“, *Tr. seminar on func. analysis, Voronezh*, № 9, pp. 157-166.

90. Crane, S. G., Levin, V. I., Kononenko, V. I. & Simonov, A. S. 1985, “L. M. Likhtarnikov“, *Mathematics at school*, № 3, pp. 77.

91. Vilenkin, N. Ya., Simonov, A. S. & Survillo G. S. 1992, “Program of 10–11 grades with a humanitarian bias“, *New model of the school "Dialectics and Ecology Avangard, M .*, pp. 248-251.

92. Simonov, A. S. 1997, “On mathematical models of economics in the school course of mathematics“, *Mathematics at school*, № 5, pp. 72-75.

93. Simonov, A. S. 1998, “Safety parabola“, *Mathematics at school*, № 1. pp. 83-90.

94. Simonov, A. S. 1998, “Some applications of geometric progression in economics“, *Mathematics at school*, № 3, pp. 27-37.

95. Simonov, A. S. 1998, “Interest and banking calculations“, *Mathematics at school*, № 4, pp. 37-45.

96. Simonov, A. S. 1998, “Compound interest“, *Mathematics at school*, № 5, pp. 30-42.

97. Simonov, A. S. 1998, “Today’s cost of tomorrow’s payments“, *Mathematics at school*, № 6, pp. 34-37.

98. Simonov, A. S. 1999, “On one way of introducing the concept of a derivative“, *Mathematics at school*, № 4, pp. 56-63.

99. Simonov, A. S. 2001. “Do not throw out the child with the water“, *Mathematics at school*, № 3, pp. 62-64.

100. Simonov, A. S. & Inyutina, E. V. 2001, “Geometric progression in economics“, *Mathematics at school*, № 5, pp. 17-21.

101. Simonov, A. S. & Ignatieva, N. I. 2001, “On one application of the concept "Derivative"to the solution of economic problems“, *Mathematics at school*, № 9, pp. 43-52.

102. Simonov, A. S. & Survillo, G. S. 2002, “Planning and tests for grades 8–9 with advanced study of mathematics“, *Mathematics at school*, № 7.

103. Vilenkin, N. Ya., Simonov, A. S. & Survillo, G. S. 1992, “Algebra–10. For advanced study classes. Part 1 / (textbook, manual, printed on the basis of the decision of the board of the Ministry of Education of the Republic of Khakassia)“, *Nauka, Novosibirsk*, 81 p.

104. Vilenkin, N. Ya. & Simonov, A. S. 1992, "Mathematical analysis of functions of several variables. In 3 parts. Part 1. Basic structures of mathematical analysis", *Alpha, Moscow*, 58 p.

105. Vilenkin, N. Ya. & Simonov, A. S. 1992, "Mathematical analysis of functions of several variables. In 3 parts. Part 2. Differential calculus of functions of several variables", *Alpha, Moscow*, 79 p.

106. Vilenkin, N. Ya. & Simonov, A. S. 1992, "Mathematical analysis of functions of several variables. In 3 parts. Part 3. Integral calculus of functions of several variables", *Alpha, Moscow*, 87 p.

107. Vilenkin, N. Ya., Simonov, A. S. & Survillo, G. S. 1993, "Algebra–10. For advanced liberal arts classes. Part II / Ministry of Education of the Russian Federation, Abakan state. ped. in-t them. N.F. Katanov", *Editorial office of the publishing department of the A.I. N.F. Katanova, Abakan*, 165 p.

108. Vilenkin, N. Ya., Simonov, A. S. , Survillo, G. S. & Kudryavtsev, A. I. 1996, "Algebra–9: A textbook for students in schools and classes with advanced study of mathematics. / Recommended by the Main Directorate for the Development of General Secondary Education of the Ministry of Education of the Russian Federation. Included in the federal textbook package", *Education, Moscow*, 384 p.

109. Simonov, A. S. 1999, "Economics in Mathematics Lessons: Textbook (recommended by the Ministry of Education of the Russian Federation)", *School–Press, M .*

110. Vilenkin, N. Ya., Simonov, A. S. , Survillo, G. S. & Kudryavtsev, A. I. 2011, "Algebra–9. A textbook for grade 9 students with an in-depth study of mathematics, Recommended by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation", *Education, Moscow*, Issue 8.

111. Chernov, V. M. 1959, "Limit relations for some integral transformations", *Uch. app. Correspondence ped. in-t., M.*, № 3, pp. 103-143.

112. Chernov, V. M. 1961, "Some limit relations for the two-sided Laplace transform and their applications", *Izv. universities. Mathematics*, № 4, pp. 125-136.

113. Chernov, V. M. 1962, "Some properties of the two-sided two-dimensional Laplace transform", *Izv. universities. Mathematics*, № 5, pp. 115-127.

114. Chernov, V. M. 1963, "Some questions of operational calculus based on the two-sided two-dimensional Laplace - Carson transform", *Izv. universities. Mathematics*, № 2, pp. 140-151.

115. Chernov, V. M. 1965, "Asymptotic properties of the two-dimensional Laplace transform", *Izv. universities. Mathematics*, № 1, pp. 158-167.

116. Vasin, L. A., Gorodnichev, S. V. & Lutsenko, A. G. 2013, "Formation of a portfolio of orders in the absence of uncertainty", *Bulletin of the Tula State University. Economic and legal sciences*, no. 3, pp. 3-11.

117. Lutsenko, A. G. 2006, "Control elements (controls) in the MMathcad system as an instrumental basis for the development of controlled visual teaching aids and their use in the educational process", *Bulletin of the Tula State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science,*. V. 12. No. 5. P. 173.

118. Lutsenko, A. G. 2006, "Computer modeling in teaching mathematics to future economists", *Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Series: Informatics and informatization of education*, no. 7, pp. 121.

119. Lutsenko, A. G. 2005, “Experience of using the Mathcad 11 system in teaching higher mathematics“, *Mathematics in higher education*, no. 3, pp. 53-64.

120. Lutsenko, A. G. 2004, “Guided visual teaching aids in mathematical analysis“, *Pedagogical informatics*, no. 4, pp. 67-74.

121. Lutsenko, A. G. 1985, “On injective Boolean spaces“, *Uspekhi Mat. sciences*, v. 40, no. 4, pp. 219.

122. Lutsenko, A. G. 1982, “On retracts DT“, *Mathematical Notes*, v. 31, no. 3, pp. 433.

123. Denisov, I. V. 1982, “Asymptotic solution of an irregularly singular equation in a Banach space“, *Uspekhi Mat. sciences*, vol. 37, no. 5, pp. 181-182.

124. Denisov, I. V. 1982, “On the number of cuts for a singular equation“, *Approximate methods for the study of differential equations and their applications: Collection of scientific papers, KSU, Kuibyshev*, pp. 45-46.

125. Denisov, I. V. 1982, “On the asymptotic solution of differential equations in a Banach space, unsolved with respect to the derivative“, *Computational mathematics and mathematical physics: Collection of scientific papers, Moscow State Pedagogical Institute named after V. I. Lenin, M .*, pp. 77-84.

126. Denisov, I. V. 1985, “Differential equations with a finite meromorphic operator coefficient in a Banach space“, *Dokl. AN SSSR*, vol. 282, no. 6, pp. 1289-1293.

127. Denisov, I. V. 1991, “On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle“, *Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of scientific works, Ilim, Bishkek*, pp. 37.

128. Denisov, I. V. 1995, “Quasilinear singularly perturbed elliptic equations in a rectangle“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 35, no. 11, pp. 1341-1350.

129. Denisov, I. V. 1996, “On asymptotic solutions of singularly perturbed parabolic equations with nonlinearities“, *Theory and applications of small parameter methods: Collection of scientific works, OIAE, Obninsk*, pp. 32.

130. Denisov, I. V. 1996, “A boundary - value problem for a quasilinear singularly perturbed parabolic equation in a rectangle“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 36, no. 10, pp. 1367-1380.

131. Denisov, I. V. 1996, “An estimate of the residual term in the asymptotic form of the solution of a boundary-value problem“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 36, no. 12, pp. 1693-1696.

132. Denisov, I. V. 1998, “The first boundary value problem for a linear parabolic equation in space“, *Differential Equations*, v. 34, no. 12, pp. 1620-1628.

133. Denisov, I. V. 1999, “The problem of finding the dominant term of the corner part of the asymptotics of the solution to a singularly perturbed elliptic equation with a nonlinearity“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 39, no. 5, pp. 747-759.

134. Denisov, I. V. 2000, “On the classes of functions defined by functional inequalities“, *Bulletin of the Tula State University. Series “Mathematics. Mechanics. Computer science"*, vol. 6, no. 1, pp. 79-84.

135. Denisov, I. V. 2001, “The corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic equations“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 41, No. 3, P. 362-378.

136. Denisov, I. V. 2004, “The corner boundary layer in nonmonotone singularly perturbed boundary value problems with nonlinearities“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 44, No. 9, P. 1592-1610.

137. Denisov, I. V. 2008, “Corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic problems“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 48, No. 1, P. 59-75.

138. Denisov, I. V. 2009, “On some classes of functions“, *Chebyshev collection*, v. X, no. 2 (30), P. 79-108.

139. Denisov, I. V., Denisova, T. Yu. & Rodionov, A. V. 2012, “Angular boundary layer in nonlinear singularly perturbed parabolic equations“, *Chebyshevskii sbornik*, v. 13, no. 3 (43), P. 28-46.

140. Butuzov, V. F. & Denisov, I. V. 2014, “Corner Boundary Layer in Nonlinear Elliptic Problems Containing First Order Derivatives“, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 48, No. 7, P. 459-477.

141. Denisov, I. V. 2017, “Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 57, № 2, P. 253-271.

142. Denisov, I. V. 2018, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 58, № 4, P. 562-571.

143. Denisov, I. V. & Denisov, A. I. 2019, “Mathematical models of combustion processes“, *Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Published by the Russian Academy of Natural Sciences*, Vol. 19, No. 2, P. 64-66.

144. Denisov, I. V. & Denisov, A. I. 2019, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 59, № 1, P. 96-111.

145. Denisov, I. V. & Denisov, A. I. 2019, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 59, № 9, P. 1518-1527.

146. Denisov, I. V. &Dobrovolsky, N. M. 2019, “Life and scientific activity of Albert Rubenovich Yesayan“, *Chebyshev collection*, Vol. 20, No. 1 (69), P. 432-436.

147. Denisov, I. V. & Denisov, A. I. 2020, “Mathematical models of combustion processes“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Series Contemporary mathematics and its applications. Thematic reviews. VINITI RAN*, Vol. 185, pp. 82-88.

148. Denisov, I. V. 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 61, № 2, pp. 242-253.

149. Denisov, I. V. 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points“, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 61, № . 11, pp. 1855-1863.

150. Levina, S. N. 1957, “On the solution of the equation of oscillations on the entire axis of time“, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, Vol. 114, No. 6, pp. 18-20.

151. Levina, S. N. 1960, “Operator solution of some problems of mathematical physics on the whole time axis“, *Uch. app. Ped. institute, Tula*, No. 7, pp. 113-137.

152. Levina, S. N. 1965, “On one problem on the entire time axis“, *Volzh. mat. sb.*, No. 3, P. 207-210.

153. Efimova, N. S. 1960, “Double asymptotic expansions“, *Uch. app. Ped. institute, Tula*, No. 7, pp. 98-112.

154. Isaeva, L. V. 1965, “Solution of the Cauchy problem for the equation“, *Volzh. mat. sb.*, No. 3, pp. 289-295.

155. Antropova, V. I. 1954, “Mikhail Vasilievich Ostrogradsky“, *Bulletin of the Higher School*, No. 9, P. 49-50.

156. Antropova, V. I. 1955, “Public lectures on integral calculus M. V. Ostrogradsky“, *Proceedings of Ying-that history of natures. and tech.*, No. 5, P. 304-320.

157. Antropova, V. I. 1957, “On the history of M. V. Ostrogradskii's integral theorem“, *Proceedings of Ying-that history of natures. and tech.*, No. 17, P. 229-269.

158. Antropova, V. I. 1957, “On the works of Fourier, Ostrogradsky, and Poisson on heat conduction and liquids“, *Problems of the history of natural sciences. and tech.*, No. 3, pp. 49-61.

159. Antropova, V. I. 1958, “Notes. In the book "Ostrogradskiy M. V. Selected Works„‘, P. 484-495.

160. Antropova, V. I. 1959, “Comments (No. 51-103). In the book "Ostrogradskiy M. V. Complete collection of works 1“, *Kiev*, pp. 269-284.

161. Antropova, V. I. 1961, “Comments and notes to "Notes of integral calculus"of M. V. Ostrogradskiy. In the book «Mikhail Vasilievich Ostrogradsky, 1862–1962», *M.*, P. 253-263.

162. Antropova, V. I. 1963, “The first systematic courses in potential theory. On Sat. "Question. History Phys.-Math. N. "“, *M.*, P. 139-140.

163. Antropova, V. I. 1965, “Notes to the "Memoir on the Propagation of Heat Inside Solids"by M. V. Ostrogradskii“, *Istor.-Matem. research., M.*, No. 16, P. 97-126.

164. Antropova, V. I. 1966, “On the geometric method of "Mathematical principles of natural philosophy"I. Newton“, *Istor.-Matem. research., M.*, No. 17, P. 205-228.

165. Rybakov, V. I. 2007, “Asplund Space: Another Criterion“, *Math. Notes*, 82: 1, 104-109.

166. Rybakov, V. I. 2004, “Banach Spaces with the PC Property“, *Math. Notes*, 76: 4, 525-533.

167. Rybakov, V. I. 2003, “Yet Another Class of Namioka Spaces“, *Math. Notes*, 73: 2, 244-248.

168. Rybakov, V. I. 1996, “Pettis integrability of Stone transforms“, *Math. Notes*, 60: 2, 175-185.

169. Rybakov, V. I. 1996, “On convergence on the boundary of the unit ball in dual space“, *Math. Notes*, 59: 5, 543-546.

170. Rybakov, V. I. 1993, “On resultant-preserving functionals“, *Math. Notes*, 54: 1, 710-712.

171. Rybakov, V. I. 1984, "A certain refinement of a theorem of Namioka and m-admissible sets", *Math. Notes*, 35: 4, 316-323.

172. Rybakov, V. I. 1983, "Banach spaces with k- and m-admissible sets", *Math. Notes*, 33: 1, 25-32.

173. Rybakov, V. I. 1978, "Universal measurability of the identity mapping of a Banach space in certain topologies", *Math. Notes*, 23: 2, 164-168.

174. Rybakov, V. I. 1977, "Certain properties of measures on a normed space possessing the property RN", *Math. Notes*, 21: 1, 45-50.

175. Rybakov, V. I. 1975, "Certain cases of the reduction of the study of weakly integrable functions to the study of Pettis-integrable functions, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 19:11, 84-86.

176. Rybakov, V. I. 1975, "A generalization of the Bochner integral to locally convex spaces", *Math. Notes*, 18: 4, 933-938.

177. Rybakov, V. I. 1975, "The separation from a vector measure of the part representable by a Bochner integral", *Math. Notes*, 17: 5, 476-482.

178. Rybakov, V. I. 1973, "Vector measures with values in locally convex spaces", *Funct. Anal. Appl.*, 7: 4, 339-340.

179. Rybakov, V. I. 1971, "On conditional mathematical expectations for functions integrable in the Pettis sense", *Math. Notes*, 10: 5, 764-767.

180. Rybakov, V. I. 1970, "Theorem of Bartle, Dunford, and Schwartz concerning vector measures", *Math. Notes*, 7: 2, 147-151.

181. Rybakov, V. I. 1968, "The Radon – Nikodym theorem and the representation of vector measures by an integral", *Dokl. AN SSSR*, 180: 2, 282-285.

182. Rybakov, V. I. 1968, "On vector measures", *Izv. universities. Mat.*, 12, 92-101.

183. Manokhin, E. V. 1991, "On K-locally uniformly convex spaces", *Izvestiya Vuzov. Math.*, No. 5, P. 32-34.

184. Manokhin, E. V. 1998, "T-weakly locally uniform convexity in Banach spaces", *Izvestiya Vuzov. Math.*, No. 1. P. 51-54.

185. Dobrovolsky, N. M. & "Manokhin, E. V. 1998, Banach spaces of a periodic function", *Izv. TulSU. Ser. Mechanics. Math. Informatics. Tula*, V.4, No. 3, P. 56-67.

186. Manokhin, E. V. 2003, "Banach matrices", *Izv. TulSU. Ser. Mechanics. Math. Informatics, Tula*, v.9, No. 1, P. 129-141.

187. Manokhin, E. V. 2008, "Some sets in and Young's constant", *Chebyshev collection, Publishing house of TSPU im. L. N. Tolstoy, Tula*, v. 9, No. 1, P. 144-147.

188. Shulyupov, V. A. 1995, "Differential equations describing a closed system containing a term with hysteron", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 50, No. 2, P. 23-27.

189. Shulyupov, V. A. 1995, "Differential equations describing a closed system containing a link with a hysteron", *Differential Equations*, No. 5, P. 914.

190. Dobrovolsky, N. M., Yesayan, A. R. & Shulyupov, V. A. 1999, "Factorial and recursion", *Izv. Tool. state un. Math. Mechanics. Informatics. TulSU, Tula*, Vol. 5, No. 1, P. 100-113.

191. Shulyupov, V. A. 2012, “Possible view of a separate semi-trajectory of a two-dimensional autonomous closed-loop system containing a link with a hysteron“, *Information technologies, innovations, investments, mathematical methods and models. Interuniversity collection of scientific papers, Tula*, P. 177-181.

192. Shulyupov, V. A. 2012, “Qualitative study of a two-dimensional system containing a link with hysterone“, *Publishing house of TSPU im. L.N. Tolstoy, Tula*, 92 p.

193. Yesayan, A. R., Chubarikov, V. N., Dobrovolsky, N. M. & Shulyupov, V. A. 2010, “Programming in Mathcad by examples“, *Publishing house TSPU, Tula*, 330 p.

194. Isaeva, N. M. & Subbotina, T. I. 2001, “Mathematical modeling of the relationship between total and direct bilirubin for some liver diseases“, *Bulletin of new medical technologies, Publishing house of TulSU, Tula*, Vol. IX, No. 1, pp. 34-36.

195. Isaeva, N. M., T. I. Subbotina, & A. A. Yashin. 2006, “Lithogenic properties of bile and the "golden section„‘, *Bulletin of new medical technologies, Publishing house of TulSU, Tula*, Vol. XIII, No. 4, P. 175-177.

196. Isaeva, N. M., Subbotina, T. I., Khadartsev, A. A. & Yashin, A. A. 2007, “Fibonacci code and the "golden ratio"in experimental pathophysiology and electromagnetobiology“, *State Unitary Enterprise NII NMT, NITs "Matrix". Moscow–Tula–Tver: Triada Publishing House.*

197. Isaeva, N. M., Kurotchenko, S. P., Savin, E. I., Subbotina, T. I. & Yashin, A. A. 2009, “"Golden section"as a criterion for the severity of pathomorphological changes when the body is exposed to rotating and pulsed running magnetic fields“, *Bulletin of new medical technologies, Publishing house of TulSU, Tula*, Vol. . XVI, No. 3, P. 38-39.

198. Isaeva, N. M., Ivanov, V. B., Savin, E. I., Subbotina,T. I., Yashin, A. A. & Khasaya, D. A. 2011, “Investigation of the activity of regulation of the aggregate state of blood when exposed to the body of electromagnetic radiation from the standpoint of the "golden section„‘, *Bulletin of new medical technologies, Publishing house of TulSU, Tula*, Vol. XVIII, No. 4, P. 30-32.

199. Isaeva, N. M., Kupeev, V. G., Savin, E. I., Subbotina, T. I. & Yashin, A. A. 2011, “Application of correlation-regression analysis to study the activity of free-radical processes under the influence of electromagnetic radiation, the introduction of phytomelanin and stem cells“, *Bulletin of new medical technologies, Publishing house of TulSU, Tula*, Vol. XVIII, No. 4, P. 48-50.

Получено 16.07.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 669.111.31 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-307-314

Особенности распада цементита заэвтектоидных углеродистых сталей в различных условиях и состояниях[1]

А. В. Маляров, И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын

Маляров Андрей Викторович — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: vascko.andr@yandex.ru
Минаев Игорь Васильевич — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Калинин Антон Алексеевич — Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: antony-ak@mail.ru
Бреки Александр Джалюльевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).
e-mail: albreki@yandex.ru
Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В данной работе приведены результаты исследования распада фазы Fe3C при термоциклировании вблизи температуры фазового перехода II-го рода, составляющей 210 ℃ (точка Кюри цементита). В результате проведенных исследований установлено, что распаду, прежде всего, подвержен структурно свободный цементит третичный, присутствующий в малоуглеродистых сталях. В заэвтектоидных и эвтектоидной сталях цементит как самостоятельная фаза может присутствовать в составе зернистого перлита. Выявлено, что в структуре стали У10 с исходным состоянием зернистого перлита максимальная объемная доля (около 0,8

Ключевые слова: термоциклическая обработка, графитовые включения, цементит, перлит, углеродистые стали.

Библиография: 13 названий.

[1]Со стороны СПбПУ Петра Великого исследования выполнены в рамках Программы Минобрнауки России «Научный центр мирового уровня» № 075-15-2020-934 , со стороны ИПМаш РАН - в рамках государственного задания № АААА-А18-118012190023-2.

Для цитирования:
А. В. Маляров, И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, А. А. Калинин, А. Д. Breки, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын Особенности распада цементита заэвтектоидных углеродистых сталей в различных условиях и состояниях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 307–314.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 669.111.31 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-307-314

Features of the decay of cementite of hypereutectoid carbon steels under various conditions and conditions

A. V. Malyarov, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, A. A. Kalinin, A. D. Breki, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn

Malyarov Andrey Viktorovich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: vascko.andr@yandex.ru
Minaev Igor Vasilyevich — Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Kalinin Anton Alekseevich — Tula state University (Tula).
e-mail: antony-ak@mail.ru
Breki Alexander Dzhalyulevich — candidate of technical sciences, associate professor, Saint-Petersburg Polytechnic University of Peter the Great; Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences (Saint-Peterburg).
e-mail: albreki@yandex.ru
Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian state University of Justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

This paper presents the results of a study of the decay of the Fe3C phase during thermal cycling near the temperature of the phase transition of the second kind, which is 210 ℃ (Curie point of cementite). As a result of the conducted studies, it was found that structurally free tertiary cementite, present in low-carbon steels, is primarily susceptible to decay. In pre-eutectoid and eutectoid steels, cementite as an independent phase may be present in the composition of granular perlite. It was revealed that in the structure of steel U10 with the initial state of granular perlite, the maximum volume fraction (about 0,8

Keywords: thermocyclic treatment, graphite inclusions, cementite, perlite, carbon steels.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
A. V. Malyarov, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, A. A. Kalinin, A. D. Breki, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn, 2021, "Features of the decay of cementite of hypereutectoid carbon steels under various conditions and conditions" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 307–314.

1. Основной текст статьи

Рассмотрены актуальные вопросы фазовых переходов I и II рода, связывающих превращение соединение Fe3C в графит при термоциклировании в окрестности точки Кюри цементита, которые имеют определенные теоретическое и прикладное значение. Представлены публикации, в которых нашли отражение результаты полученных научных исследований.

Химическое соединение — цементит является основной упрочняющей фазой в структуре углеродистых сталей и различных сплавов на основе железа. В различных условиях и состояниях цементит является неустойчивой фазой и может превращаться в графитную фазу в различных температурных условиях, что может найти широкое применение в промышленности. Данный вопрос вызывал интерес у многих представителей исторических научных металловедческих школ. Этому вопросу посвящены исследования Д.К. Чернова, А.А. Бочвара, П.П. Аносова, А.П. Гуляева, М.Х. Шоршорова, В.М. Счастливцева, А.Г. Колмакова, Ю.М. Лохтина и др. В данной работе приведены результаты исследования распада фазы Fe3C при термоциклировании вблизи температуры фазового перехода II-го рода, составляющей 210°C (точка Кюри цементита). В результате проведенных исследований установлено, что распаду, прежде всего, подвержен структурно свободный цементит третичный, присутствующий в малоуглеродистых сталях. В заэвтектоидных и эвтектоидной сталях цементит как самостоятельная фаза может присутствовать в составе зернистого перлита.

Исследована сталь марки У10 с разным исходным состоянием. ТЦО проводили по температурному режиму 200 – 100°C. Образцы предварительно покрывали защитной обмазкой.

Первый образец стали марки У10 имел исходную структуру пластинчатого перлита и $Ц_{II}$ (рисунок 1). Общее количество циклов составило — 35.

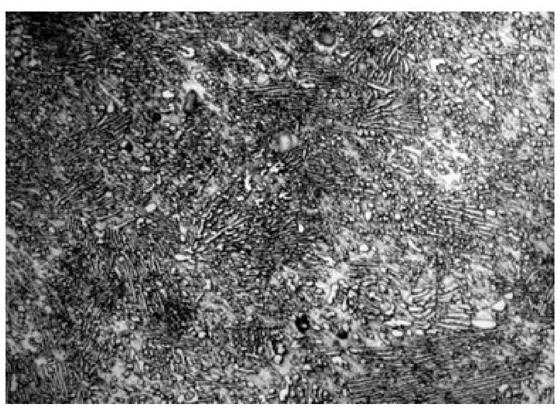

Рис. 1: Микроструктура стали марки У10 с исходным состоянием пластинчатого перлита и $Ц_{II}$, ×1000 [1]

После тридцати пяти циклов структура стали марки У10 практически не изменилась — пластинчатый перлит и $Ц_{II}$ (рисунок 2). Такую же картину имеем в исследуемой нами стали марки У12. Обнаружены только отдельные темные включения в перлитных зернах.

Второй образец стали марки У10 имел исходную структуру зернистого перлита (рисунок 3). Общее количество циклов составило — 35. В этом случае отмечено появление графитных включений (рисунок 4). Включения расположены равномерно по поверхности шлифа.

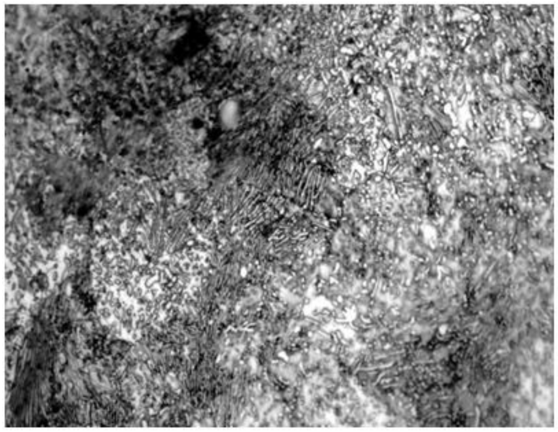

Рис. 2: Микроструктура стали марки У10 с исходным состоянием пластинчатого перлита и $Ц_{II}$ после 35 циклов, ×1000 [1]

Рис. 3: Микроструктура стали марки У10 с исходным состоянием зернистого перлита, ×1000 [1]

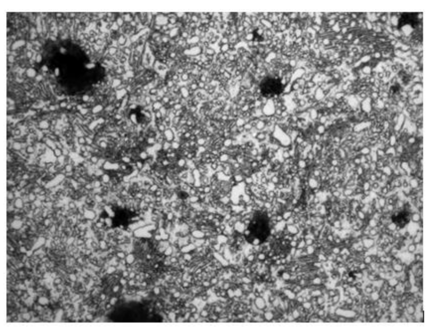

Рис. 4: Микроструктура стали марки У10 с исходным состоянием зернистого перлита после 35 циклов, ×1000 [1]

Таким образом, рассматривая стали с различными исходными состояниями, можно говорить о том, что исходное состояние существенно влияет на образование графита.

Объединим результаты ТЦО, полученные по всему спектру сталей с повышенным содержанием углерода со структурой зернистого перлита (таблица, рисунок 4).

Таблица 1: Параметры включений графита, полученного для различных сталей в процессе ТЦО

Марка стали	Объемная доля графита, %	Средний размер, мкм	Фактор формы
У8А	0,042	3,201	0,754
У10	0,758	7,629	0,482
У12	0,071	5,342	0,783

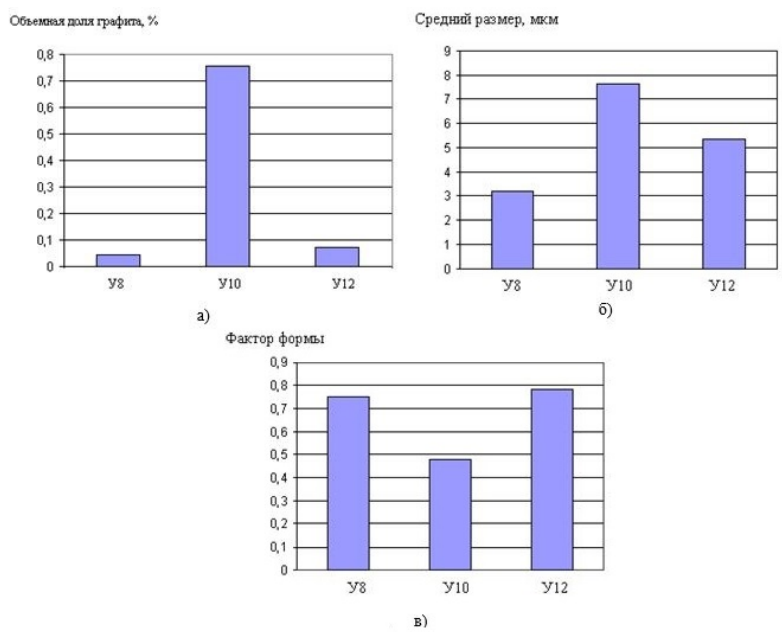

Рис. 5: Параметры включений графита эвтектоидной и заэвтектоидной стали: а — объемная доля; б — средний размер; в — фактор формы [1]

Таким образом, анализируя полученные данные, можно говорить о том, что максимальные объемная доля и средний размер графитовых включений наблюдается в стали марки У10 (рисунок 5 а, б). В отличие от ранее исследуемых доэвтектоидных сталей форма графитовых включений имеет хлопьевидный характер.

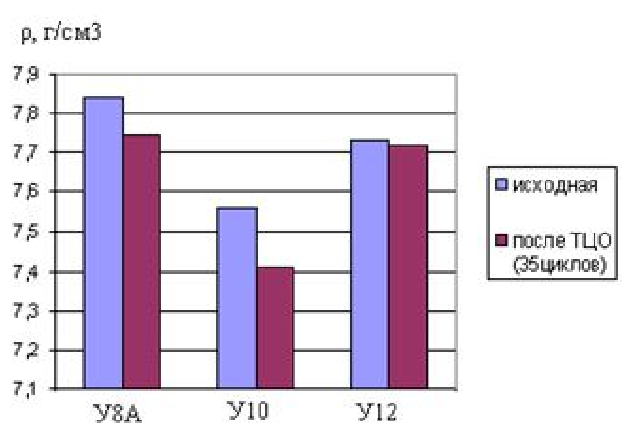

Рис. 6: Изменение плотности в заэвтектоидных сталей У8А, У10, У12 [1]

Итак, распадаться, способен только структурно свободный цементит (либо $Ц_{III}$ в доэвтектоидных сталях, либо присутствующий в виде зернистого перлита в сталях с повышенным содержанием углерода). Как и в рассмотренных ранее случаях, появление графита приводит к падению плотности образца (рисунок 6).

Несоответствие данных микроскопического анализа и результатов определения объемной доли графита по уменьшению плотности обусловлено спецификой использованных методик.

Полученные результаты опубликованы в отечественных и зарубежных изданиях [1]-[13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Структурные и фазовые превращения углеродистых сталей в различных условиях и состояниях: монография: 2-е изд., испр. и доп. / А. В. Маляров, А. Е. Гвоздев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова.; под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2020. — 278 с.

2. Распад цементита углеродистых сталей при термоциклировании / О. В. Кузовлева, И. В. Тихонова, Н. Е. Стариков, А. Е. Гвоздев // Производства проката. 2008. № 8. С. 36-37.

3. Влияние температурного диапазона термоциклической обработки на распад цементита в углеродистых сталях / И. В. Тихонова, А. В. Маляров, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков // Заготовительные производства в машиностроении. 2010. № 10. С. 39-41.

4. Гетерогенное зарождение графита в углеродистых сталях при распаде цементита в процессе ТЦО вблизи точки А0 / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. В. Маляров, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Материаловедение. 2013. № 10. С. 48-52.

5. Влияние элементов графитизаторов на распад цементита при термоциклической обработке вблизи А0 углеродистых сталей / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. В. Маляров, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Материаловедение. 2013. № 11. С. 43-45.

6. Гвоздев А. Е. Условия проявления нестабильности цементита при термоциклировании углеродистых сталей / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. В. Маляров, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, М. Е. Пруцков // Материаловедение. 2014. № 10. С. 31-36.

7. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах /А. Е. Гвоздев // Монография. 2019. С. 476.

8. Breki A. D. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces / A. D. Breki, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. — 2017. — Т. 8. — № 4. — С. 509-514.

9. Вариант определения максимального пластического упрочнения в инструментальных сталях / Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. Е. Чеглов, Н. Н. Сергеев, О. М. Губанов // Сталь. — 2017. — № 6. — С. 26-39.

10. Многоуровневый подход к проблеме замедленного разрушения высокопрочных конструкционных сталей под действием водорода/ В. П. Баранов, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Н. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов// Материаловедение. — 2017. — № 7. — С. 11-22.

11. Триботехнические свойства композиционного материала «алюминий-углеродные нановолокна» при трении по сталям 12Х1 И ШХ15 / А. Д. Бреки, Т. С. Кольцова, А. Н. Скворцова, О. В. Толочко, С. Е. Александров, А. Г. Колмаков, А. А. Лисенков, А. Е. Гвоздев, Ю. А. Фадин, Д. А. Провоторов // Материаловедение. — 2017. — № 11. — С. 37-42.

12. Гвоздев А. Е., Журавлёв Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем // Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. — 382 с. ISBN 978-5-7679-4063-9.

13. Особенности работы, процессы упрочнения, структура, свойства и качество зубчатых колёс привода агрегатов двигателей внутреннего сгорания: монография / А. П. Навоев, А. А. Жуков, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев // Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 212 с. ISBN 978-5-7679-4086-8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Structural and phase transformations of carbon steels in various conditions and states: monograph: 2nd ed., Rev. and add. / A. B. Malyarov, A. E. Gvozdev, I. V. Minaev, I. V. Tikhonov .; ed. Dr. tech. Sciences, prof. A. E. Gvozdev. — Tula: Publishing house of TulSU, 2020. — 278 p.

2. The decomposition of cementite of carbon steels during thermal cycling / O. V. Kuzovleva, I. V. Tikhonova, N. E. Starikov, A. E. Gvozdev // Production of rolled products. 2008. No. 8. S. 36-37.

3. Influence of the temperature range of thermal cycling treatment on the decomposition of cementite in carbon steels / I. V. Tikhonova, A. V. Malyarov, A. E. Gvozdev, N. E. Starikov // Blank production in mechanical engineering. 2010. No. 10. S. 39-41.

4. Heterogeneous nucleation of graphite in carbon steels during the decomposition of cementite in the process of TCT near the point A0 / A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, A. V. Malyarov, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonov // Materials Science. 2013. No. 10. S. 48-52.

5. Influence of elements of graphitizers on the decomposition of cementite during thermal cycling treatment near A0 carbon steels / A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, A. V. Malyarov, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonov // Materials Science. 2013. No. 11. S. 43-45.

6. Gvozdev A. E. Conditions for the manifestation of cementite instability during thermal cycling of carbon steels / A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, A. V. Malyarov, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonova, M. E. Prutskov // Materials Science. 2014. No. 10. S. 31-36.

7. Extreme effects of strength and plasticity in high-alloy metal ingot and powder systems / A. E. Gvozdev // Monograph. 2019.S. 476.

8. Breki A. D. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces / A. D. Breki, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. — 2017. — T. 8. — No. 4. — S. 509-514.

9. Variant of determining the maximum plastic hardening in tool steels / G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, N. N. Sergeev, O. M. Gubanov // Steel. — 2017. — No. 6. — S. 26-39.

10. Multilevel approach to the problem of delayed fracture of high-strength structural steels under the influence of hydrogen / V. P. Baranov, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, N. N. Sergeev, A. N. Chukanov // Materials Science. — 2017. — No. 7. — S. 11-22.

11. Tribotechnical properties of the composite material "aluminum-carbon nanofibers"during friction against steels 12Kh1 and ShKh15 / A. D. Brecky, T. S. Koltsova, A. N. Skvortsova, O. V. Tolochko, S. E. Alexandrov, A. G. Kolmakov, A. A. Lisenkov, A. E. Gvozdev, Yu. A. Fadin, D. A. Provotorov // Materials Science. — 2017. — No. 11. — S. 37-42.

12. Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Kuzovleva O. V. Fundamentals of the formation of a state of high deformation capacity of metal systems // Tula: Publishing house of Tula State University, 2018 .– 382 p. ISBN 978-5-7679-4063-9.

13. Features of work, hardening processes, structure, properties and quality of gear wheels for drive units of internal combustion engines: monograph / A. P. Navoev, A. A. Zhukov, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev // Tula: Publishing house of Tula State University, 2019.212 p. ISBN 978-5-7679-4086-8.

Получено 03.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 51 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-315-327

Из истории кафедры «Математика и информатика»

Е. В. Манохин, Г. В. Кузнецов, С. В. Городничев, Р. А. Жуков, Н. О. Козлова

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Кузнецов Геннадий Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: GKuznetsov@fa.ru
Городничев Сергей Владимирович — кандидат технических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: SVGorodnichev@fa.ru
Жуков Роман Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: pluszh@mail.ru
Козлова Надежда Олеговна — кандидат технических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: 95kno@mail.ru

Аннотация

Авторы статьи ставили перед собой задачи: кратко рассказать о двадцатилетней истории кафедры «Математика и информатика» Тульского филиала Финуниверситета и, дать краткий анализ научной деятельности на кафедре, оказавшей влияние в Тульском регионе на развитие математики, информатики, математического и информационного образования. Преподаватели кафедры вели и ведут исследования в области экономико-математических методов и моделей, методики математики, использования информационных технологий в математике и обучении математике.

Кафедра «Математика и информатика» обеспечивает учебный процесс для всех направлений филиала в соответствии с перечнем аккредитованных образовательных программ и является выпускающей по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика».

Кафедра обеспечивает эффективное решение образовательных, учебно-педагогических, организационно-методических, научно-исследовательских и информационно-аналитических задач по повышению квалификации и подготовке специалистов в области теории и практики математики, информатики и математических методов в финансах, управлении. Направления деятельности кафедры формируются на основе стратегии развития федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации».

Научно-исследовательская работа осуществляется всеми преподавателями кафедры в рамках госбюджетной тематики и реализуется в участии в научных, научно-методических и научно-практических конференциях разных уровней от регионального до международного. Результаты отражаются во множестве публикаций, наиболее заметными из которых являются монографии и статьи в журналах. В статье приводится список избранных публикаций, содержащих результаты, полученные преподавателями кафедры в разные периоды ее 20-летней истории, в том числе результаты исследований за последние годы.

Ключевые слова: история математики, экономико-математические методы и модели, методика математики, использование информационных технологий в математике и обучении математике, математики города Тулы.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
Е. В. Манохин, Г. В. Кузнецов, С. В. Городничев, Р. А. Жуков, Н. О. Козлова. Из истории кафедры «математика и информатика» // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 315–327.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 51 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-315-327

From chair history «Mathematics and computer science»

E. V. Manokhin, G. V. Kuznetsov, S. V. Gorodnichev, R. A. Zhukov, N. O. Kozlova

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Kuznetsov Gennadiy Vasilievich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: GKuznetsov@fa.ru
Gorodnichev Sergey Vladimirovich — candidate of technical sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: SVGorodnichev@fa.ru
Zhukov Roman Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, docent, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: pluszh@mail.ru
Kozlova Nadezhda Olegovna — candidate of technical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: 95kno@mail.ru

Abstract

The authors of the article set themselves the following tasks: to briefly describe the twenty-year history of the Department of Mathematics and Informatics of the Tula branch of the Financial University and to give a brief analysis of the scientific activities at the department that influenced the development of mathematics, computer science, mathematical and information education in the Tula region. Teachers of the department conducted and continue to conduct research in the field of economic and mathematical methods and models, methods of mathematics, the use of information technologies in mathematics and teaching mathematics.

Research work is carried out by all teachers of chair within the limits of state budgetary subjects and realised in participation in scientific, scientifically-methodical and scientifically-practical conferences of different levels from regional to the international. Results are reflected in set of the publications most appreciable of which are monographies and articles in the largest magazines. The article presents the results obtained by the teachers of the department in different periods of its 20-year history, including the results of research in recent years.

Keywords: mathematics history, economic-mathematical methods and models, a mathematics technique, use of information technology in the mathematician and training to the mathematician, mathematicians of Tula.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
E. V. Manokhin, G. V. Kuznetsov, S. V. Gorodnichev, R. A. Zhukov, N. O. Kozlova, 2021, "From chair history «mathematics and computer science»" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 315–327.

Рис. 1: На фотографии (слева-направо) Луценко Алексей Георгиевич, Манохин Евгений Викторович, Кузнецов Геннадий Васильевич, Евсюков Владимир Васильевич, Ваньков Борис Петрович

1. Из истории Тульского филиала Финуниверситета

Тульский филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» был основан в 1958 году как учебно-консультативный пункт (УКП ВЗФЭИ).

Весной 1959 г. в Туле был открыт учебно-консультационный пункт (УКП) Всероссийского заочного финансово-экономического института, что было обусловлено нехваткой высококвалифицированных специалистов -экономистов на предприятиях г. Тулы и области. Первым заведующим Тульского УКП была А.А. Сошникова, которая вместе с небольшим коллективом одолела многие трудности по организации учебного процесса и созданию материальной базы УКП. В этот период УКП выпускал специалистов по специальностям: «Экономика промышленности», «Экономика труда», «Статистика», «Бухгалтерский учет», «Экономика и организация материально-технического снабжения» и т.д.

В июне 1966 г. Тульский УКП был преобразован в филиал ВЗФЭИ, который впоследствии стал Тульским филиалом Финуниверситета. С 1967 года директором филиала становится Б.П. Богданов. С 1975 по 1977 год филиалом руководит выпускник института, доцент кафедры бухгалтерского учета Н.Ф. Бердников. В 1977 году на должность директора пришел опытный организатор и ученый В.И. Малинин. В 90-ые годы в филиале началась подготовка экономистов высшей категории по качественно новым специальностям, в том числе «Финансы и кредит».

В 1997 году руководителем филиала становится доктор философских наук, профессор Ю.А. Северов. С этого момента в развитии филиала в г. Тула началась новая эра: поднявшая его на качественно новую ступень образовательного процесса. В 2000-е годы значительно окрепла и расширилась материально-техническая база института. За счет собственных средств была проведена реконструкция всего здания филиала, что позволило значительно улучшить условия учебно-воспитательного процесса, бытовые условия студентов и преподавателей. За счет реконструкции здания было увеличено число аудиторий в два раза, открыта столовая, гостиничный комплекс для студентов и преподавателей, оборудованы три компьютерных зала.

С апреля 2012 года по сентябрь 2013 года директор стала выпускница филиала 1979 года, кандидат экономических наук, доцент Прасолова Татьяна Николаевна.

30 мая 2012 года в результате реорганизации Всероссийского заочного финансово-экономического института в форме присоединения в качестве структурного подразделения к федеральному государственному образовательному бюджетному учреждению высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» на основании распоряжения Правительства Российской Федерации от 22 ноября 2011 г. № 2101-р «О реорганизации федерального образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», приказа Министерства образования и науки Российской Федерации от 12 декабря 2011 г. № 2821 «О реорганизации федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Всероссийский заочный финансово-экономический институт» - филиал был переименован в Тульский филиал федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации».

С сентября 2013 г. директором филиала является Кузнецов Геннадий Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент. В 2001 году в филиале были организованы кафедры: «Менеджмент и маркетинг», «Бухгалтерский учет, аудит и статистика», «Финансы и кредит» и «Философия, история и право», «Математика и информатика».

2. 20 лет кафедре «Математика и информатика»

Кафедра «Математика и информатика» образовалась как самостоятельное подразделение в феврале 2001 года. Первым заведующим кафедрой «Математика и информатика» стал к.ф.-м.н., доцент Шелобаев Сергей Иванович.

До 2001 года преподаватели кафедры входили в состав кафедр высшей математики, экономико-математических методов и моделей (ЭММиМ), автоматизированной обработки экономической информации (АОЭИ) Московского отделения ВЗФЭИ.

Важнейшей составляющей в системе фундаментального образования современного экономиста является базовая математическая подготовка. В Тульском филиале в первые годы его образования занятия по дисциплинам кафедры высшей математики проводили почасовики из других вузов г. Тулы или командированные преподаватели головного вуза. С 1965 г. в филиале приступила к работе профессор, к.э.н. Соловьева Евгения Григорьевна. 10 лет она проработала ответственным секретарем приемной комиссии филиала, с 2008 г. была зам. зав. кафедрой по учебно-методической и научной работе.

С 2005 г. по 2010 г. кафедрой руководил к.ф.-м.н., доцент Луценко Алексей Георгиевич, член-корр. Академии информатизации образования (АИО), почетный работник ВПО, автор научных и методических работ о применении современных информационных технологий в процессе обучения математике. В это время на кафедре трудились Юдин Сергей Владимирович - доктор т.н., доцент, член-корр. Академии качества, Арсеньев Юрий Николаевич - доктор т.н., профессор, член Международной академии науки и практики организации производства (МАОП), почетный работник ВПО.

Значительную поддержку кафедре во всех направлениях её деятельности оказывали преподаватели - штатные совместители - д.т.н., доцент Ядыкин Евгений Александрович (ТулГУ); к.ф.-м.н., доцент Ванькой Борис Петрович (ТГПУ им. Л.Н. Толстого). Отметим, что кафедра в процессе своей деятельности сотрудничает с Тульскими вузами, в том числе с ТулГУ и ТГПУ им. Л.Н. Толстого, особенно с кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, заведующий кафедрой: д.ф.-м.н., профессор Добровольский Николай Михайлович и математическим факультетом, декан: к.ф.-м.н., доцент Реброва Ирина Юрьевна. На кафедре вели занятия преподаватели ТГПУ и кафедры алгебры, математического анализа и геометрии д.ф.-м.н., доцент Добрынина Ирина Васильевна и д.ф.-м.н., профессор Денисов Игорь Васильевич. На кафедре работали также профессор ТулГУ, канд. техн. наук Кочетыгов А. А., профессор д.т.н. Андреев А.И., работает к.ф.-м.н., доцент Соболева Д.В.

Разумеется, наиважнейшей и определяющей составляющей является для нас сотрудничество с кафедрами и департаментами Финансового университета. Большое значение для кафедры имеет сотрудничество и помощь департамента «Бизнес-информатика» под руководством Алтуховой Натальи Фаридовны, с Факультетом информационных технологий и анализа больших данных под руководством декана факультета доктора экономических наук, профессора Соловьева Владимира Игоревича, первым заместителем руководителя департамента анализа данных и машинного обучения Феклиным Вадимом Геннадьевичем, доцентом, к.э.н. Кремером Наумом Шевелевичем.

С 2000 г . в филиале работает Евсюков Владимир Васильевич, к.т.н., доцент; автор научных и методических работ, учебных пособий. В 2009 г. и 2010 г. на кафедру пришли опытные преподаватели – к.ф.-м.н., доцент Кузнецов Геннадий Васильевичи и к.ф.-м.н., доцент Манохин Евгений Викторович, которые приступили к чтению математических и экономико-математических дисциплин. С 2010 г. по 2013 г. кафедрой руководил к.ф.-м.н., доцент Кузнецов Геннадий Васильевич, член-корр. Академии медико-технических наук, автор научных и методических работ по дифференциальной геометрии и методике преподавания математики в высшей школе. С 2013 года Кузнецов Геннадий Васильевич – директор Тульского филиала Финуниверситета.

В настоящее время кафедрой руководит кандидат физико-математических наук, доцент Манохин Евгений Викторович, зам. зав. кафедрой является к.ф.-м.н., доцент Васина Марина Владимировна. Активное участие в делах кафедры принимают д.э.н., профессор Мелихов М.Б., к.ф.-м.н., доцент Жуков Р.А., к.т.н., ст. преподаватель Козлова Н.О., к.т.н., доцент Пышный А.И., к.т.н., доцент Шадский В.Г.

Кафедра «Математика и информатика» обеспечивает учебный процесс для всех направлений филиала в соответствии с перечнем аккредитованных образовательных программ и является выпускающей по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика».

Деятельность кафедры «Математика и информатика» осуществляется в соответствии с Положением о кафедре Финансового университета.

3. О некоторых ведущих преподавателях кафедры «Математика и информатика» Тульского филиала Финуниверситета в 2001 -2021 гг

Шелобаев Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доктор экономических наук. В 2002 г. Сергей Иванович защитил докторскую диссертацию по специальности: «Математические и инструментальные методы экономики». Предметом исследования являются процессы управления финансово-экономической деятельностью субъектов рынка на основе применения комплекса экономико-математических, логических и теоретико-множественных моделей, алгоритмов и программ. В качестве объекта исследования в диссертации выступают производственные предприятия всех форм собственности, инвестиционно-финансовые и другие институты региона, а также вузы и образовательные учреждения. Теоретическую и методологическую базу исследования составляет системный подход к процессу моделирования сложных социо- и техно-экономических систем. Решение поставленных в диссертации задач потребовало применения теории и методов гибридного интеллекта, аппарата теории множеств, теории графов, теории надежности, методов вычислительной математики, математического программирования, имитационного моделирования, системного анализа, теории систем, менеджмента качества, а также широкого использования аппарата четкой и нечеткой логики, вероятностных и статистических методов.

С 2006 года доктор экономических наук Шелобаев Сергей Иванович начал работать в Федеральной налоговой службе, применяя огромный научный багаж в практической деятельности. За время работы опубликовано более 200 научных работы, включая 7 монографий и 8 учебных пособий, в том числе ([1], [2]).

Юдин Сергей Владимирович, доктор технических наук, доцент. Член-корреспондент Академии качества. В 2005-2006 году Юдин С.В. вел работу по гранту РФФИ «Теоретические основы управления качеством программного обеспечения», в 2008 г. под его редакцией вышла коллективная монография кафедры [3].

Вопросами организация учета, анализа и аудита основных средств занималась **Соловьева Евгения Григорьевна**, к.э.н., профессор [4]. В работах **Арсеньева Юрия Николаевича** – д.т.н., профессора, почетного работника высшей школы РФ рассматриваются проблемы функционирования и развития сфер экономики и образования, качества принятия управленческих решений на основе новых методов и моделей, интеллектуальных систем и технологий, отвечающих требуемым критериям оптимизации. Приводятся общие методологические подходы, методы и модели управления интеллектуальным потенциалом, обучением и подготовкой компетентных профессионалов с применением менеджмента качества и информационных технологий. Даны практические рекомендации по разработке и выбору управленческих решений в сфере обучения кадров, оценке эффективности их реализации по комплексу требований (см, например [5]).

Вопросами широкого применения математического моделирования объектов и процессов в пищевых производствах, представлением технологических операций в виде неслучайных функций случайных величин занимался **Ядыкин Евгений Александрович**, д.т.н., доцент (см, например [6]). Имел следующие звания и награды: почетный работник высшего профессионального образования РФ, лауреат премии Правительства в области науки и техники, дважды лауреат премии им. С.И. Мосина, действительный член Академии проблем качества.

С мая 2012 г. по настоящее время работает на должности доцента кафедры «Математика и информатика» Тульского филиала Финуниверситета **Евсюков Владимир Васильевич**, к.т.н., доцент.

В 2013 г. в издательстве ЮНИТИ-ДАНА (г. Москва) вышли учебник «Информационные системы в экономике» и в серии «Золотой фонд российских учебников» учебник «Информационные системы и технологии управления» для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», подготовленные авторским коллективом под редакцией проф. Г.А. Титоренко. В учебниках подготовил по одной главе ([7], [8], [9]). Ведет научно-исследовательскую работу по направлению применения информационных технологий в финансовом менеджменте, автор научных и методических работ, учебных пособий.

Луценко Алексей Георгиевич, к.ф.-м.н., доцент, с 2005 г. по 2010 г. заведующий кафедрой. Окончил математический факультет ТГПИ им. Л.Н. Толстого (ныне ТГПУ) в 1972 г. и аспирантуру по кафедре математического анализа МГПИ им. В.И. Ленина (ныне МПГУ) в 1976 г. Защитил кандидатскую диссертацию на тему «Инъективные булевы пространства» в 1984 г. Затем научные интересы перешли в область методики математики, использования информационных технологий в математике и обучении математике [10]. В 2001 г. награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации». Автор более 100 опубликованных научных и методических работ. В 2006 г. избран членом-корреспондентом Академии информатизации образования (АИО).

Кузнецов Геннадий Васильевич, к.ф.-м.н., доцент, с 2010 г. по 2013 г. заведующий кафедрой, с 2013 г. директор Тульского филиала Финуниверситета. Окончил математический факультет ТГПИ им. Л.Н. Толстого (ныне ТГПУ) в 1983 г. Работал в школе. Педагогическую деятельность в Вузах начал с 1985 г. в Тульском государственном педагогическом институте им. Л.Н. Толстого. С 01 сентября 2009 г. работал на должности доцента кафедры «Математика и информатика» Тульского филиала ВЗФЭИ. С 01 декабря 2010 г. по 16 сентября 2013 г. работал на должности заведующего кафедрой «Математика и информатика». С 17 сентября 2013 г. по настоящее время работает на должности директора Тульского филиала Финуниверситета и доцента кафедры «Математика и информатика» (внутренний совместитель). В целях повышения качества усвоения содержания преподаваемых дисциплин и приобретения студентами навыков самостоятельного мышления им опубликованы учебно-методические пособия ([11],[12],[13]). Г.В. Кузнецов ведет активную научно-исследовательскую работу, принимал участие в исследованиях по теме «Инновационная экономика и образование региона: интеллект, моделирование, инвестиции». Автор более 126 опубликованных научных и методических работ (см., например, [14]-[17]). Приведем основные научные положения, сформулированные автором на основании проведенных исследований по теме «Математическое моделирование структурных параметров сердечно - сосудистой системы методами дифференциальных форм»:

Методы, алгоритмы и модели сердечно - сосудистой системы человека для анализа ее структурных параметров на основе математического аппарата дифференциальных форм.

Теоретически обоснован переход от параметров, характеризующих движение крови в сосуде, к параметрам движения крови в системе кровообращения.

Новые характеристики турбулентного движения крови при математическом моделировании структурных параметров сердечно - сосудистой системы позволяют диагностировать нарушения в системе кровообращения.

Модель ламинарного движения крови с использованием структурных характеристик траекторий движения частиц крови эффективна для ее применения в задачах исследовании движения крови в норме.

Алгоритмы управления процессами контроля состояния сердечно - сосудистой системы, для получения необходимой информации и проведения анализа структурных параметров.

Кузнецов Геннадий Васильевич является член-корреспондентом Академии медико-технических наук.

Манохин Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, с 2013 г. заведующий кафедрой. В 1986 г. окончил Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. Работал в ТГПУ им. Л.Н. Толстого. С июня 2010 г.– доцент кафедры «Математика и информатика». С 2013г. заведующий кафедрой «Математика и информатика» Тульского филиала Финуниверситета. Во время работы в Тульском государственном педагогическом институте им. Л.Н. Толстого Манохина Е.В. интересовали вопросы геометрии пространств Банаха (которые начал рассматривать еще студентом под руководством профессора В.И. Рыбакова, позже в аспирантуре под руководством профессора М.И. Кадеца), под руководством профессора Н.М. Добровольского занимался вопросами теоретико-числовых методов в приближенном анализе. В настоящее время научные интересы находятся в области методики математики, использования информационных технологий в математике и обучении математике, в истории математики, теории нечетких множеств и связаны с развитием экономико-математических методов и моделей, применительно к изучению социально-экономических систем (см., например, [18]-[22]).

Жуков Роман Александрович, к.ф.-м.н., доцент. На кафедре работает с 2014 года и ведет активную научную работу, связанную с развитием экономико-математических методов и моделей, применительно к изучению социально-экономических систем (см., например, [23]-[26]) в качестве научного сотрудника.

За последние 3 года научная деятельность сотрудников кафедры связана во многом с развитием экономико-математических методов и моделей, применительно к изучению социально-экономических систем (СЭС) и управлению ими, в том числе на региональном уровне, в рамках общеуниверситетской темы НИР Финансового университета «Новая парадигма общественного развития в условиях цифровой экономики», подтема «Системное моделирование межуровневых и внутриуровневых социально-экономических взаимодействий в структуре: «Индивид-общество-государство» (см. например [27],[28]). Так, в 2018 году в рамках гранта РФФИ и Правительства Тульской области была простроена модель функционирования регионов ЦФО и Тульской области, с помощью модели оказывается возможным оценивать результаты функционирования СЭС, и на основании такой оценки формировать обоснованные, количественно выраженные управленческие решения.

Разработана методология оценки результатов функционирования сложных систем, их подсистем и элементов, и которая позволяет проводить комплексный анализ состояния и функционирования СЭС с помощью специальной системы индикаторов. Индикаторы учитывают не только результаты функционирования СЭС, но и взаимосвязи между ее составляющими, их особенности, что отличает сконструированные частные (для элементов) и интегральные (для подсистем и СЭС в целом) индикаторы от аналогичных им показателей. При этом для расчета индикаторов используются модели функционирования элементов СЭС, представляющие собой производственные функции различной функциональной формы. Разработан метод оценки параметров агрегированной производственной функции для подсистем СЭС с использованием плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины.

На кафедре разработан метод оптимизации результатов функционирования сложных систем, базирующейся на сочетании метода DEA (Data Envelopment Analysis) и методе Лагранжа, позволяющий свести задачу поиска оптимальных факторов состояния и воздействия к общей задаче многокритериальной оптимизации, в том числе для иерархических СЭС.

На базе создаваемой лаборатории информатизации, системных исследований и социально-экономических измерений предполагается в дальнейшем развивать экономико-математические методы и модели, в том числе с использованием современных инструментальных средств поддержки принятия решений.

4. Заключение

Сегодня на кафедре и в филиале работает сплоченный коллектив единомышленников, способных решать самые сложные задачи современного этапа развития высшего образования в

России. Активно ведется научно-исследовательская работа, проводятся международные конференции, издаются монографии, сборники научных трудов, функционируют научные кружки, осуществляется связь с зарубежными партнерами. Ведется большая воспитательная работа со студентами, развито студенческое самоуправление.

Все это позволяет филиалу и кафедре готовить кадры высшей квалификации, востребованные на рынке труда, с высоким чувством гражданской ответственности. Более 17500 выпускников достойно представляли и представляют филиал в экономике, финансовой сфере, управлении, государственной службе. Достигнутое качество обучения на кафедре в соответствии с выделенными приоритетами развития подкреплено действующей и регулярно обновляемой системой требований к уровню подготовки и квалификации профессорско-преподавательского состава кафедры. Система многоуровневого отбора и оценки представленных претендентами на должности преподавателей учебных программ и курсов, а также методов и технологий обучения, позволяет руководству кафедры быть уверенным в собственной эффективности и конкурентоспособности, а также следованию выбранной миссии на рынке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шелобаев, С.И. Основы рекламного бизнеса: монография / С.И. Шелобаев, Г.Н. Васильев, В.А. Поляков. – Тула: Гриф и КО, 2001. – 385 с.

2. Шелобаев, С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе: учебное пособие. / С.И. Шелобаев. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 367 с.

3. Математические методы и информационные технологии обработки и использования экономической информации: Монография / Под. ред. С.В. Юдина. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. – 477с.

4. Организация учета, анализа и аудита основных средств: Учебно-практическое пособие. / Под. ред. Е.Г. Соловьевой – Тула: Изд-во «Левша», 2008. – 208 с.

5. Образование, экономика знаний и подготовка кадров: Монография. / Арсеньев Ю.Н., Давыдова Т.Ю. – М. – Тула: Изд-во ВЗФЭИ, ТулГУ, 2011. – 311 с.

6. Ядыкин Е.А. Управление качеством продукции пищевых производств на основе дискретно-аналитических математических моделей // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. Вып. 1. С. 456-464.

7. Информационные системы и технологии управления. Учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Менеджмент» и «Экономика», специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» /Титоренко Г.А., Коноплева И.А., Суворова В.И., Смирнов С.Е., Безрядина Г.Н., Одинцов Б.Е., Брага В.В., Кричевская О.Е., Евсюков В.В., Росс Г.В., Вдовенко Л.А., Лукасевич И.Я., Коняшина Г.Б., Казакова Е.Ф., Дудихин В.В. / Под редакцией Г.А. Титоренко. – Сер. Золотой фонд российских учебников (Третье издание, переработанное и дополненное). – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2013. – 592 с.

8. Информационные системы и технологии управления. Учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Менеджмент» и «Экономика», специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» /Коноплева И.А., Титоренко Г.А., Суворова В.И., Смирнов С.Е., Безрядина Г.Н., Одинцов Б.Е., Брага В.В., Кричевская О.Е., Евсюков В.В., Росс Г.В., Вдовенко Л.А., Лукасевич И.Я., Коняшина Г.Б., Казакова Е.Ф., Дудихин В.В. / Под редакцией Г.А. Титоренко. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. – 591 с.

9. Информационные системы в экономике. Учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» /Титоренко Г.А., Одинцов Б.Е., Кричевская О.Е., Брага В.В., Евсюков В.В., Суворова В.И., Росс Г.В., Лукасевич И.Я., Левкин А.А., Бубнова И.Г., Безрядина Г.Н., Коноплева И.А. / Под редакцией Г.А. Титоренко.2-е издание, переработанное и дополненное. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2013. – 463 с.

10. Луценко А.Г. Компьютерное моделирование в обучении математике будущих экономистов // Вестник МПГУ. Серия «Информатика и информатизация образования». Москва-Курск. 2006. № 2 (7). С. 121-122.

11. Кузнецов Г.В., Ильин А.А. Высшая математика для менеджеров. Учебно-методическое пособие (с грифом УМО) / Кузнецов Г.В., Ильин А.А. – Тула: ТИЭИ, 2011.

12. Кузнецов Г.В., Кочетыгов А.А. Основы финансовых вычислений. Учебное пособие / Кузнецов Г.В., Кочетыгов А.А. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 407 с.

13. Кузнецов Г.В. Финансовая математика. Учебное электронное издание на диске // Москва, 2017.

14. Кузнецов Г.В. Геометрические объекты и параметры сердечно-сосудистой системы: Монография. -Verlag. Издатель: LAPLAMBERT Academic Publishingistein Imprintder Omni Scriptum GmbH&Co. KGHeinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland

15. Кузнецов Г.В. Геометрия системы кровообращения // В книге: Геометрические методы в теории управления и математической физике. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко. Под ред. А.Г. Кушнера, В.В. Лычагина, С.С. Мамонова. М.: 2018. С. 53.

16. Кузнецов Г.В. Геометрические объекты и параметры сердечно-сосудистой системы // Научное обозрение. 2014. № 3. С. 63-65.

17. Кузнецов Г.В. Некоторые приложения геометрии в гемодинамике// В сборнике: Классическая и современная геометрия. Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. Под редакцией А. В. Царева. М.: 2019. С. 98-99.

18. Е.В. Манохин. К истории влияния теоремы Милютина на исследования в геометрии пространств Банаха // Чебышевский сборник. 2018. Т.19, Вып.2. С.531–539.

19. Е.В. Манохин, А.Е. Устян, Г.В. Кузнецов. Ученый и педагог. К 80-летнему юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939-27.09.2016) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4 с. 450-457.

20. Манохин Е.В. Некоторые пространства Банаха, их геометрические и линейно-топологические свойства и приложения: Монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. –200 с.

21. Манохин Е.В., Добрынина И.В., Пышный А.И. Об экономической активности в муниципальных образованиях // Самоуправление. 2019. № 1 (114). Том 2. С. 95-97.

22. Манохин Е.В., Добрынина И.В., Козлова Н.О. Об информационном обеспечении деятельности органов власти // Вестник Алтайской академии экономики и права. 2020. № 8-2. С. 256-263.

23. Жуков Р.А. Подход к оценке функционирования иерархических социально-экономических систем и принятия решений на базе программного комплекса «ЭФРА» // Бизнес-информатика. 2020. № 3 Том 14. С. 82-95.

24. Zhukov R. Economic assessment of the development level of the Central Federal district regions of the Russian Federation: Econometric approach.2018. Statistika. № 98(1). P. 53-68.

25. Zhukov R. Model of socio-ecological and economic system: The central federal district regions of the Russian Federation. 2018. Statistika. 98 (3). P. 237-261.

26. Жуков Р.А. Некоторые задачи оптимизации управления социо-эколого-экономическими системами // Чебышевский сборник. 2019. № 20 (1). С. 370-388.

27. Zhukov R.A., Kuznetsov G.V., Fomicheva I.V., Myasnikova E.B., Vasina M.V., Tsigler M.V.A model of socio-ecological and economic system: The Tula region of the Russian federation // Journal of Environmental Management and Tourism. 2019. № 10 (7). З. 1539-1558

28. Zhukov R.A., Kuznetsov G.V., Manokhin E.V., Nazyrova E.A., Melay E.A. Comparative analysis of results of assessing the Central federal district's regions' economic development by using linear and non-linear models. // Statistika. 2019. T.99. № 3. C. 272-286.

REFERENCES

1. Shelobaev S. I., Vasiliev G. N., Polyakov V. A., 2001, Fundamentals of advertising business: Monograph, Grif and K0, Tula.

2. Shelobaev, S. I., 2000, Mathematical methods and models in economics, finance and business: A textbook, UNITY, Moscow.

3. Yudin, S V, 2008, Mathematical methods and information technologies for processing and using economic information, TulSU Publishing House, Tula.

4. Soloveva, E G, 2008, Organization of accounting, analysis and audit of fixed assets: An educational and practical manual, Publishing house "Levsha Tula.

5. Arsenyev Yu. N., Davydova T. Yu., 2011, Education, knowledge economy and personnel training: Monograph, VZFEI Publishing House, TulSU, Tula.

6. Yadykin, E A., 2012, "Quality management of food production products based on discrete-analytical mathematical models", Proceedings of the Tula State University. Technical sciences, vol. 1, pp. 456-464.

7. Titorenko G. A., Konopleva I. A., Suvorova V. I., Smirnov S. E., Bezryadina G. N., Odintsov B. E., Braga V. V., Krichevskaya O. E., Evsyukov V. V., Ross G. V., Vdovenko L. A., Lukasevich I. Ya., Konyashina G. B., Kazakova E. F., Dudikhin V. V., 2013, "Information systems and management technologies. Textbook for university students studying in the areas of "Management"and "Economics specialties "Finance and Credit "Accounting, analysis and Audit"', Ser. The Golden Fund of Russian Textbooks (Third Edition, revised and expanded), UNITI-DANA, Moscow.

8. Konopleva I. A., Titorenko G. A., Suvorova V. I., Smirnov S. E., Bezryadina G. N., Odintsov B. E., Braga V. V., Krichevskaya O. E., Evsyukov V. V., Ross G. V., Vdovenko L. A., Lukasevich I. Ya., Konyashina G. B., Kazakova E. F., Dudikhin V. V., 2017, "Information systems and management technologies. Textbook for university students studying in the areas

of “Management” and “Economics”, specialties “Finance and Credit”, “Accounting, analysis and audit””, UNITI-DANA, Moscow.

9. Titorenko G. A., Odintsov B. E., Krichevskaya O. E., Braga V. V., Evsyukov V. V., Suvorova V. I., Ross G. V., Lukasevich I. Ya., Levkin A. A., Bubnova I. G., Bezryadina G. N., Konopleva I. A.,2013, “Information systems in economics. Textbook for students of higher educational institutions studying in the specialties "Finance and credit "Accounting, analysis and audit"/ Edited by G. A. Titorenko. (2nd edition, revised and expanded)”, UNITI-DANA, Moscow.

10. Lutsenko, A. G., 2006, “Computer modeling in teaching mathematics to future economists”, Bulletin of the MPSU. Series "Informatics and Informatization of education". Moscow-Kursk, № 2 (7), pp. 121-122.

11. G. V. Kuznetsov, A. A. Ilyin, 2011, “Higher mathematics for managers. Educational and methodical manual (with the UMO stamp). ”, TIEI, Tula.

12. G. V. Kuznetsov, A. A. Kochetygov, 2017, “Fundamentals of financial calculations. Textbook”, INFRA-M, Moscow.

13. Kuznetsov, G. V., 2017, “Financial mathematics. Educational electronic edition on disk”, Moscow.

14. Kuznetsov, G. V., 2014, “Geometric objects and parameters of the cardiovascular system (monograph)”, Verlag / Publisher: LAP LAMBERT Academic Publishing istein Imprint der OmniScriptum GmbH & Co. KG Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121, Saarbrücken, Deutschland.

15. Kuznetsov, G. V., 2018, “Geometry of the circulatory system. In: Geometric methods in control theory and mathematical physics”, Abstracts of reports of the International Conference dedicated to the 70th anniversary of S. L. Atanasyan, the 70th anniversary of I. S. Krasilshchik, the 70th anniversary of A. M. Samokhin, the 80th anniversary of V. T. Fomenko, edited by A. G. Kushner, V. V. Lychagin, and S. S. Mamonov, p. 53.

16. Kuznetsov,G. V., 2014,“Geometric objects and parameters of the cardiovascular system”, Scientific review, No. 3, pp. 63-65.

17. Kuznetsov, G. V., 2019, “Some applications of geometry in hemodynamics”, In the collection: Classical and modern geometry. materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of V. T. Bazylev, edited by A.V. Tsarev, pp. 98-99.

18. E. V. Manohin, 2018, “To history of influence of the theorem of Milyutin on researches in geometry of Banach spaces”, Chebyshevskii sbornik, vol. 19, no. 2, pp. 531–539.

19. E. V. Manokhin, A. E. Ustyan, G. V. Kuznetsov, 2019, "Scholar and teacher. To the 80th anniversary Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939–27.09.2016) ”, Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 4, pp. 450–457.

20. Manokhin, E. V., 2014, Some Banach spaces, their geometric and linear-topological properties and applications, TulSU Publishing House, Tula.

21. Manokhin E. V., Dobrynina I. V., Pyshny A. I.,2019, “About economic activity in municipalities. Self-government”, Moscow, № 1, (114), vol 2, pp. 95-97.

22. Manokhin E. V., Dobrynina I. V., Kozlova N. O., 2020, “On information support for the activities of government bodies”, Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law, No. 8-2, pp. 256-263

23. Zhukov, R. A., 2020, "An approach to assessing the functioning of hierarchical socio-economic systems and decision-making based on the EFRA software package", Business Informatics, No. 3, vol. 14, pp. 82-95.

24. Zhukov, R., 2018, "Economic assessment of the development level of the Central Federal district regions of the Russian Federation: Economic approach", Statistika, № 98 (1), pp. 53-68.

25. Zhukov, R., 2018, "Model of socio-ecological and economic system: The Central Federal district regions of the Russian Federation", Statistika, № 98 (3), pp. 237-261.

26. Zhukov, R. A.,2019, "Some problems of optimizing the management of socio-ecological-economic systems", Chebyshevskii sbornik № 20 (1), pp. 370-388.

27. Zhukov R.A., Kuznetsov G.V., Fomicheva I.V., Myasnikova E.B., Vasina M.V., Tsigler M.V., 2019, "A model of socio-ecological and economic system: The tula region of the Russian federation", Journal of Environmental Management and Tourism, № 10 (7), pp. 1539-1558.

28. Zhukov R.A., Kuznetsov G.V., Manokhin E.V., Nazyrova E.A., Melay E.A.,2019, "Comparative analysis of results of assessing the Central Federal district regions economic development by using linear and non-linear models", Statistika, № 99 (3), pp. 272-286.

Получено 19.07.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 620.1: 621.78 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-328-339

Влияние температуры отпуска на структуру и механические свойства термомеханически упрочненного арматурного проката

Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. В. Родионов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын

Сергеев Николай Николаевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: technology@tspu.tula.ru
Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ansergueev@mail.ru
Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Родионов Александр Валерьевич — Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрено влияние температуры отпуска на структуру и механические свойства малоуглеродистых арматурных сталей марок Ст3 и Ст5. Установлено, что сталь марки Ст3 в прутках ∅14 мм эффективно обрабатывается способом ВТМО, упрочняясь до уровня 3-го класса. Механические свойства, зафиксированные непосредственно после ВТМО, устойчиво сохраняются после отпуска электронагревом до температур 350...370°C. Выявлено, что после отпуска при температуре 500...550°C в стали Ст5 сохраняется упрочнение на уровне 6-го класса прочности только при условии, если нагрев осуществляется по скоростному режиму (28 °C/сек). Показано, что субструктура, созданная в ходе ВТМО, разрушается при ускоренном отпуске в меньшей (мере) степени, чем после печного. Все это предопределяет более высокий уровень упрочнения стали в результате ВТМО и скоростного отпуска.

Ключевые слова: арматурная сталь, механические свойства, отпуск, высокотемпературная термомеханическая обработка.

Библиография: 16 названия.

Для цитирования:
Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. В. Родионов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын, . Влияние температуры отпуска на структуру и механические свойства термомеханически упроченного арматурного проката // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 328–339.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 620.1: 621.78 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-328-339

The effect of the tempering temperature on the structure and mechanical properties of thermomechanically strengthened rebar rolled products

N. N.Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. V. Rodionov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn

$\boxed{\textbf{Sergeev Nikolai Nikolaevich}}$ — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail:technology@tspu.tula.ru
Sergeev Alexander Nikolaevich — doctor of pedagogical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ansergueev@mail.ru
Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Rodionov Alexander Valer'evich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The article considers the influence of the tempering temperature on the structure and mechanical properties of low-carbon reinforcing steels of grades St3 and St5. It is established that steel of the St3 brand in bars ∅14 mm is effectively processed by the VTMO method, being strengthened to the level of the 3rd class. The mechanical properties recorded directly after the VTMO are steadily preserved after the release by electric heating to tempera-tures of 350...370°C. It was found that after tempering at a temperature of 500...550°C, the hardening in St5 steel remains at the level of the 6th strength class only if the heating is carried out according to the speed mode (28° C/sec). It is shown that the substructure created during VTMO is de-stroyed during accelerated tempering to a lesser (to a lesser) extent than after furnace tempering. All this determines a higher level of steel hardening as a result of VTMO and high-speed tempering.

Keywords: reinforcing steel, mechanical properties, tempering, high-temperature thermomechanical treatment.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. V. Rodionov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn, , 2021, "The effect of the tempering temperature on the structure and mechanical properties of thermomechanically strengthened rebar rolled products", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 328–339.

1. Введение

Арматурная сталь является составной частью железобетона и на всех стадиях изготовления и эксплуатации железобетонных конструкций должна удовлетворять следующим основным требованиям [1]: иметь необходимые прочностные свойства, пластичность при кратковременных и длительных нагрузках, а также в условиях повышенных и пониженных температур, коррозионных воздействий и т. д. Кроме того, необходимо сцепление арматурной стали с бетоном за счёт соответствующего периодического профиля или специальных анкеров.

Одним из наиболее эффективных путей улучшения качества ар-матурного проката из углеродистых и низколегированных сталей является применение операций термической обработки [2]. Термическое упрочнение, осуществляемое как с прокатного, так и с отдельного нагрева, повышает в 1,5–2 раза прочность и значительно увеличивает усталостные характеристики проката, в результате чего возможно сэкономить 10–50% металла при изготовлении железобетонных конструкций.

Физико-механические свойства арматурного проката в значительной степени зависят от химического состава сталей, способа производства и режимов термической обработки [3, 4]. В связи с этим, для каждой марки стали необходимо экспериментально подбирать оптимальные режимы термообработки, обеспечивающие высокие значения физико-механических характеристик.

Цель настоящей работы — исследование влияния термической обработки на структуру и механические свойства малоуглеродистых арматурных сталей марок Ст3 и Ст5.

2. Материалы и методы исследования

В качестве объектов исследования были выбраны арматурные стали марок Ст3 и Ст5 ∅14 мм упрочненные методом высокотемпературной термомеханической обработки (ВТМО). ВТМО проводили в условиях, при которых процессы рекристаллизации деформированного аустенита частично или полностью подавляются, а процесс полигонизации получает наибольшее развитие с целью формирований развитой субструктуры аустенита, наследуемой мартенситом при последующей закалке.

Арматурные стержни ∅14 мм отпускали при температурах $200 \ldots 600$°C через 100 или 50°C с различной интенсивностью нагрева:

а) в электропечи с выдержкой в течение часа;

б) электронагревом — пропусканием тока силой 700, 3500 и 5000 А.

Интенсивность электронагрева прутков в зависимости от силы тока представлена на рисунке 1. Пропускание тока через прутки прекращали по достижении заданной температуры. Такой режим нагрева применяется при электротермическом способе натяжения стержней при производстве предварительно напряженных конструкций.

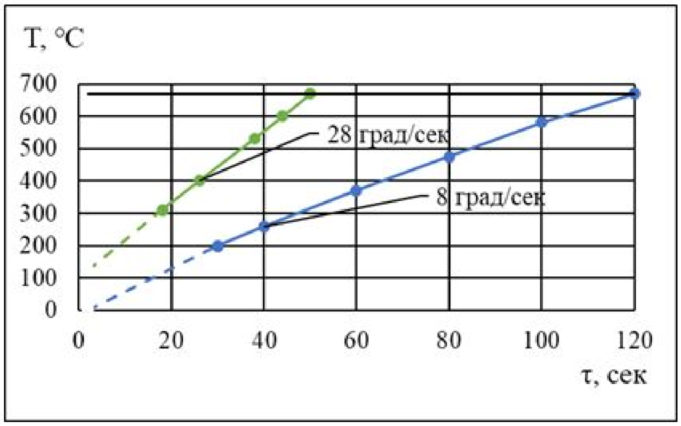

Рис. 1: Время ускоренного (8°C/с) и скоростного (28°C/с) электронагрева стальных прутков ∅14 мм в зависимостиот температуры отпуска

Температуру отпуска контролировали двумя хромель-копелевыми термопарами, спай которых закреплялся в отверстиях, высверленных в середине и у края прутков.

Отпущенные прутки в виде натурных образцов (∅14 мм и $l = 250$ мм) подвергали испытанию на растяжение для определения механических свойств согласно ГОСТ 12004-81. Подготовленные образцы исследовали под микроскопом, а также подвергали рентгеноструктурному анализу с целью определения тонкого строения стали. Электронно-микроскопические исследования проводили на микроскопе ЭМВ-1001 с применением метода лаковых реплик. Контрольные образцы подвергали обычной закалке и отпуску.

3. Результаты и их обсуждение

3.1. Влияние отпуска на механические свойства стали после ВТМО

На рисунке (2) показано изменение механических свойств в зависимости от температуры отпуска и интенсивности нагрева стали высоко-прочного состояния после ВТМО ($\sigma_B = 1760$ МПа, $\delta = 6,5\%$).

Характер изменения кривых прочностных и пластических свойств в зависимости от температуры отпуска — печного и электронагревом — одинаков, однако после отпуска электронагревом прочностные характеристики стали выше, чем при обычном печном нагреве. Наиболее сильное разупрочнение стали с повышением температуры отпуска происходит в условиях печного нагрева с выдержкой 1 час. Например, отпуск при 400°C разупрочняет сталь до уровня 5-го, а при 450°C — до 4-го классов прочности. В то же время, при скоростном отпуске высокий комплекс свойств сохраняется вплоть до температур 600°C (Ат800, Ат600).

Электронагрев термомеханически упрочненной стали до различных температур без последующей выдержки выявляет тем большую термическую устойчивость, чем интенсивнее проводили нагрев. Например, после ускоренного нагрева (ток 3500 А) до 450°C в стали сохраняется упрочнение на уровне 6-го класса, а после скоростного нагрева (28°C/сек) — на уровне 7-го класса прочности.

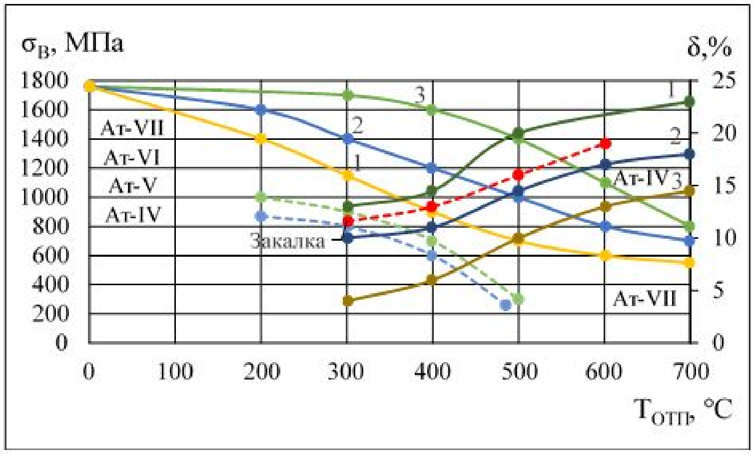

Рис. 2: Изменение механических свойств высокопрочной стали Ст5 (7-й класс прочности) в зависимости от температуры и интенсивности нагрева: 1) нагрев в электропечи, с выдержкой 1 час; 2) нагрев пропусканием тока силой 3500 А; 3) нагрев пропусканием тока силой 5000 А

Пластические характеристики после всех режимов отпуска удовлетворяют требованиям, приведенным в [5]. Таким образом, высокопрочная стержневая арматура после ВТМО и отпуска с электронагрева до температуры 450°С в течение 1 мин без выдержки при этой температуре (в настоящем эксперименте режим ускоренного нагрева) в полной степени отвечает требованиям к арматуре 6-го класса прочности.

Высокая термическая устойчивость термомеханически упрочненной стали полнее проявляется при ее сравнении с термической устойчи-востью, обычно закаленной стали. На рисунке 2 хорошо виден крутой ход кривой изменения прочностных характеристик закаленной стали на фоне аналогичных кривых высокопрочной стали как при печном, так и ускоренном нагреве до температуры 400°С, т.е. резкое разупрочнение закаленной стали, при котором предел прочности понижается до 900 ... 950 МПа (4-й класс прочности). Тем самым исключается важность достижения прочностных свойств в стали марки Ст5 на уровне 5-го и тем более 6-го классов за счёт закалки и последующего отпуска электронагревом до температур 400 ... 500°С (температура электронагрева арматуры при производстве напряженных железобетонных конструкций).

Изменение механических свойств в зависимости от температуры отпуска стали марки Ст5, упрочненной способом ВТМО до уровней классов прочности Ат400, Ат600, Ат800 показано на рисунке 3. Отпуск электро-нагревом проводили на установке заводского типа с использованием сварочного трансформатора, сила тока составляла 700 А, нагревали прутки ∅14 мм, длиной 3000 мм, время нагрева составляло 1,5 ... 3 мин. Для сравнения отпускали прутки печным нагревом.

Из рисунка 3 видно, что после отпуска с электронагрева прочностные характеристики стали выше, чем при печном нагреве, кроме того, заметного разупрочнения не наблюдается до 450°С для прутков всех трёх исследуемых состояний, упрочнение сохраняется на уровне класса прочности, полученного непосредственно после ВТМО. Это объясняется как высокой устойчивостью дислокационной субструктуры, созданной в ходе ВТМО, так и проходящими процессами самоотпуска за счёт сохранившегося в прутках тепла после прекращения их охлаждения в закаливающем устройстве.

Наблюдаемый в сталях классов прочности Ат600 и Ат800 эффект упрочнения при температуре отпуска связывают с изменением тонкого кристаллического строения — резким измельчением блоков.

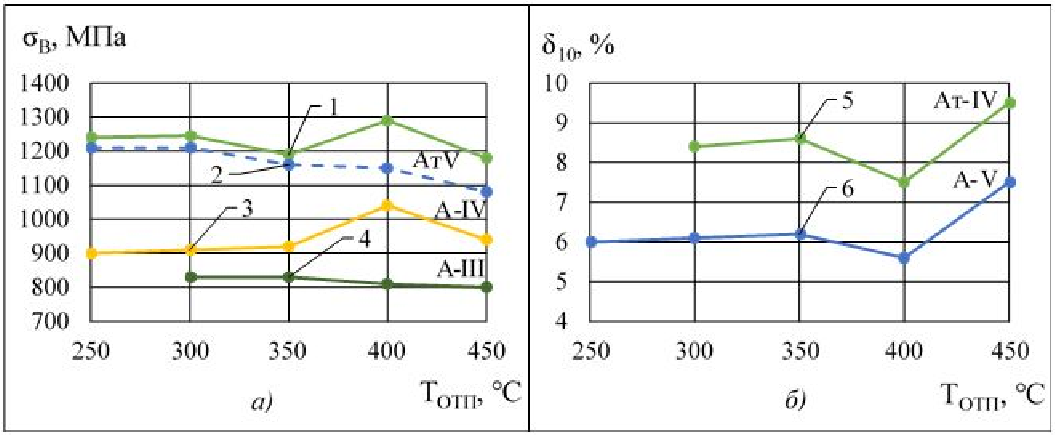

Рис. 3: Изменение предела прочности (а) и относительного удлинения (б) стали Ст5 от температуры отпуска после ВТМО до 3, 4 и 5классов прочности: 1; 2; 6 — электронагрев; 3; 4; 5 — печной отпуск

Изменение механических свойств стали Ст3, прошедшей ВТМО, от температуры отпуска показано на рисунке 4. Прочностные характеристики этой стали при отпуске с электронагрева (сила тока 700 А, время нагрева $1,5\ldots3$ мин) сохраняются на уровне свойств, достигнутом непосредственно после ВТМО, при нагреве не выше 350°С, задел предел прочности и предел текучести значительно снижаются при 400°С и более плавно при 450 и 500°. Однако уровень упрочнения после отпуска при 400°С сохраняется высоким. Например, предел прочности снизился с 1050 до 900 МПа, а предел текучести с 900 до 850 МПа, т.е. сталь марки Ст3 можно гарантированно упрочнять способом ВТМО до уровня 3 и 4-го классов прочности и поставлять заказчику в качестве арматуры 3-го класса без опасения снижения прочностных свойств при последующем электронагреве до $350\ldots370$°С.

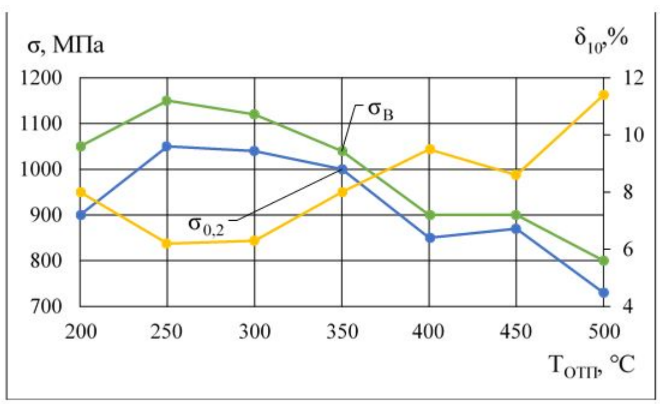

Рис. 4: Зависимость механических свойств стали Ст3, прошедшей ВТМО от температуры отпуска с электронагрева

В таблице 1 представлены результаты испытаний на растяжение натурных образцов, отобранных от переднего и заднего конца 80-ти метрового прутка и отпущенных в печи с температур $400\ldots600$°С.

Таблица 1: Механические свойства стали Ст5 после ВТМО и печного отпуска

Механические характеристики	Температура отпуска, °C				
	20	300	400	500	600
σ_B, МПа	$\frac{1600}{1700}$	$\frac{1100}{1200}$	$\frac{980}{1030}$	$\frac{790}{830}$	$\frac{660}{700}$
Класс прочности	Ат1200	Ат800	Ат600	Ат400	Ат400

Примечание: в числителе приведены механические свойства образцов, вырезанных из начала прутка, а в знаменателе из конца прутка.

Из таблицы 1 видно, что разница в значениях прочности переднего и заднего концов прутка заметно не изменяется до температуры отпуска 300…350°C и составляет 1200…1000 МПа. Минимальная температура печного отпуска, которая выравнивает прочностные свойства по длине 80-ти метрового прутка и в то же время обеспечивает достаточно высокий класс прочности (Ат600), должна приниматься не ниже 400°C. В случае ускоренного нагрева, когда распад мартенсита задерживается, температура отпуска с целью сближения прочностных свойств должна быть выше.

3.2. Микроструктура и тонкое строение стали после ВТМО и отпуска

Отпуск, как завершающая термическая обработка закаленных сталей, уменьшает уровень закалочных напряжений и формирует эксплуатационные свойства. При мартенситном превращении неупорядоченный раствор внедрения атомов углерода в аустените переходит в упорядоченный раствор в мартенсите с расположением атомов углерода в октаэдрических порах вдоль оси «С», чем вызывается образование тетрагональной решётки мартенсита. Метастабильное состояние закаленной стали, вызванное пересыщенностью углеродом мартенсита (степень тетрагональности решётки мартенсита), повышенной плотностью дефектов решётки (дислокаций и пр.) и присутствием остаточного аустенита, при отпуске стабилизируется вследствие протекания ряда процессов [6].

Выдержка мартенсита уже при комнатной температуре, а также при нагреве до 80…100°C приводит к уменьшению его тетрагональности, что вызвано диффузией атомов углерода и дефектам решетки мартенсита — образование примесных атмосфер, обогащенных углеродом.

В процессе первого превращения при отпуске закалённой стали образуется метастабильный ε-карбид, отличающийся от цементита типом кристаллической решётки (гексагональная у ε-карбида), пониженным содержанием углерода. Частица ε-карбида когерентно связана с кристалло-графической решёткой мартенсита. Первое превращение при отпуске характерно, кроме того, протеканием так называемого двухфазного распада мартенсита: образование карбидных пластин за счёт углерода из ближайшего мартенситного окружения (вследствие малой подвижности атомов углерода), в результате чего мартенсит оказывается неоднородным в различных участках по содержанию углерода.

Второе превращение при отпуске характеризуется распадом остаточного аустенита и продолжающимся распадом мартенсита на α-раствор с концентрацией по углероду $0,15\ldots0,20\%$ и тонкие пластинки цементита — структура нижнего бейнита или отпущенного мартенсита игольчатого строения. Конечные продукты распада аустенита те же, что и продукты распада мартенсита при данной температуре.

В результате третьего превращения при отпуске распад мартенсита завершается переходом в равновесный (без избытка углерода) феррит и обособленный карбид (нарушается когерентность) с образование сильно травящейся двухфазной структуры, наследуемой игольчатое строение мартенсита — троостит отпуска.

Дальнейшее повышение температуры отпуска — четвёртое превращение — сопровождается стабилизацией структуры цементита: их ростом и сфероидизацией (округлением), уменьшением плотности дислокаций и укреплением блоков мозаичной структуры ферритной матрицы в результате развития ранних стадий рекристаллизации, формируется зернистая структура из ферритно-цементитной смеси, называемая сорбитом отпуска.

Указанная последовательность превращений в условиях медленного печного нагрева нарушается при скоростном нагреве, который, кроме того, вносит некоторые особенности в протекании фазовых превращений.

После печного отпуска при 300°C структура стали характеризуется относительно равномерным распределением карбидных частиц. Ускоренный нагрев, в отличие от печного, приводит к образованию сетки более мелких карбидов по границам блоков и зёрен α-фазы.

Повышение температуры отпуска до 400°C сопровождается выделение карбидов преимущественно в виде сетки по границам блоков и зёрен также и после печного нагрева. В структуре стали ускоренного отпуск карбидная сетка выглядит более отчётливо сформированной, карбиды по размеру мельче, их форма преимущественно пластинчатая, а не равноосная как после печного нагрева. Микроструктура, выявленная с помощью оптического микроскопа, также отражает различие в протекании превращений при печном и ускоренном отпуске. На микроснимке после печного отпуска не наблюдается игольчатое строение стали и отчётливо прослеживается начальная стадия сфероидизации карбидов. Ускоренному отпуску при той же температуре отвечает еще различная микроструктура, на фоне которой видны дисперсные карбиды.

Весьма интенсивный процесс сфероидизации карбидов при печном отпуске наблюдается при 450°C и более высокой температуре. На фоне ферритной матрицы обнаруживаются равноосные зерна цементита. Такой характер микроструктуры свидетельствует о том, что фазовые превращения при отпуске — распад мартенсита и остаточного аустенита в основном закончились. Подобная структура в стали после ускоренного отпуска наблюдалась лишь при температурах 550°C.

Все выявленные нами особенности строения стали после ускоренного отпуска в интервале температур 300...450°C, такие, как преимущественное образование сетки карбидов по границам блоков и зёрен, выделение дисперсных карбидных частиц с преобладанием пластинчатой формы, сохранение игольчатого строения до более высоких температур отпуска, и, наконец, более позднее развитие процесса сфероидизации подтверждает тормозящее влияние ускоренного нагрева на превращения, протекающие при отпуске термомеханически упрочнённой стали марки Ст5.

Это подтверждается также данными изменения тонкого строения стали (табл. 2). Из таблицы 2 видно, что субструктура, созданная в ходе ВТМО, разрушается при ускоренном отпуске в меньшей степени, чем после печного. Это предопределяет более высокий уровень упрочнения стали в результате ВТМО и скоростного его отпуска. Изменение характеристик тонкого строения стали Ст3 после ВТМО и отпуска показано на рисунке 5.

Таблица 2: Изменение характеристик тонкого строения стали Ст5 после ВТМО и отпуска — печного и с электронагрева

Режим нагрева	Размер блоков	Микроискажения 2-го рода	Плотность дислокаций см$^{-2}$
Печной — 1 час	$0,5 \times 10^{-4}$	$0,081 \times 10^{-3}$	$4,4 \times 10^{10}$
Электронагрев — 10 сек	$0,1 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-3}$	$3,1 \times 10^{11}$

Из анализа рисунка 5 видно, что разрушение субструктуры происходит в интервале тем-

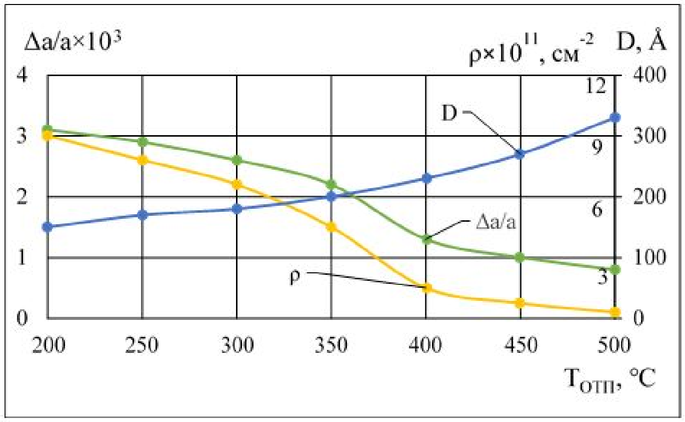

Рис. 5: Изменение характеристик тонкого строения стали Ст3 после ВТМО и отпуска с электронагрева

ператур 350...400°C, в котором наблюдается наиболее резкое снижение плотности дислокаций и микроискажений 2-го рода — характеристик, с которыми связывают упрочнение стали. Именно в этом температурном интервале происходит резкое понижение предела прочности и предела текучести при отпуске (см. рис. 4).

4. Заключение

1. Установлено, что сталь марки Ст3 в прутках ⌀14 мм эффективно обрабатывается способом ВТМО, упрочняясь до уровня 3-го класса. Механические свойства, зафиксированные непосредственно после ВТМО, устойчиво сохраняются после отпуска электронагревом до температур 350...370°C.

2. Показано, что высокопрочная стержневая арматура из стали марки Ст5 после ВТМО и отпуска с электронагрева до температур 450°C в течение $1 \ldots 1,5$ мин без выдержки при этой температуре отвечает требованиям, предъявляемым к арматуре 6-го класса прочности.

3. Выявлено, что после отпуска при температуре 500...550°C в стали Ст5 сохраняется упрочнение на уровне 6-го класса прочности только при условии, если нагрев осуществляется по скоростному режиму (28°C/сек).

4. Выявленные в настоящей работе особенности строения стали после ускоренного отпуска: преимущественное образование сетки карбидов по границам блоков и зёрен, пластинчатая форма карбидов высокой дисперсности, сохранение игольчатого строения до более высоких температур отпуска и более позднее развитие процесса сфероидизации подтверждают тормозящее влияние ускоренного нагрева на превращения, протекающие при отпуске. Исследованием также установлено, что субструктура, созданная в ходе ВТМО, разрушается при ускоренном отпуске в меньшей (мере) степени, чем после печного. Все это предопределяет более высокий уровень упрочнения стали в результате ВТМО и скоростного отпуска.

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих процессов обработки различных материалов [7]-[16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высокопрочная арматурная сталь / А. А. Кугушин, И. Г. Узлов, В. В. Калмыков, С. А. Мадатян, И. В. Ивченко. — М.: Металлургия, 1986. 272 с.

2. Узлов Г. И. Термическое упрочнение проката — эффективный путь экономии металла // Металловедение и термическая обработка металлов. — 1985. — №8. — С.18–21.

3. Исследование влияния легирования на механические и коррозионные свойства арматурного проката / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, С. Н. Кутепов, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2018. Вып. 7. — С.117–131.

4. Влияние режимов термической обработки на стойкость высокопрочной арматурной стали к водородному растрескиванию / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и техноло-гии. — 2017. — Т.7. — №4 (25). — С.6–20.

5. ГОСТ 10884-94. Сталь арматурная термомеханически упрочненная для железобетонных конструкций. Технические условия. — М.: Стандартинформ, 2009. — 29 с.

6. Физико-механические и коррозионные свойства металлических материалов, эксплуатируемых в агрессивных средах: монография / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, М. В. Ушаков, В. В. Извольский. – М.-Вологда: Инфра-Инженерия, 2020. — 556 с.

7. Дорофеев Г. А., Зинягин Г. А., Макаров А. Н. Производство стали на основе железа прямого восстановления: монография. — Старый Оскол: ТНТ, 2021. — 324 с.

8. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: моно-графия / М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, Е. М. Селедкин, Д. С. Клементьев, А. А. Калинин. изд. 2-е, испр. и доп. — М.-Вологда: Инфра-Инженерия, 2021. — 360 с.

9. Влияние термической обработки на механические свойства арматурного проката / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, Е. В. Агеева // Известия Юго-Западного государственного уни-верситета. Серия: Техника и технологии. — 2021. — Т.11. — №2. — С.8–25.

10. Влияние режимов высокотемпературной термомеханической обработки на механические свойства арматурного проката / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеев // Известия Юго-Западного государственного университета. — 2019. — Т.23. — №2. — С.29–52.

11. О состоянии предпревращения металлов и сплавов: монография / О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, И. В. Тихонова, Н. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, Н. Е. Стариков, А. Н. Сергеев, А. А. Калинин, Д. В. Малий, Ю. Е. Титова, С. Е. Александров, Н. А. Крылов. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. — 245 с.

12. Влияние разнозернистости аустенита на кинетику перлитного превращения в мало- и среднеуглеродистых низколегированных сталях / А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Д. А. Провоторов, И.В. Минаев, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова // Материаловедение. — 2014. — №7. — С. 23–26.

13. Temperature field calculation at incomplete hot processing of metal alloys / G. M. Zhuravlev, D. N. Romanenko, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, O. M. Gubanov // Steel in Translation. — 2019. — T.49. — №10. — C.716–719.

14. Selecting Laser Cutting Modes for Engineering Steel Sheets Aiming at Provi-sion of the Required Properties of Surface Quality / N. N. Sergeev, I. V. Minaev, I. V. Tikhonova, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, D. V. Malii // Inorganic Materials: Applied Research. — 2020. — Vol.11. — №4. — C.815–822.

15. Influence of Heat Treatment on Residual Stress Formation in the Wear-Resistant Steel 60–Steel 15–Steel 60 Bimetal Material / N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, D. S. Klemen-tev // Inorganic Materials: Applied Research. — 2021. — Vol.12. — №1. — P.5–9.

16. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting / A. E. Gvozdev, N. N. Sergeyev, I. V. Minayev, I. V. Tikhonova, A. N. Sergeyev, D. M. Khonelidze, D. V. Maliy, I. V. Golyshev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov // Inorganic Materials: Applied Research. — 2017. — T.8. — №1. — C. 148–152.

REFERENCES

1. Kugushin A. A., Uzov I. G., Kalmykov V. V., Madatyan S. A., Ivchenko I. V. 1986, *High-strength reinforcing steel.* M.: Metallurgy. 272 p.

2. Knots G. I. 1985, «Thermal hardening of rolled products – an effective way to save metal», *Metallology and heat treatment of metals*, No.8. pp. 18–21.

3. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Gvozdev A. E., Chukanov A. N., Kutepov S. N., Pantyukhin O. V. 2018, «Investigation of the effect of alloying on the mechanical and corrosion properties of rebar rolled products», *Izvestiya Tula State University. Technical sciences*, Issue 7. pp. 117–131.

4. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Ageev E. V. 2017 «The influence of heat treatment modes on the resistance of high-strength reinforcing steel to hydrogen cracking», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Series: Equipment and technologies*, T.7. №4 (25). pp. 6–20.

5. GOST 10884-94. 2009, *Thermomechanical reinforced reinforcing steel for reinforced concrete structures. Technical conditions.* Moscow: Standartin-form. 29 p.

6. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Ushakov M. V., Izvolsky V. V. 2020, *Physico-mechanical and corrosion properties of metal materials operated in aggressive environments: monograph.* M.-Vologda: Infra-Engineering. 556 p.

7. Dorofeev G. A., Zinyagin G. A., Makarov A. N. 2021, *Production of steel based on direct reduction iron.* Stary Oskol: TNT. 324 p.

8. Shorshorov M. H., Gvozdev A. E., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Ku-zovleva O. V., Seledkin E. M., Klementyev D. S., Kalinin A. A. 2021, *Modeling of processes of resource-saving processing of ingot, powder, nanostruc-tured and composite materials.* Ed. 2 nd, ispr. and additional. M.-Vologda: Infra-Engineering. 360 p.

9. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Chukanov A. N., Ageeva E. V. 2021, «The influence of heat treatment on the mechanical properties of rolled steel», *Proceedings of the Southwestern State University. Series: Equipment and technologies*, V.11. No.2. pp. 8–25.

10. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Ageev E. V. 2019, «The influence of the modes of high-temperature thermomechanical treatment on the mechanical properties of reinforcing bars», *Proceedings of the southwest state University*, Vol. 23. No. 2 pp. 29–52.

11. Kuzovleva O. V., Gvozdev A. E., Tikhonova I. V., Sergeev N. N., Breki A.D., Starikov N. E., Sergeev A. N., Kalinin A. A., Maliy D. V., Titova Yu. E., Alexandrov S. E., Krylov N. A. 2016, *On the state of pre-conversion of metals and alloys: monograph.* Tula: TulSU Publishing House. 245 p.

12. Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Minaev I. V., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V. 2014, «The influence of austenite grain diversity on the kinetics of perlite transformation in low-and medium-carbon low-alloy steels», *Materials Science*, No.7. pp. 23–26.

13. Zhuravlev G. M., Romanenko D. N., Gvozdev A. E., Kutepov S. N., Gubanov O. M. 2019, «Calculation of the temperature field during incom-plete hot processing of metal alloys», *Steel in translation*, V.49. No.10. pp. 716–719.

14. Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Maliy D. V. 2020, «The choice of modes of laser cutting sheet structural steel to ensure the desired properties of sur-face quality», *Inorganic materials: applied research*, Vol.11. No.4. pp. 815–822.

15. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Klementyev D. S. 2021, «The influence of heat treatment on the for-mation of residual stresses in a wear-resistant bimetallic material Steel 60-Steel 15-Steel 60», *Inorganic materials: applied research*, Vol.12. No.1. pp. 5–9.

16. Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V., Sergeev A. N., Honelidze D. M., Maly D. V., Golyshev I. V., Kolmakov A. G., Provotorov D. A. 2017, «Distribution and structure of temperature in the zone of ther-mal impact for steel sheets after laser cutting», *Inorganic materials: applied research*, Vol.8. No.1. pp. 148–152.

Получено 03.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-340-345

О некоторых свойствах константы наилучших совместных диофантовых приближений[1]

Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова

Басалов Юрий Александрович —Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Басалова Анастасия Николаевна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается вопрос поведения значений C_n при возрастании n, где C_n – это константа наилучших совместных диофантовых приближений. Показаны различия в этом вопросе для l_2 и max нормы.

Ключевые слова: диофантовы приближения, константы наилучших совместных диофантовых приближений.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова. О некоторых свойствах константы наилучших диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 340–345.

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 19-41-710004 р_а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-340-345

On some properties of the constant of the best joint diophantine approximations

Yu. A. Basalov, A. N. Basalova

Basalov Yurij Aleksandrovich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Basalova Anastasia Nikolaevna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Abstract

The article considers the question of the behavior of the values of C_n with increasing n, where C_n is the constant of the best joint diophantine approximations. Shows the differences in this question for l_2 and max norms are shown.

Keywords: Diophanite approximations, best joint diophantine approximations constants.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, A. N. Basalova, 2021, “On some properties of the constant of the best joint diophantine approximations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 340–345.

1. Введение

Рассмотрим действительный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Мерой его приближений целыми числами будет считать max норму $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n$. Из теоремы Дирихле следует, что эта величина меньше 1 [6]. Точная нижняя грань величины C, такой что существует бесконечно много целых чисел $q, p_1, \ldots, p_n$ таких, что

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < C$$

называется константой наилучших евклидовых приближений $C(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha}$. Константой наилучших совместных диофантовых приближений размерности n называется:

$$C_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} C(\vec{x}).$$

2. Случай max нормы

А. Гурвицом было получено [7] значение $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Для больших размерностей точных значений C_n неизвестно, но было получено достаточно много оценок этих значений.

Для размерности $n = 2$ Дж. В. С. Касселс [2] получил оценку снизу $C_2 \geq \frac{2}{7}$, а Дж. Макк [9] и В. Г. Новак [10] получили оценку сверху $C_2 \leq \left(\frac{8}{13}\right)^2$. Это дает неравенство

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447214... > 0.378698 \approx \left(\frac{8}{13}\right)^2 \geq C_2.$$

Возникает вопрос – можно ли для больших n получить аналогичные неравенства? Будет ли последовательность C_n убывать с ростом n?

Наиболее точные оценки сверху (для размерности $n \geq 3$) была получены В. Споном [13]

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^n + (1+u^n)}$$

$$C_3 \leq 0.408319... \quad C_4 \leq 0.390731... \quad C_5 \leq 0.379023...$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \pi, \qquad C_n < \frac{1}{\pi}, \text{ при } n \to \infty.$$

Наиболее точные оценки снизу получаются из неравенства (полученного в работах [2, 5])

$$C_n \geq V_{n,s} / \sqrt{\Delta_{n,s}}$$

где $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| \leq 1.$$

а $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел.

Ранее были получены оценки $V_{n,s}$

$$V_{3,1} = 2, \; V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2}, \qquad [3]$$

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9}, \, V_{4,1} \geq 2, \; V_{4,0} \geq 4. \qquad [8]$$

В недавних работах [1] нами были получены оценки

$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\,(9+5\sqrt{5})}{88}},$$

$$V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11},$$

$$V_{n,[n/2]} \geq 0.77... \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n/2}.$$

Для $\Delta_{n,s}$ известны [12] следующие оценки

$$60^{n-2s} \cdot 22^s < \Delta_{n,s} < 92.4...^n, \quad n \to \infty,$$

что дает оценку снизу

$$C_n \geq 0.77... \cdot 0.1387...^{n/2}$$

$$C_3 \geq 0.120605... \quad C_4 \geq 0.044320... \quad C_5 \geq 0.014860...$$

Это значит, что существующие на данный момент оценки не могут дать исчерпывающего ответа на вопрос поведении значений C_n с ростом n.

3. Случай l_2 нормы

Вместо max нормы $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n$ можно рассмотреть l_2 норму $\sum\limits_{i=1}^{n}(q\alpha_i - p_i)^2$ и ввести для нее аналогичные понятия. Точная нижняя грань величины θ, такой что для вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ существует бесконечно много целых чисел $q, p_1, \ldots, p_n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n}(q\alpha_i - p_i)^2 < \frac{\theta^{1/n}}{q^{1+1/n}}$$

называется константой наилучших евклидовых приближений $\theta(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha}$.

Константой наилучших евклидовых приближений θ_n называется:

$$\theta_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \theta(\vec{x}).$$

Результат А. Гурвица для $n = 1$ остается в силе: $\theta_1 = 1/\sqrt{5} \approx 0.447214....$ Для размерности $n = 2$ значение θ_2 было вычислено Г. Дэвенпортом и К. Малером [4]: $\theta_2 = 2/\sqrt{23} \approx 0.417029....$ То есть $\theta_1 > \theta_2$. Это наводит на аналогичный вопрос о убывании θ_n убывать с ростом n.

Наиболее точные оценки θ_n для $n \geq 3$ были получены В. Г. Новаком [11]

$$\frac{1}{n^{-n/2}\cdot\sqrt{\Delta_{n,[n/2]}}} \leq \theta_n \leq \frac{n^{-n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}\cdot\Delta(\mathbb{S}_{n+1})},$$

где $\Delta(\mathbb{S}_{n+1})$ – критический определитель единичной сферы размерности $n+1$.

$$0.31334... \leq \theta_3 \leq 0.5322..., \qquad 0.39888... \leq \theta_4 \leq 0.75615...,$$
$$0.33385... \leq \theta_5 \leq 1.14155..., \qquad 0.50272... \leq \theta_6 \leq 1.90244....$$
$$0.43830... \leq \theta_7 \leq 3.54384....$$

То есть $\theta_2 < \theta_6$. Значит, θ_n не может монотонно убывать с ростом n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю. А. Оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 20, Вып. 3, 2019, С. 405-429. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12 (4). P. 543–556

4. Davenport. H., Mahler. K., Simultaneous Diophantine approximation // Duke Math. J. 1946. Vol. 13. P. 105–111.

5. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

6. Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.

7. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

8. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32 (2). P. 313–316.

9. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.

10. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

11. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

12. Odlyzko A. M. Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1990. Tome 2. No. 1. P. 119–141.

13. Spohn W.G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 885–894.

REFERENCES

1. Basalov Yu. A. 2019, "Estimations of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 20, Issue 3, pp. 405–429. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

2. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119-121.

3. Cusick T. W. 1980, "Estimates for Diophantine approximation constants", *Journal of Number Theory*, Vol. 12 (4), pp. 543–556.

4. Davenport. H., Mahler. K. 1946 "Simultaneous Diophantine approximation", *Duke Math. J.*, Vol. 1, pp. 105–111.

5. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186-195.

6. Dirichlet L. G. P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 93–95.

7. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279-284.

8. Krass S. 1985, "The N-dimensional diophantine approximation constants", *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313-316.

9. Mack J. M. 1977, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266-285.

10. Nowak W. G. 1981, "A note on simultaneous Diophantine approximation", *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33-46.

11. Nowak W. G. 2016, "Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem", *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181-197.

12. Odlyzko A. M. 1990, “Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results“, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, Tome 2, No. 1, pp. 119–141.

13. Spohn W. G. 1968, “Blichfeldt’s theorem and simultaneous Diophantine approximation“, *Amer. J. Math.*, Vol. 90, pp. 885–894.

Получено 17.06.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-346-349

Об одном алгоритме поиска наилучших совместных диофантовых приближений[1]

Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова (г. Тула)

Басалов Юрий Александрович — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Басалова Анастасия Николаевна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается вопрос улучшение одного алгоритма поиска наилучших совместных диофантовых приближений и оценка его сложности.

Ключевые слова: диофантовы приближения, поиск наилучших совместных диофантовых приближений.

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова, Об одном алгоритме поиска наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 346–349.

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 19-41-710004 р_а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-346-349

On one algorithm for searching the best joint diophantine approximations

Yu. A. Basalov, A. N. Basalova (Tula)

Basalov Yurij Aleksandrovich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Basalova Anastasia Nikolaevna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: joy_of_life@mail.ru

Abstract

The article discusses the issue of improving one algorithm for finding the best joint Diophantine approximations and estimating its complexity.

Keywords: Diophanite approximations, searching best joint diophantine approximations.

Bibliography: 3 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, A. N. Basalova, 2021, “On one algorithm for searching the best joint diophantine approximations” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 346–349.

Рассмотрим действительный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Будем обозначать расстояние от действительного числа до ближайшего целого, как $\|x\|_s = min(\{x\}, 1 - \{x\})$, где $\{x\}$ – дробная часть числа x. В качестве меры приближений вектора $\vec{\alpha}$ целыми числами будем рассматривать

$$\delta(q, \vec{\alpha}) = \max_{i=\overline{1,k}} ||q\alpha_i||.$$

Целое число q будем называть наилучшим совместным диофантовым приближением вектора $\vec{\alpha}$, если для любого $d < q$

$$\delta(q, \vec{\alpha}) < \delta(d, \vec{\alpha}).$$

Известно, что если $\vec{\alpha}$ иррационален, то последовательность наилучших совместных диофантовых приближений q_i бесконечна [3]. В одномерном случае, последовательностью наилучших диофантовых приближений к числу β являются знаменатели подходящих цепных дробей к этому числу [3].

Для многомерного случая существуют различные алгоритмы позволяющие находить наилучшие совместные диофантовы приближения (например [2]), однако они ощутимо сложнее алгоритма разложения числа в цепную дробь.

В статье [1] нами был предложен следующий алгоритм поиска первых N совместных диофантовых приближений.

1. Положить $r = \delta(1, \vec{\alpha})$, $q_0 = 1$ и

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & p_{:\,0,1} & \ldots & p_{:\,0,k-1} & p_{:\,0,k} \end{pmatrix}.$$

где $p_{0,j}$ – ближайшее целое к α_j. Матрица e - описывает базис целочисленного линейного пространства. Каждое следующее наилучшее совместное диофантово приближение ищется как линейная комбинация векторов из этого базиса.

2. $n = 1$
3. Решить СЛАУ $e \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha}$
4. Нормировать вектор $\overrightarrow{x}$
5. Положить $M = 1, q_n = \infty$.
6. Перебираем точки, соседние точки $\overline{a}$ с точкой $[M \cdot \overrightarrow{x}]$
   (a) $s = \sum\limits_{1 \le j \le k+1} a_j \colon e_{j,0}$.
   (b) Если $s > q_{n-1}$ и $\delta(s, \vec{\alpha}) < r$ то $q_n = s$ новое потенциальное наилучшее совместное диофантово приближений.
7. Если $q_n = \infty$, то $M = M + 1$ и перейти на шаг (6).
8. $r = \delta(q_n, \vec{\alpha})$. Добавить в e вектор $\overrightarrow{e_n} = (q_n,\ p_{n,1},\ p_{n,2},\ \ldots,\ p_{n,k})$, где $p_{n,k}$ – это ближайшее целое к числу $q_n \cdot \alpha_k$.
9. По всем i от 1 до $k + 1$:
   (a) Если вектора $\{\overrightarrow{e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_{i-1}},\ \overrightarrow{e_{i+1}},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_{k+1}},\ \overrightarrow{e_n}\}$ линейно независимы, то новый базис $e = \{\overrightarrow{e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_{i-1}},\ \overrightarrow{e_{i+1}},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_{k+1}},\ \overrightarrow{e_n}\}$. Закончить перебор i.
   (b) Если $n = N$ закончить. Иначе $n = n + 1$, перейти на шаг (3).

Этот алгоритм основывается на направленном поиске нового наилучшего совместного диофантового приближения, как линейной комбинации предыдущих. Как отмечалось в статье [1], этот алгоритм имеет сложность $O(M \cdot 3^{k+1} \cdot N)$, где M – это максимальный параметр перебора, который может возникать в процессе работы алгоритма. Вопрос о его значения оставался ранее неизученным.

Покажем как можно оценить значения этого параметра. Рассмотрим n-ую итерацию алгоритма. Вначале итерации нам известно текущее r ($r = \delta(q_{n-1}, \vec{\alpha})$ – максимум расстояния от ближайшего целого, до $q_{n-1} \cdot \alpha_i$). Мы стараемся найти такое q_n, что $\delta(q_n, \vec{\alpha})$ будет меньше чем r. По теореме Дирихле [3] для любого Q существует $q < Q$, такое что

$$\delta(q, \vec{\alpha}) < \frac{1}{Q^{1/k}}.$$

Положив $Q = \left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^k$, получим оценку $q_n < Q$. Небольшое положительное число ϵ необходимо для случая когда $q_{n-1} = \left(\frac{1}{r}\right)^k$.

Теперь оценим значение M. Так как s это примерно $\sum\limits_{1 \le j \le k+1} [M \cdot x_j]\ e_{j,0}$, и если все $M \cdot x_j > 1$, то

$$M \approx \frac{s}{\sum\limits_{1 \le j \le k+1} x_j\ e_{j,0}}$$

Таким образом можно дать оценку

$$M < O(1) \cdot \max\left(\frac{\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^k}{\sum\limits_{1 \le j \le k+1} x_j\ e_{j,0}}, \frac{1}{\min \vec{x}} \right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю. А., Пацукова А. Н., О некоторых вопросах диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, Вып. 3, С. 4-27.

2. Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, Вып. 2, С. 35–65.

3. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

REFERENCES

1. Basalov Yu. A., Pacukova A. N. 2012, "On some questions in Diophanite approximations", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 13, Issue 3, pp. 4–27.

2. Bruno A. D. 2015, "Universal generalization of the continued fraction algorithm", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16, Issue 2, pp. 35–65.

3. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

Получено 17.06.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-350-353

О формуле Стирлинга

А. Гияси

Гияси Азар — департамент математики, факультет статистики, математики и компьютера; Алламех Табатабаи Университет (Иран).
email: azarghyasi@atu.ac.ir

Аннотация

В данной работе найден вариант формулы Стирлинга, полезный и удобный для приложений. Вывод формулы основан на двух известных утверждениях Эйлера: разложение гамма-функции в бесконечное произведение и формуле Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым числам.

Ключевые слова: гамма-функция Эйлера, формула Стирлинга, формула Эйлера–Маклорена–Сонина.

Библиография: 2 названия.

Для цитирования:
А. Гияси. О формуле Стирлинга // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, с. 350–353.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-350-353

About the Stirling formula

A. Ghyasi

Ghyasi Azar — department of mathematics, faculty of statistics, mathematics, and computer; Allameh Tabatabai University (Iran).
email: azarghyasi@atu.ac.ir

Abstract

In this paper the version of the Stirling formula is found. It is the useful and siutable for applications. A deduction of this formula is based on two the Euler's statements: the expansion of the Gamma-function into the infinite product and the Euler–MacLauren summation formula of values of the smooth function over integers.

Keywords: Euler gamma-function, Stirling formula, Euler–MacLauren–Sonin summation formula.

Bibliography: 2 titles.

For citation:
A. Ghyasi, 2021, “About the Stirling formula” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 350–353.

1. Введение

При любом натуральном $n \geq 1$ и любом вещественном $s > 0$ известная формула Стирлинга имеет вид

$$\ln \Gamma(s) = s \ln s - s - \frac{1}{2} \ln s + \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2n-3)(2n-2)s^{2n-3}} + r_n,$$

где

$$r_n = (-1)^{n-1} \theta \frac{B_n}{(2n-1)2n\xi^{2n-1}}, 0 < \theta < 1, 0 < \xi \leq s,$$

причем числа Бернулли $B_\nu, \nu \geq 1$, определяются из производящего ряда

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Эту формулу можно распространить на комплексные значения аргумента s. При значениях s достаточно больших по модулю и при положительной вещественной части s она часто используется в приложениях. Тем не менее при возрастании n ввиду быстрого роста чисел Бернулли B_n для фиксированного значения s формула Стирлинга не приводит к повышению точности вычисления значения $\ln \Gamma(s)$.

Настоящая статья посвящена выводу следующего утверждения

Теорема. Пусть $s \geq 2$ — любое вещественное число. Тогда справедлива формула

$$\ln \Gamma(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(s + \frac{1}{2}\right) - \left(s + \frac{1}{2}\right) - \ln s + \ln \sqrt{2\pi} + R,$$

где, полагая

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \sigma(x) = \int_0^x \rho(z)\, dz - \frac{1}{12},$$

имеем

$$R = \int_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}\, dx.$$

Вспомогательные утверждения.

Приведем общеизвестные теоремы Эйлера (см., например, [1],[2]).

Лемма 1. (Эйлер). *Справедливо следующее предельное соотношение*

$$\Gamma(s) = \lim_{m \to \infty} P_m(s),$$

где

$$P_m(s) = \frac{m^s (m-1)!}{s(s+1)\dots(m+s-1)}.$$

Лемма 2. (Формула Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым числам). *Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, и пусть*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \sigma(x) = \int_0^x \rho(z)\, dz - \frac{1}{12}.$$

Тогда имеем

$$\sum_{a<x\le b} f(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b \sigma(x) f''(x)\,dx +$$

$$+\rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \sigma(b)f'(b) + \sigma(a)f'(a).$$

Доказательство теоремы.

Воспользуемся леммой 1. Находим

$$\ln\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \ln P_n(s),$$

где

$$\ln P_n(s) = s\ln n - \ln s + S,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln k - \ln(k+s)).$$

По лемме 2 (формула Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым числам) имеем

$$S = A + B, A = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} (\ln x - \ln(x+s))\,dx,$$

$$B = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \sigma(x) \left(\frac{1}{(x+s)^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = B_1 - B_2.$$

Преобразуем интеграл A. Находим

$$A = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln x\,dx - \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln(x+s))\,dx =$$

$$= \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln x\,dx - \int\limits_{s+0,5}^{n+s-0,5} \ln x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0,5}^{s+0,5} \ln x\,dx - \int\limits_{n-0,5}^{n+s-0,5} \ln x\,dx = A_1 - A_2.$$

Интегрируя A_1, получим

$$A_1 = (x\ln x - x)|_{0,5}^{s+0,5} = (s+0,5)\ln(s+0,5) - s + 0,5\ln 2.$$

При $n\to\infty$ имеем $\ln(1+x/n) = O(x/n)$. Следовательно,

$$A_2 = s\ln n + \int\limits_{-0,5}^{s-0,5} \ln(1+x/n)\,dx = s\ln n + O(s^2/n).$$

Таким образом, интеграл A примет вид

$$A = (s+0,5)\ln(s+0,5) - s - s\ln n + c_1 + O(s^2/n).$$

Далее преобразуем интеграл B. Имеем

$$B_1 = \int\limits_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}\,dx + O\left(\frac{1}{s+n-0,5}\right),$$

$$B_2 = \int\limits_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2}\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Собирая вместе полученные результаты и устремляя n к бесконечности, находим

$$\ln\Gamma(s) = A + B = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) + c_0 + \int\limits_{0,5}^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}\,dx.$$

Константа $c_0 = \ln\sqrt{2\pi}$ вычисляется стандартным образом с помощью формулы Лежандра удвоения аргумента гамма-функции Эйлера:

$$2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+0,5) = \Gamma(0,5)\Gamma(2s).$$

2. Заключение

На наш взгляд, полученный нами вариант формулы Стирлинга, может оказаться полезным и удобным в приложениях. Использование формулы Эйлера–Маклорена для функций большей гладкости приводит к более громоздким и сложным соотношениям.

Автор приносит глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. де ла Валле-Пуссен Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых. т.II. — М.-Л.: Гос.техн.-теор. изд-во, 1933, 169-200.

2. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 435-437.

REFERENCES

1. de la Vallee Poussin Ch.-J. 1912. Cours de Analyse Infinitesimale — Paris.

2. Arkhipov G. I.„ Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lecture on mathematical analysis. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. 435-437.

Получено 14.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-354-358

Уточнение константы Бернштейна — Никольского для сферы с весом Данкля в случае группы октаэдра[1]

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский, И. А. Мартьянов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула)
e-mail: dvgmail@mail.ru
Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Мы продолжаем исследование точных констант Бернштейна — Никольского для сферических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля. Рассматривается модельный случай группы отражений октаэдра $\mathbb{Z}_2^{d+1}$ и веса $\prod_{j=1}^{d+1}|x_j|^{2\kappa_j}$, когда известен явный вид оператора сплетения Данкля. Мы показываем, что при $\min\kappa = 0$ многомерная задача сводится к одномерной для веса Гегенбауэра, иначе нет.

Ключевые слова: сферический полином, воспроизводящее ядро, вес Данкля, константа Бернштейна — Никольского.

Библиография: 4 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский, И. А. Мартьянов Уточнение константы Бернштейна — Никольского для сферы с весом Данкля в случае группы октаэдра // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 354–358.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-354-358

Refinement of Bernstein–Nikolskii constant for the sphere with Dunkl weight in the case of octahedron group

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii, I. A. Martyanov

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Martyanov Ivan Anatol'evich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

We continue the study of the sharp Bernstein–Nikolskii constants for spherical polynomials in the space $L^p(\mathbb{S}^d)$ with the Dunkl weight. We consider the model case of the octahedral reflection group $\mathbb{Z}_2^{d+1}$ and weight $\prod_{j=1}^{d+1}|x_j|^{2\kappa_j}$ when the explicit form of the Dunkl intertwining operator is known. We show that for $\min\kappa=0$ the multidimensional problem is reduced to the one-dimensional problem for the Gegenbauer weight, otherwise not.

Keywords: spherical polynomial, reproducing kernel, Dunkl weight, Bernstein–Nikoskii constant.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii, I. A. Martyanov, 2021, "Refinement of Bernstein–Nikolskii constant for the sphere with Dunkl weight in the case of octahedron group" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 354–358.

В работе [1] мы доказали следующее общее утверждение о взаимосвязи многомерных и одномерных весовых констант Бернштейна — Никольского в пространствах $L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля и $L^p_{w_\alpha}([-1,1])$ с весом Гегенбауэра. Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $d\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\geqslant 0$, $x_0\in\mathbb{S}^d$. Тогда

$$\sup\left|\sum_{j=0}^{n}(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\widetilde{Z}_j^{\kappa}(x_0,x_0)\right|\leqslant C_{p,\kappa}(d,n,r)\leqslant \sup\left|\sum_{j=0}^{n}(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\right|=C_{p,\alpha_\kappa}(n,r), \qquad (1)$$

где супремумы берутся по всем полиномам $g\in\mathcal{P}_n$, для которых $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}=1$.

Интересно уточнить границы (1). Вначале напомним обозначения и основные факты из [1] (см. также [2, 3]). Через $L^p_v(X)$ обозначается весовое пространство измеримых функций $f\colon X\to\mathbb{C}$ с конечной нормой $\|f\|_{p,v}=\bigl(c_v\int_X|f(x)|^pv(x)\,dx\bigr)^{1/p}$ при $p<\infty$, где $c_v^{-1}=\int_X v(x)\,dx$; $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|$.

Пусть $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^{d+1}$; Π_n^d — пространство сферических полиномов на $\mathbb{S}^d$ порядка не выше $n\in\mathbb{Z}_+$; $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше n; $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ — модифицированные полиномы Гегенбауэра, ортогональные на $[-1,1]$ с весом $w_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$; $D_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} t}\,\frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор Гегенбауэра; для $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t) \in \mathcal{P}_n$ имеем $(-D_\alpha)^{r/2} g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j \lambda_{\alpha,n}^{r/2} R_n^{(\alpha)}(t)$, где $\lambda_{\alpha,n} = n(n+2\alpha+1)$.

Через $v_\kappa(x) = \prod_{a\in R_+} |\langle a,x\rangle|^{2\kappa(a)}$ обозначается вес Данкля на $\mathbb{R}^{d+1}$, где R_+ — положительная подсистема выбранной системы корней $R \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa\colon R \to \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений $G(R)$. Сужение v_κ на $\mathbb{S}^d$ называется сферическим весом Данкля. Имеем $\Pi_n^d = \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространство κ-гармоник порядка j; $\{Y_{ji}\}_{i=1}^{h_j(d)}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $h_j(d) = \dim \mathcal{H}_j^d(v_\kappa) = \frac{2j+d-1}{d-1}\binom{j+d-2}{j}$ не зависит от κ; $\operatorname{proj}_j^\kappa$ — проектор на $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $\Delta_{\kappa,0}$ — оператор Бельтрами–Данкля; $(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} \operatorname{proj}_j^\kappa = (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2} \operatorname{proj}_j^\kappa$, где $\alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1$ и $d_\kappa = d + 2\sum_{a\in R_+} \kappa(a)$ — размерность Данкля.

Пусть $Z_j^\kappa(x,y) = \sum_{i=1}^{h_j(d)} Y_{ji}(x)\overline{Y_{ji}(y)}$ — воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, $\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y) = \frac{Z_j^\kappa(x,y)}{h_j(d_\kappa)}$. Тогда $\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y) = V_\kappa[R_j^{(\alpha_\kappa)}(\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)$, где V_κ — оператор сплетения Данкля.

Константы Никольского–Бернштейна в $L_{v_\kappa}^p(\mathbb{S}^d)$ и $L_{w_\alpha}^p([-1,1])$ в (1) определяются соответственно равенствами

$$C_{p,\kappa}(d,n,r) = \sup_{f\in\Pi_n^d\setminus\{0\}} \frac{\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} f\|_\infty}{\|f\|_{p,v_\kappa}}, \quad C_{p,\alpha}(n,r) = \sup_{g\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|(-D_\alpha)^{r/2} g\|_\infty}{\|g\|_{p,w_\alpha}}.$$

Для $\kappa = 0$ имеем $\widetilde{Z}_j^0(x_0,x_0) = 1$ для всех x_0 и j, поэтому (1) влечет

$$C_{p,0}(d,n,r) = C_{p,d/2-1}(n,r).$$

Для $\kappa \neq 0$ задача становится сложной. В [1] был поставлен вопрос о поведении величин $\widetilde{Z}_j^0(x_0,x_0)$ и, как следствие, точности неравенств (1).

Рассмотрим модельный случай группы октаэдра $G(R) = \mathbb{Z}_2^{d+1}$, когда известен явный вид оператора сплетения [2]. В этом случае $R = \{\pm e_1,\dots,\pm e_{d+1}\}$, $R_+ = \{e_j\}_{j=1}^{d+1}$ — единичные орты $\mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa(\pm e_j) = \kappa_j \geqslant 0$, $v_\kappa(x) = \prod_{j=1}^{d+1} |x_j|^{2\kappa_j}$,

$$V_\kappa f(x) = c_\kappa \int_{[-1,1]^{d+1}} f(x_1t_1,\dots,x_{d+1}t_{d+1}) \prod_{i=1}^{d+1} (1+t_i)(1-t_i^2)^{\kappa_i-1}\,dt, \tag{2}$$

где константа $c_\kappa = c_{\kappa_1}\dots c_{\kappa_{d+1}}$ выбрана из условия $V_\kappa 1 = 1$ и используется соглашение, что для $\kappa_i = 0$ нужно заменить $c_{\kappa_i}(1-t_i^2)^{\kappa_i-1}\,dt_i$ мерой Дирака $\frac{\delta_{-1}(t_i)+\delta_1(t_i)}{2}\,dt_i$.

Пусть

$$\min\kappa = \min_{i=1,\dots,d+1} \kappa_i.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\min\kappa = \kappa_1 \geqslant 0$. Тогда по формуле [2, (7.2.14)] имеем

$$Z_j^\kappa(e_1,e_1) = \frac{j+\lambda_\kappa}{\lambda_\kappa}\, C_j^{(\lambda_\kappa-\kappa_1,\kappa_1)}(1), \quad \lambda_\kappa = \alpha_\kappa + \tfrac{1}{2},$$

где $C_j^{(\lambda,\mu)}(t)$ — обобщенные полиномы Гегенбауэра [2, прил. B]. При $\mu = 0$ они совпадают с классическими полиномами Гегенбауэра $C_j^\lambda(t)$. Поэтому

$$\widetilde{Z}_j^\kappa(e_1,e_1) = \frac{C_j^{(\lambda_\kappa-\kappa_1,\kappa_1)}(1)}{C_j^{(\lambda_\kappa,0)}(1)}.$$

Пусть $\kappa_1 = 0$. Тогда $\widetilde{Z}_j^{\kappa}(e_1, e_1) = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Данный факт также следует напрямую из (2) и соглашения для меры:

$$\widetilde{Z}_j^{\kappa}(e_1, e_1) = \int_{-1}^{1} R_j^{(\alpha_\kappa)}(t_1)(1+t_1)\,\frac{\delta_{-1}(t_1)+\delta_1(t_1)}{2}\,dt_1 = R_j^{(\alpha_\kappa)}(1) = 1.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $G(R) = \mathbb{Z}_2^{d+1}$ и $\min\kappa = 0$, то*

$$C_{p,\kappa}(d,n,r) = C_{p,\alpha_\kappa}(n,r).$$

Замечание 1. *Данное предложение позволяет использовать результаты для одномерных весовых констант Бернштейна — Никольского в многомерном случае. Например, из результатов работы [4] следует, что для константы Никольского при $p \in [1,\infty)$*

$$C_{p,\alpha}(n,0) = L_{p,\alpha} n^{(2\alpha+2)/p}(1 + O(n^{-1})), \quad n \to \infty,$$

где $L_{p,\alpha}$ — константа Никольского в пространстве $L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})$ для целых функций экспоненциального типа. Поэтому в условиях предложения 1 будет

$$C_{p,\kappa}(d,n,0) = L_{p,\alpha_\kappa} n^{d_\kappa/p}(1 + O(n^{-1})).$$

Для $\kappa_1 > 0$ равенство из предложения 1 неверно, поэтому оценка $C_{p,\kappa}(d,n,0) \leqslant cn^{d_\kappa/p}$, предложенная в [1], неточная. Действительно, из общего порядкового неравенства Никольского для весов с условием удвоения (см. [2], теорема 5.5.1 и пример 5.1.4) следует, что

$$C_{p,\kappa}(d,n,0) \leqslant cn^{(d_\kappa - 2\min\kappa)/p}, \quad n \to \infty.$$

В этой связи также заметим, что в силу формулы [2, (B.3.2)] для $j_0 = \lceil j/2 \rceil$

$$\widetilde{Z}_j^{\kappa}(e_1, e_1) = \frac{C_j^{(\lambda_\kappa - \kappa_1, \kappa_1)}(1)}{C_j^{(\lambda_\kappa, 0)}(1)} = \frac{(\lambda_\kappa - \kappa_1 + \frac{1}{2})_{j_0}(\frac{1}{2})_{j_0}}{(\lambda_\kappa + \frac{1}{2})_{j_0}(\kappa_1 + \frac{1}{2})_{j_0}} \asymp j^{-2\kappa_1}, \quad j \to \infty.$$

Таким образом, требуется дальнейшее исследование проблемы взаимосвязи точных весовых многомерных и одномерных констант Бернштейна — Никольского. Одна из идей в случае группы $\mathbb{Z}_2^{d+1}$ состоит в сведение к одномерной задаче для общих весов типа Якоби.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.

2. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. N.Y.: Springer, 2013.

3. Dai F., Xu Yu. Analysis on h-harmonics and Dunkl transforms. Basel: Birkhauser/Springer, CRM Barcelona, 2015.

4. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

REFERENCES

1. Gorbachev, D.V. & Dobrovol'skii, N.N. 2020. "Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307. (In Russ.)

2. Dai, F. & Xu, Yu. 2013. "Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls", Springer, N.Y.

3. Dai, F. & Xu, Yu. 2015. "Analysis on h-harmonics and Dunkl transforms", Birkhauser/Springer, Basel, CRM Barcelona.

4. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

Получено 15.09.2021 г.
Принято в печать 5.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

Об одном функциональном уравнении[1]

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе изучается гиперболическая дзета-функция двумерной решётки приближений Дирихле. Найдено функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β, которое задаёт аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка.

Найденное функциональное уравнение позволяет ставить вопрос о непрерывности для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция Гурвица.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Об одном функциональном уравнении // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 359–364.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-359-364

About one functional equation

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations is studied. A functional equation is found for the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the case of rational β, which sets an analytical continuation on the entire complex plane, except for the point $\alpha = 1$, in which the pole is of the first order.

The found functional equation allows us to raise the question of continuity for the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of Dirichlet approximations in the case of rational β.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, Hurwitz zeta function.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "About one functional equation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 359–364.

1. Введение

В работах [2] – [4] была решена проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки. В работе [6] эта проблема нашла своё решение для случая гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки.

Уже случай двумерной решётки приближений Дирихле в случае иррационального β не является декартовой решёткой.

Цель настоящей работы — найти удобное функциональное уравнение для двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β.

2. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле

Пусть у нас задано вещественное число $\beta > 0$. Рассмотрим решетку Дирихле диофантовых приближений $\Lambda(\beta)$, заданную равенством

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p))|q, p \in \mathbb{Z}\}$$

с базисом $\vec{\lambda}_1 = (1, \beta)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, -1)$.

Если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова решётка, в противном случае она не является декартовой решёткой. В любом случае она является унимодулярной решёткой.

Гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(\beta)$ задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda(\beta)|\alpha) = \sum_{(q,p)\neq(0,0)} \frac{1}{(\overline{q}\overline{q\beta - p})^{\alpha}}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

где $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x.

Сначала рассмотрим случай рационального $\beta = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $b \geqslant 1$. Найдём выражение гиперболической дзета-функции $\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\,\alpha\right)$ решётки $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$ через периодизированную дзета-функцию Гурвица $\zeta^*(\alpha, w)$, которая в правой полуплоскости задается равенством

$$\zeta^*(\alpha, w) = \sum_{n+w>0} (n + w)^{-\alpha} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, & \text{при } \{w\} = 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + \{w\})^{-\alpha}, & \text{при } \{w\} > 0 \end{cases}, \ \alpha = \sigma + it, \ \sigma > 1.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\,\alpha\right) = \frac{2\zeta(\alpha)(1 + 2\zeta(\alpha))}{b^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{k}{b}\right)}{b^{\alpha}} \cdot$$
$$\cdot\left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^{\alpha}} - \frac{1}{\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^{\alpha}}\right)$$

Доказательство. Действительно, сделаем замену переменных суммирования $q = bn + k$, $k = 0, 1, \ldots, b - 1$, $p = an + \left[\frac{ak}{b}\right] - m$, получим

$$\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\middle|\,\alpha\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|bn|^{\alpha}} + \frac{1}{|-bn|^{\alpha}}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{m}^{\alpha}} +$$
$$+\sum_{k=1}^{b-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|bn + k|^{\alpha}}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{m + \left\{\frac{ak}{b}\right\}}^{\alpha}}\right) = \frac{2\zeta(\alpha)(1 + 2\zeta(\alpha))}{b^{\alpha}} +$$
$$+\sum_{k=1}^{b-1}\frac{\zeta^*\left(\alpha, \frac{k}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{k}{b}\right)}{b^{\alpha}} \cdot$$
$$\cdot\left(\zeta^*\left(\alpha, \frac{ka}{b}\right) + \zeta^*\left(\alpha, 1 - \frac{ak}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^{\alpha}} - \frac{1}{\left(1 - \left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^{\alpha}}\right)$$

и лемма полностью доказана. □

Для получения аналитического продолжения потребуется продолжение периодизированной дзета-функции Гурвица на всю комплексную плоскость (см. [5]).

$$\zeta^*(\alpha; b) =$$

$$
=\begin{cases}
\sum\limits_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}, & \sigma>1,\\
\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\scriptstyle \{b\}=0,\ \sigma>-1},\\
\frac{1}{\{b\}^\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}+(1-\{b\})\left(1-\frac{\alpha\{b\}}{2}\right)-I_2\left(\alpha;1-\{b\},\{b\}\right), & {\scriptstyle \{b\}\neq 0,\ \sigma>-1},\\
2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}+\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right), & \sigma<0,
\end{cases} \tag{1}
$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция и

$$
I_2(\alpha;q,\beta)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int\limits_q^\infty\frac{\{x\}^2-\{x\}}{(x+\beta)^2}dx,\quad q>0,\quad 0<\beta\leqslant 1.
$$

В работе [5] показано, что для $\alpha=\sigma+it$, $\sigma<0$ справедливо равенство

$$
\zeta^*(\alpha;w)+\zeta^*(\alpha;1-w)=2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha;w),
$$

где $M(\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ — множитель Римана,

$$
\zeta^{**}(\alpha;b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^\alpha},\quad (\sigma>1). \tag{2}
$$

— дзета-функция Гурвица второго рода.

Кроме этого нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана: $\zeta(\alpha)=M(\alpha)\zeta(1-\alpha)$.

Учитывая всё выше изложенное, получаем новое функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции декартовой решётки $\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)$.

Теорема 1. *При $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$
\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\Big|\,\alpha\right)=\frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)(1+2M(\alpha)\zeta(1-\alpha))}{b^\alpha}+\sum_{k=1}^{b-1}\frac{2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha;\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}\cdot
$$
$$
\cdot\left(2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha,\frac{ka}{b}\right)+2-\frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha}-\frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right).
$$

Доказательство. Действительно, по лемме 1 имеем:

$$
\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\Big|\,\alpha\right)=\frac{2\zeta(\alpha)(1+2\zeta(\alpha))}{b^\alpha}+\sum_{k=1}^{b-1}\frac{\zeta^*\left(\alpha,\frac{k}{b}\right)+\zeta^*\left(\alpha,1-\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}\cdot
$$
$$
\cdot\left(\zeta^*\left(\alpha,\frac{ka}{b}\right)+\zeta^*\left(\alpha,1-\frac{ak}{b}\right)+2-\frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^\alpha}-\frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^\alpha}\right).
$$

Подставляя сюда функциональное уравнение для дзета-функции Римана и периодизированной дзета-функции Гурвица, получим:

$$
\zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{a}{b}\right)\Big|\,\alpha\right)=\frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)(1+2M(\alpha)\zeta(1-\alpha))}{b^\alpha}+\sum_{k=1}^{b-1}\frac{2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha;\frac{k}{b}\right)}{b^\alpha}\cdot
$$

$$\cdot \left(2M(\alpha)\zeta^{**}\left(1-\alpha, \frac{ka}{b}\right) + 2 - \frac{1}{\left\{\frac{ak}{b}\right\}^{\alpha}} - \frac{1}{\left(1-\left\{\frac{ak}{b}\right\}\right)^{\alpha}} \right)$$

и теорема полностью доказана. □

3. Заключение

Найденное функциональное уравнение позволяет ставить вопрос о непрерывности для гиперболической дзета-функции двумерной решётки приближений Дирихле в случае рационального β в левой полуплоскости. Изучение этого вопроса будет темой следующих статей по этой теме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

2. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

3. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

6. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

2. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

3. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Doklady akademii nauk, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.

4. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, no. 3, pp. 18–23.

5. Dobrovol’skii, N. M., Dobrovol’skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol’skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, “On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ”, Chebyshevskij sbornik, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.ский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

6. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Dobrovol’skii, N. N. 2014, “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices”, Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 19.06.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

Об обобщённых неравномерных сетках Коробова[1]

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульскй государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе рассмотрены обобщённые неравномерные сетки Коробова.

Рассмотрены три новых конструкции: произведение неравномерных сеток по взаимно простым модулям; модифицированные неравномерные сетки; произведение неравномерной сетки и параллелепипедальной сетки по взаимнопростому модулю.

Установлен парадоксальный результат о величине математического ожидания погрешности приближенного интегрирования по модифицированным неравномерным сеткам.

Показано, что алгоритм приближенного интегрирования с помощью произведения неравномерной сетки и параллелепипедальной сетки по взаимнопростому модулю является ненасыщаемым с порядком $\frac{\alpha}{2}$.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция сетки, неравномерные сетки Коробова, гиперболическая дзета-функция решётки.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об обобщённых неравномерных сетках Коробова // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 365–373.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-365-373

On generalized non-uniform Korobov grids[2]

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

Generalized non-uniform Korobov grids are considered in the paper.

Three new constructions are considered: the product of non-uniform grids by mutually simple modules; modified non-uniform grids; the product of an uneven grid and a parallelepipedal grid by a mutually simple module.

A paradoxical result is established about the value of the mathematical expectation of the error of approximate integration over modified non-uniform grids.

It is shown that the algorithm of approximate integration using the product of an uneven grid and a parallelepipedal grid in a mutually simple module is unsaturated with the order $\frac{\alpha}{2}$.

Keywords: hyperbolic zeta function of the grid, uneven Korobov grids, hyperbolic zeta function of the lattice.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On generalized non-uniform Korobov grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 365–373.

1. Введение

В 1956 — 1960 годах при создании теоретико-числового метода в приближенном анализе Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций E_s^α $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье, состоящий из функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) e^{2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)} \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{2}$$

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

где константа C не зависит от $m_1, \ldots, m_s$, и для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, а поэтому для любого ($\alpha > 1$) они представляют непрерывные функции.

Рассмотрение классов периодических функций в теоретико-числовом методе в приближенном анализе не является случайным. Дело в том, что особая роль теории чисел в вопросах интегрирования периодических функций была выявлена ещё сто лет тому назад в знаменитой работе Г. Вейля, с которой начинается теория равномерного распределения по модулю 1, и в которой получил общее развитие метод тригонометрических сумм, возникший в работах К. Ф. Гаусса ещё в 1811 г.. Фактически интегральный критерий Г. Вейля, доказанный сто лет тому назад, является предшественником теоретико-числового метода Н. М. Коробова в приближенном анализе, который начал создаваться на семинаре **трёх К** в 1956 году через 40 лет после работы Г. Вейля.

Позднее Н. Н. Ченцов, один из трёх руководителей семинара **трёх К**, предложил метод периодизации задач численного интегрирования, который позволил расширить класс функций, для которых можно применять методы теории чисел. С этими методами можно ознакомиться по монографиям [3], [4] и работе [2].

Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.

2. Определения и основные свойства

Классические неравномерные сетки $M(P)$ Коробова, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{P}\right\}, \left\{\frac{k^2}{P}\right\} \ldots, \left\{\frac{k^s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, P), \tag{3}$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left|S^*_{M(P)}(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1, \ldots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \ldots, m_s, p) = p. \end{cases} \tag{4}$$

Поведение рациональных тригонометрических сумм достаточно сложное, поэтому мы не можем дать исчерпывающее описание разбиения Коробова для неравномерных сеток. Можно утверждать только следующее: $K_4 = \emptyset$, $K_1 = P\mathbb{Z}^s$, при $P > (s-1)^2$ имеем $K_0 \bigcup K_3 \supset \mathbb{Z}^s \setminus p\mathbb{Z}^s$. Если $P = p$, то $K_2 = \emptyset$. Если $P = p^2$, то $K_2 \subset p\mathbb{Z}^s \setminus P\mathbb{Z}^s$.

Из вида неравномерных сеток вытекает одно обобщение их, связанное с рассмотрением произвольного P. Такое обобщение приводит к необходимости использовать для оценок погрешности общие рациональные тригонометрические сумм, которые имеют другой вид оценок чем сумм по простому модулю, или по квадрату простого.

Другое обобщение неравномерных сеток возникает из использования конструкции произведения сеток.

Пусть p — нечетное простое число, тогда рассмотрим сетку $M_2(p) = M(p) \cdot M(p)$. Очевидно, что $|M_2(p)| \leqslant p^2$. Сетка $M_2(p)$ имеет вид

$$M_2(p) = \left\{\left(\left\{\frac{x+y}{p}\right\}, \left\{\frac{x^2+y^2}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{x^s+y^s}{p}\right\}\right) \middle| \, 0 \leqslant x, y \leqslant p-1\right\}. \tag{5}$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_2(p)$ имеем:

$$\left|S^*_{M_2(p)}(\vec{m})\right| = \left|S^*_{M(p)}(\vec{m})\right|^2 \leqslant \begin{cases} \dfrac{(s-1)^2}{p} & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,p)=1, \\ 1 & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,p)=p. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда следует, что если $N = |M_2(p)|$, то погрешность приближенного интегрирования с помощью обобщенных неравномерных сеток $M_2(p)$ имеет $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, аналогичную оценки погрешности неравномерных сеток Коробова.

Ещё один класс неравномерных сеток получается, если брать произведение неравномерных сеток по разным модулям. Пусть $p_1,\ldots,p_k$ — различные нечетные простые числа, тогда рассмотрим сетку

$$M_s(\vec{p}) = M_s(p_1,\ldots,p_k) = M(p_1)\cdot\ldots\cdot M(p_k).$$

Очевидно, что $N = |M_s(p_1,\ldots,p_k)| = p_1\cdot\ldots\cdot p_k$. Сетка $M_s(p_1,\ldots,p_k)$ имеет

$$M_s(p_1,\ldots,p_k)=\left\{\left(\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{p_j}\right\},\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{p_j}\right\},\ldots,\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^s}{p_j}\right\}\right)\middle|\begin{array}{l}0\leqslant x_j\leqslant p_j-1\\ j=1,2,\ldots,k\end{array}\right\}. \tag{7}$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_s(\vec{p})$ имеем:

$$\left|S^*_{M_s(\vec{p})}(\vec{m})\right| = \prod_{j=1}^{k}\left|S^*_{M(p_j)}(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{(s-1)^t}{\sqrt{\prod\limits_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}}} & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,N)=\frac{N}{\prod\limits_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}}, \\ 1 & \text{при } (m_1,\ldots,m_s,N)=N. \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 1. *Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M_s(\vec{p})$ справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha,1|M_s(\vec{p})) \leqslant \frac{s^k(1+2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{N}}. \tag{9}$$

Последняя теорема позволяет сделать вывод, что наилучшая оценка погрешности получается для обычных неравномерных сеток, хотя порядок во всех этих случаях одинаковый.

3. Специальная простейшая периодизация и сетки второго рода

Известные способы периодизации либо приводят к увеличению объема вычислений интегрируемой функции, либо используют весовые функции и их производные для преобразования точек сетки.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f(\vec{x})$, заданную на единичном s-мерном кубе $\overline{G}_s = [0;1]^s$. Пусть у нас имеется сетка $M \subset G_s = [0;1)^s$. Дальше мы построим новую сетку $M_1 \subset \overline{G}_s$, которая позволяет рассматривать интегрируемую функцию как "периодическую".

Рассмотрим замкнутый куб $K_s = [0;2]^s$ и определим новую функцию $f_1(\vec{x})$ на кубе K_s, осуществляющую простейшую периодизацию:

$$f_1(\vec{x})=f(\vec{y}),\quad \text{где } \vec{x}=(x_1,\ldots,x_s),\quad \vec{y}=(y_1,\ldots,y_s),\quad y_j=\begin{cases} x_j, & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x_j, & \text{при } 1\leqslant x_j\leqslant 2.\end{cases}$$

Ясно, что

$$\iint\limits_{\overline{G}_s} f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{2^s}\iint\limits_{K_s} f_1(\vec{x})d\vec{x}$$

и функция $f_1(\vec{x})$ периодическая на кубе K_s.

Рассмотрим квадратурную формулу на кубе K_s, построенную с помощью сетки из N точек $M = \{M_1, \ldots, M_N\}$ следующим образом:

$$\frac{1}{2^s}\iint\limits_{K_s} f_1(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_1(2M_j) - R_N[f_1],$$

где $R_N[f_1]$ — линейный функционал погрешности квадратурной формулы.

Так как функция $f_1(\vec{x})$ выражается через функцию $f(\vec{x})$, то данную квадратурную формулу можно переписать как квадратурную формулу для функции $f(\vec{x})$ с новой сеткой $M^* = \{M_1^*, \ldots, M_N^*\}$, узлы которой заданы равенствами:

$$M_j^* = (M_{1,j}^*, \ldots, M_{s,j}^*), \quad M_{\nu,j} = \begin{cases} 2M_{\nu,j}, & \text{при } 0 \leqslant M_{\nu,j} \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2 - 2M_{\nu,j}, & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant M_{\nu,j} < 1, \end{cases}$$

$$\iint\limits_{\overline{G}_s} f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(M_j^*) - R_N[f].$$

Предложенную простейшую периодизацию будем называть специальной простейшей периодизацией а сетку $M^* = \{M_1^*, \ldots, M_N^*\}$ — сеткой второго рода.

4. Оценки математического ожидания погрешности приближенного интегрирования на классе обобщенных неравномерных сеток Коробова

Наряду с неравномерными сетками (3) рассмотрим ещё один класс обобщённых неравномерных сеток $M(P, \vec{a})$, координаты точек которых имеют вид

$$M_k(\vec{a}) = \left(\left\{\frac{k + a_1}{P}\right\}, \left\{\frac{k^2 + a_2}{P}\right\} \ldots, \left\{\frac{k^s + a_s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, P), \tag{10}$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left|S_{M(P,\vec{a})}^*(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1, \ldots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \ldots, m_s, p) = p. \end{cases} \tag{11}$$

Повторяя дословно рассуждения Н. М. Коробова для неравномерных сеток получаем для произвольной сетки вида 10 такой же результат.

Теорема 2. *Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M(P, \vec{a})$ справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, 1|M(P, \vec{a})) \leqslant \frac{s(1 + 2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{P}}. \tag{12}$$

У нас имеется P^s различных сеток $M(P, \vec{a})$. Из теоремы 2 следует, что если взять случайным образом произвольную сетку $M(P, \vec{a})$ и численно проинтегрировать произвольную функцию $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, то для погрешности интегрирования $R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})]$ справедлива оценка $|R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})]| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot s(1+2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{P}}$. Возникает вопрос об оценке математического ожидания $M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])$. Получается следующий парадоксальный результат

Теорема 3. *Для математического ожидания $M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])$ справедлива оценка*

$$|M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot (1+2\zeta(\alpha))^s}{P^\alpha}. \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, для погрешности $R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})]$ для сетки $M(P,\vec{a})$ имеем следующее представление через ряд Фурье

$$R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})] = \frac{1}{P} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m}) \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i \frac{m_1(a_1+k)+\ldots+m_s(a_s+k^s)}{P}} =$$
$$= \frac{1}{P} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m}) e^{2\pi i \frac{m_1a_1+\ldots+m_sa_s}{P}} \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i \frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{P}}. \tag{14}$$

Отсюда для математического ожидания $M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])$ получаем

$$M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})]) = \frac{1}{P^s} \sum_{a_1,\ldots,a_s=0}^{P-1} R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})] =$$
$$= \frac{1}{P} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})\delta_P(m_1)\ldots\delta_P(m_s) \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i \frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{P}} = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(P\vec{m}). \tag{15}$$

Переходя к оценке коэффициентов Фурье, получим

$$|M(R_{P,\vec{a}}[f(\vec{x})])| \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{Pm_1}\ldots\overline{Pm_s})^\alpha} =$$
$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(\left(1+\frac{2\zeta(\alpha)}{P^\alpha}\right)^s - 1\right) < \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot (1+2\zeta(\alpha))^s}{P^\alpha} \tag{16}$$

и теорема полностью доказана. □

5. Модифицированные сетки и произведение сеток

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую сетку $M+\vec{z}$ и дадим следующие определения.

Определение 1. *Для произвольной сетки M и произвольного $\vec{z}$ модифицированной сеткой $M(\Lambda,\vec{z})$ назовем множество $M(\vec{z}) = (M+\vec{z}) \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\vec{z}) = (M+\vec{z}) \cap [-1;1)^s$.

Модифицированной сеткой II рода $M'(\vec{z})$ назовем множество

$$M'(\vec{z}) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\vec{z})\}.$$

Определение 2. *Квадратурной формулой с модифицированной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ назовем формулу вида*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (|M'(\vec{z})|)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(M,\vec{z})}[f],$$
$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\vec{z}),\{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(M,\vec{z}) = |M'(M,\vec{z})|,$$

$R_{N'(M,\vec{z})}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Квадратурные формулы с модифицированной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется сетка M_1 и параллелепипедальная сетка M_2. Рассмотрим произведение этих сеток:

$$M = M_1 \cdot M_2 = \{\{\vec{x}+\vec{y}\}|\vec{x}\in M_1,\, \vec{y}\in M_2\}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{|M_2|}\sum_{\vec{z}\in M_2}\left(|M'(\vec{z})|^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\vec{z})}\rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(M_1,\vec{z})}[f]\right), \tag{17}$$

$$R_{N'(M)}[f] = \frac{1}{|M_2|}\sum_{\vec{z}\in M_2} R_{N'(M',\vec{z})}[f]. \tag{18}$$

Формулы (17) — (18) являются аналогами основы для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [1], стр. 192, 193).

Определение 3. *Для концентрической пары сеток II типа $M_1 \subset M = M_1\cdot M_2$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину*

$$\Delta = \frac{1}{|M_2|}\sum_{\vec{z}\in M_2}|R_{N'(M_1,\vec{z})}[f] - R_{N'(M_1)}[f]|^2. \tag{19}$$

Нетрудно понять, что определение 3 согласуется с аналогичным определение из работы [1] (см. стр. 204), так как сетка M является произведением сетки M_1 и сетки M_2.

Теорема 4. *Пусть $M_1 = M(P)$ — неравномерная сетка, $P = p$ — простое число, $p > s \geqslant 2$, а $M_2 = M(\vec{a}; N)$ — параллелепипедальная сетка, для которой дзета-функция решётки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a};N)|\alpha) \leqslant c(\alpha,s)\frac{\ln^{\alpha(s-1)}N}{N^\alpha}$, и $N < P$. Для погрешности квадратурной формулы (17) справедлива оценка*

$$|R_{N'(M)}[f]| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\cdot c(\alpha,s)\ln^{\alpha(s-1)}N}{N^\alpha}\cdot\left(\frac{s-1}{\sqrt{P}}+\frac{1}{P^\alpha}\right). \tag{20}$$

Доказательство. Действительно, точки сетки $M = M(P)\cdot M(\vec{a};N)$ имеют вид

$$\left(\left\{\frac{k}{P}+\frac{n}{N}\right\}, \left\{\frac{k^2}{P}+\frac{na_1}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{P}+\frac{na_{s-1}}{N}\right\}\right), \quad 0\leqslant k\leqslant P-1,\, 0\leqslant n\leqslant N-1.$$

Отсюда следует, что

$$R_{N'(M)}[f] = \frac{1}{PN}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=0}^{N-1}{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' c(m_1,\ldots,m_s)e^{2\pi i\left(\frac{km_1}{P}+\frac{nm_1}{N}+\ldots+\frac{k^s m_s}{P}+\frac{na_{s-1}m_s}{N}\right)}.$$

Переходя к оценкам и учитывая равенство

$$\delta_N(p(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s)) = \delta_N(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s)$$

и оценку $\frac{1}{(\overline{pm_1}\ldots\overline{pm_s})^\alpha}\leqslant\frac{1}{p^\alpha(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}$ при $(m_1,\ldots,m_s)\neq(0,\ldots,0)$, получим

$$|R_{N'(M)}[f]| \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\frac{\delta_N(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s)}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}\left|\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1}e^{2\pi i\frac{km_1+\ldots+k^s m_s}{P}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\left(\sideset{}{'}\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s=-\infty\\(m_1,\ldots,m_s,p)=1}}^{\infty}\frac{\delta_N(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s)}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}\frac{s-1}{\sqrt{P}}+\right.$$

$$\left.+\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\delta_N(p(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s))}{(\overline{pm_1}\ldots\overline{pm_s})^\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\delta_N(m_1+a_1m_2+\ldots+a_{s-1}m_s)}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}\cdot\left(\frac{s-1}{\sqrt{P}}+\frac{1}{P^\alpha}\right).$$

Отсюда и из оценки гиперболической дзета-функции для решётки решений сравнения следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $0 < c < 1$, $cP < N < P$, тогда для погрешности квадратурной формулы (17) справедлива оценка*

$$|R_{N'(M)}[f]| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\cdot s\cdot c(\alpha,s)\ln^{\alpha(s-1)}N'(M)}{c^\alpha N'(M)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}. \qquad (21)$$

Доказательство. Действительно, справедливы неравенства: $cP^2 < N'(M) < P^2$, $\sqrt{N'(M)} < P$, $c\sqrt{N'(M)} < N$. Отсюда следует, что

$$\frac{\ln^{\alpha(s-1)}N}{N^\alpha}\cdot\left(\frac{s-1}{\sqrt{P}}+\frac{1}{P^\alpha}\right)\leqslant\frac{\ln^{\alpha(s-1)}N'(M)}{c^\alpha(N'(M))^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}},$$

тем самым утверждение следствия доказано. □

6. Заключение

Предложенная периодизация и новые сетки позволяют по новому рассматривать вопрос о математическом ожидании не только погрешности приближенного интегрирования по неравномерным сеткам Коробова, но также и вопрос о погрешности Фурье интерполяции непериодических функций по неравномерным сеткам и параллелепипедальным. Этому вопросу будут посвящены наши последующие работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

2. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185-–223.

2. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, № . 609 pp. 1-–84.

3. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

4. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

Получено 4.07.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 620.193:620.194.22 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-374-383

Моделирование процесса коррозионного растрескивания подземных трубопроводов

С. Н. Кутепов, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, В. А. Терёшин, О. В. Кузовлева, Е. В. Цой, Е. С. Крупицын

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ansergueev@mail.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Терёшин Валерий Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
email: technology@tspu.tula.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Цой Евгений Владимирович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В статье представлены результаты разработки методики прогнозирования процесса коррозионного растрескивания подземных трубопроводов с использованием программного продукта COMSOL Multiphysics 5.6: Corrosion Module. С использованием разработанной методики установлено, что, что при малых значениях продольной деформации (1,75 и 2,75 мм) наблюдается равномерное распределение напряжений, коррозионного потенциала, плотности анодного и катодного тока по всей длине трещины. При возрастании степени деформации порядка 3,75 и 4 мм, распределение напряжений, коррозионного потенциала, плотности анодного и катодного тока носит более неравномерный характер: в вершине коррозионной трещины достигаются максимальные значения указанных величин, а по ее краям характерно их более равномерное распределение. Показано, что воздействие на коррозионную трещину локальной упругой деформации, не способствует усилению механико-электрохимического взаимодействия, способствующего повышению коррозионной активности.

Ключевые слова: коррозионное растрескивание, прогнозирование, продольная деформация, коррозионная трещина.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
С. Н. Кутепов, А. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Чуканов, В. А. Терёшин, О. В. Кузовлева, Е. В. Цой, Е. С. Крупицын Моделирование процесса коррозионного растрескивания подземных трубопроводов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 374–383.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 620.193:620.194.22 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-374-383

Modeling of the process of corrosion cracking of underground pipelines

S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, O. V. Kuzovleva, E. V. Tsoi, E. S. Krupitsyn

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Sergeev Alexander Nikolaevich — doctor of pedagogical sciences, professor, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ansergueev@mail.ru
Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Chukanov Alexander Nikolaevich — doctor of technical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Tereshin Valery Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: technology@tspu.tula.ru
Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Tsoi Evgeny Vladimirovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: tsoyev@tsput.ru
Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The article presents the results of the development of a methodology for predicting the process of corrosion cracking of underground pipelines using the COMSOL Multiphysics 5.6: Corrosion Module software product. Using the developed technique, it was found that at small values of longitudinal deformation (1.75 and 2.75 mm), a uniform distribution of stresses, corrosion potential, density of anode and cathode current is observed along the entire length of the crack. With an increase in the degree of deformation of the order of 3.75 and 4 mm, the distribution of stresses, corrosion potential, density of the anode and cathode current is more uneven: the maximum values of these values are reached at the top of the corrosion crack, and their more uniform distribution is characteristic along its edges. It is shown that the effect of local elastic deformation on the corrosion crack does not contribute to the strengthening of the mechanical-electrochemical interaction, which contributes to an increase in corrosion activity.

Keywords: corrosion cracking, forecasting, longitudinal deformation, corrosion crack.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, A. N. Chukanov, Tereshin V. A., O. V. Kuzovleva, E. V. Tsoi, E. S. Krupitsyn, 2021, “Modeling of the process of corrosion cracking of underground pipelines“ , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 374–383.

1. Введение

В настоящее время одной из актуальных задач в сфере обеспечения безопасной эксплуатации зданий, сооружений и инженерных коммуникаций является прогнозирование их долговечности [1]. Однако, данная задача является достаточно трудоемкой по времени выполнения, поскольку зачастую требует от инженера-проектировщика применения специальных подходов, которые основаны на построении комплексных математических моделей поведения разрушения строительных конструкций, учитывающих целую совокупность действующих на конструкцию факторов (тепловые и ветровые нагрузки, вес людей и технологического оборудования, влияние внешней среды и др.).

В этой связи были разработаны специальные программные комплексы (так называемые CAE-системы (ComputerAidedEngineering)) позволяющие в сжатые сроки проводить оценку долговечности различных конструкций. В основе работы этих программных комплексов лежит метод конечных элементов. CAE-системы инженерного анализа (ABAQUS, ANSYS, COMSOL, NASTRAN, и др.) позволяют не только выполнить качественное моделирование систем различной физической природы, но и исследовать отклик этих систем на внешние воздействия в виде распределения напряжений, температур, скоростей, электромагнитных полей и т.д. [1]. Использование CAE-систем помогает проектным организациям в значительной мере сократить время на проектирование, снизить стоимость продукции и повысить ее качество.

Одним из широко распространенных программных комплексов для инженерного анализа является COMSOL Multiphysics. Его многоцелевая направленность позволяет решать различные мультифизические задачи, например, такие как прочность при тепловом нагружении, влияние магнитных полей на прочность конструкции, тепломассоперенос в электромагнитном поле, изучение кинетики электрохимических и химических реакций и др.

Цель настоящей работы — моделирование процесса коррозионного растрескивания подземного трубопровода с использованием программного продукта COMSOL Multiphysics 5.6.

2. Материалы и методы исследования

Модель, представленная в данной работе (рис. 1), используется для изучения поведения коррозионного растрескивания под напряжением подземных газопроводов, подверженных продольной деформации, вызванной движением грунта. Предполагается, что две электрохимические реакции, а именно окисление стали для анодной реакции и выделение водорода для катодной реакции, соответственно, происходят в среде, pH которой близка к нейтральной. В качестве объекта исследования был выбран участок подземного трубопровода длиной 1,5 м и толщиной стенки 20 мм. Трубопровод изготовлен из высокопрочной легированной стали типа X100. В центре исследуемого участка трубопровода имеется коррозионная трещина эллиптической формы длиной 150 мм и глубиной 10 мм. Окружающая трубопровод почва играет роль почвенного электролита типа NS4. Электропроводность почвенного электролита составляет 0,096 См/м.

Моделирование проводилось с использованием программного продукта COMSOLMultiphysics 5.6: CorrosionModule, включающего в себя два расчетных интерфейса – SolidMechanics (механика твердого тела) и Secondary Current Distribution (вторичное распределение тока). Тип исследования — стационарное. Моделируемые параметры включают распределение напряжений, коррозионный потенциал, а также плотности анодного и катодного тока в зависимости от размера коррозионной трещины и продольной деформации растяжения, вызванной движением почвы.

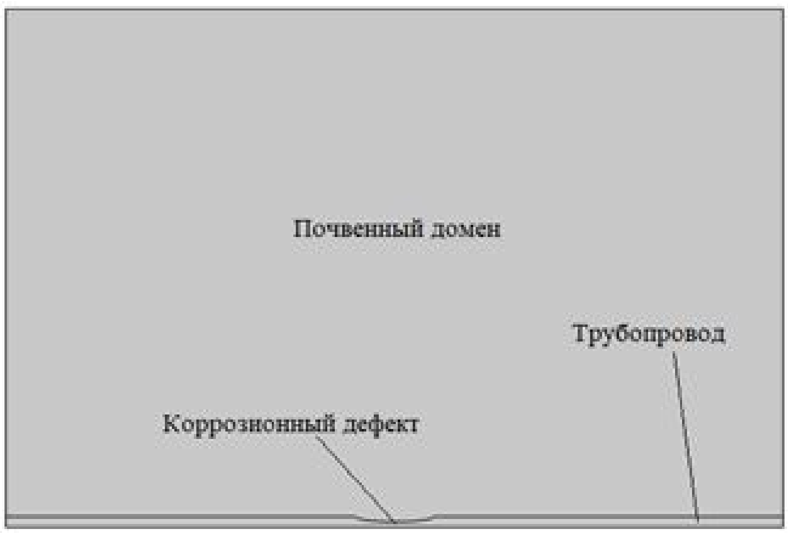

Рис. 1: Геометрическая 2D-модель трубопровода с коррозионным дефектом (эллиптическая трещина), окруженная почвенным доменом типа NS4

Моделирование упругопластических напряжений в стали X100 проводилось с использованием модели пластичности при малых деформациях и критерия течения фон Мизеса [3]. Для моделирования использовали интерфейс SolidMechanics и определяемую пользователем модель изотропного упрочнения. Функция упрочнения σ_{yhard} определяли как [4]:

$$\sigma_{yhard} = \sigma_{\exp}(\varepsilon_{eff}) - \sigma_{ys} = \sigma_{\exp}\left(\varepsilon_p + \frac{\sigma_e}{E}\right) - \sigma_{ys}, \tag{1}$$

где $\sigma_{\exp}$ — экспериментальная функция напряжения, полученная из измеренной инженерной кривой напряжения-деформации стали X100;
ε_{eff} — общая эффективная деформация;
σ_{ys} — предел текучести стали X100 равный 803×10^6 Па;
ε_p — пластическая деформация; σ_e — напряжения фон Мизеса;
E — модуль упругости Юнга, равный 207×10^9 Па;
$\dfrac{\sigma_e}{E}$ — упругая деформация.

В процессе коррозионного растрескивания протекают две электрохимические реакции (причем предполагается, что электрохимически активной является только поверхность коррозионной трещины):

1. анодная — растворение железа ($Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e$);
2. катодная — выделение водорода ($2H_2O + 2e \rightarrow H_2 + 2OH^-$).

Для моделирования реакции растворения железа использовали анодное выражение Тафеля следующего вида:

$$i_a = i_{0,a} 10^{\dfrac{\eta_0}{A_0}}, \tag{2}$$

где $i_{0,a}$ — плотность тока обмена ($2,353 \cdot 10^{-3}$А/м^2), A_a — наклон кривой Тафеля (0,118 В), а перенапряжение η_a для анодной реакции рассчитывается по формуле

$$\eta_a = \phi_S - \phi_l - E_{cq,a} \tag{3}$$

а равновесный потенциал анодной реакции $E_{cq,a}$ рассчитывается по формуле

$$E_{cq,a} = E_{cq0,a} - \frac{\triangle P_m V_m}{zF} - \frac{TR}{zF} \ln\left(\frac{\nu\alpha}{N_0}\varepsilon_p + 1\right), \tag{4}$$

где $E_{cq0,a}$ — стандартный равновесный потенциал анодной реакции ($-0,859$ В),
$\triangle P_m$ — избыточное давление до упругой деформации ($2,687 \cdot 10^8$ Па),
V_m — молярный объем стали ($7,13 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль),
z — число заряда для стали (2),
F — постоянная Фарадея,
T — абсолютная температура (298,15 К),
R — постоянная идеального газа,
ν — коэффициент, зависящий от ориентации (0,45),
α — коэффициент ($1,67 \cdot 10^{15}$ м$^{-2}$),
N_0 — начальная плотность дислокаций ($1 \cdot 10^{12}$ м$^{-2}$).

Катодное выражение Тафеля использовали для моделирования реакции растворения железа, оно устанавливает локальную катодную плотность тока

$$i_c = i_{0,c} 10^{\dfrac{\eta_c}{A_c}}, \tag{5}$$

где $i_{0,c}$ — плотность тока обмена, A_c — наклон Тафеля ($-0,207$ В), а перенапряжение η_c (единица СИ: В) для катодной реакции рассчитывается по формуле

$$\eta_c = \phi_S - \phi_l - E_{cq0,c}, \tag{6}$$

где $E_{cq0,c}$ — стандартный равновесный потенциал катодной реакции ($-0,644$ В).

Плотность тока обмена для катодной реакции определяли по формуле

$$i_{o,c} = i_{o,c,ref} 10^{\dfrac{\sigma_e V_m}{6(-A_c)}}, \tag{7}$$

где $i_{0,c,ref}$ — эталонная плотность тока обмена для катодной реакции в отсутствие внешнего напряжения/деформации ($1,457 \cdot 10^{-2}$ А/м^2).

Моделирование проводили в несколько этапов: на первом этапе были выбраны типы физических решателей (механика твердого тела и вторичное распределение тока) и тип расчета (стационарный). На втором этапе было выполнено построение геометрической модели подземного трубопровода с эллиптической трещиной (см. рис. 1), заданы модель изотропного упрочнения, параметры процесса электрохимической коррозии, механические свойства материала трубопровода, величина продольной деформации трубопровода и др. На третьем этапе выполнено построение сетки конечных элементов и осуществлен расчет распределения напряжений по фон Мизесу, а также распределения коррозионного потенциала, плотности анодного и катодного токов по длине коррозионной трещины в зависимости от степени продольной деформации.

3. Результаты и их обсуждение

На рисунке 2 показано распределение потенциала электролита (В) по области грунта и распределение напряжений фон Мизеса (МПа) по области трубы для заданной величины продольной деформации (4 мм) в направлении оси x. Установлено, что вблизи коррозионной трещины локальные напряжения и коррозионный потенциал значительно выше, чем на других участках трубопровода.

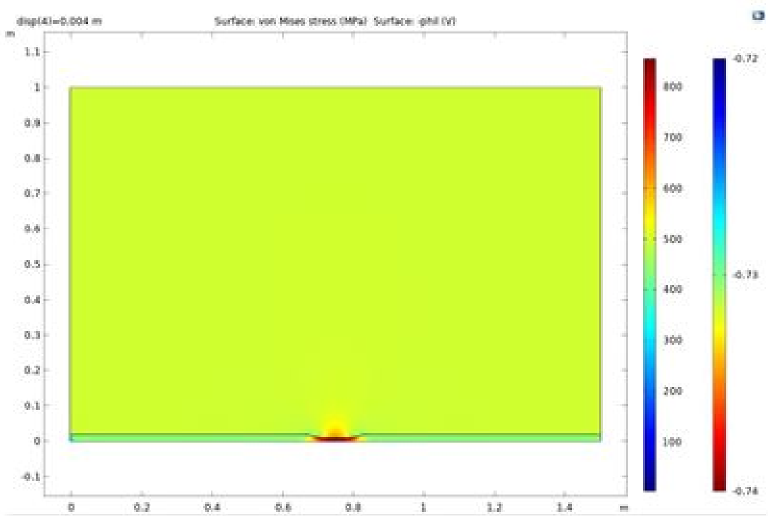

Рис. 2: Распределение потенциала электролита в области грунта и распределение напряжения по Мизесу в области трубопровода для заданной степени деформации(4 мм)

На рисунке 3 показано распределение напряжений фон Мизеса по длине коррозионной трещины при заданной степени деформации(1,375, 2,75, 3,75, и 4 мм).Из анализа графических зависимостей видно, что напряжение фон Мизеса возрастает с увеличением степени деформации и оказывается максимальным (856 МПа) в вершине трещины. При увеличении степени деформации до 3,75и 4 мм локальное напряжение, особенно в вершине трещины, превышает предел текучести высокопрочной легированной стали (806 МПа) типа X100 на величину порядка 40–50 МПа. Это приводит к возникновению очага пластической деформации в ее вершине, в то время как величина деформации по краям трещины не превышает величину предела упругости. При меньшей степени продольной деформации (1,375 и 2,75 мм) упругие деформации равномерно распределены по всей длине трещины.

На рисунке 4 показано распределение коррозионного потенциала по длине коррозионной трещины при заданной степени деформации (1,375, 2,75, 3,75и 4 мм). При малых пластических деформациях (1,375 и 2,75 мм) изменение коррозионного потенциала равномерно по всей длине трещины. Однако при более высокой степени деформирования (3,75 и 4 мм) изменение коррозионного потенциала неравномерно, причем в вершине трещины коррозионный потенциал более отрицательный, чем по ее краям.

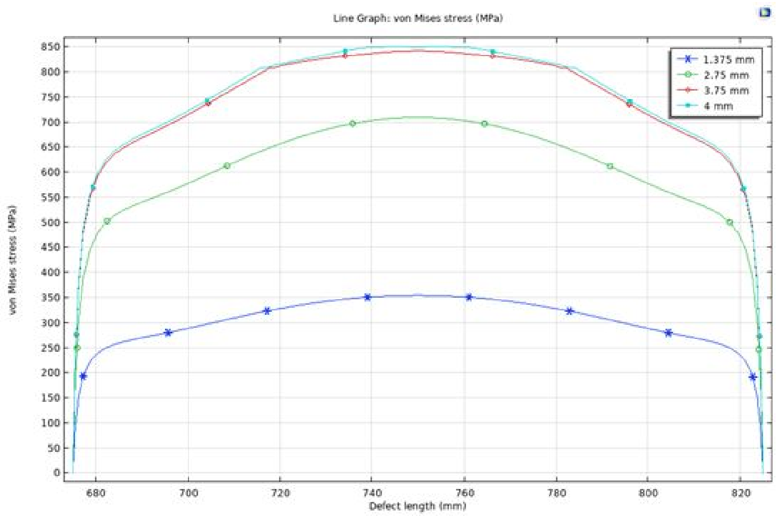

Рис. 3: Распределение напряжений по фон Мизесу по длине коррозионной трещины для заданных степеней деформации (1,375, 2,75, 3,75и 4 мм)

На рисунках 5 и 5 показано распределение плотности анодного и катодного тока по длине трещины при заданной степени деформации (1,375, 2,75, 3,75 и 4 мм). При малых пластических деформациях (1,375 и 2,75 мм) изменение плотности анодного тока оказывается равномерным по длине трещины, что аналогично поведению коррозионного потенциала. Однако при увеличении степени деформации до 3,75 и 4 мм изменение плотности анодного тока более неравномерно, особенно в вершине трещины. Так при увеличении степени деформации (рис. 5) плотность анодного тока значительно увеличивается в вершине коррозионной трещины, в то время как она незначительно уменьшается по ее краям. Увеличение плотности анодного тока при увеличении степени деформации возможно объяснить возникновением очагов локальной пластической деформации, наблюдаемой в вершине коррозионной трещины (см. рис. 3).

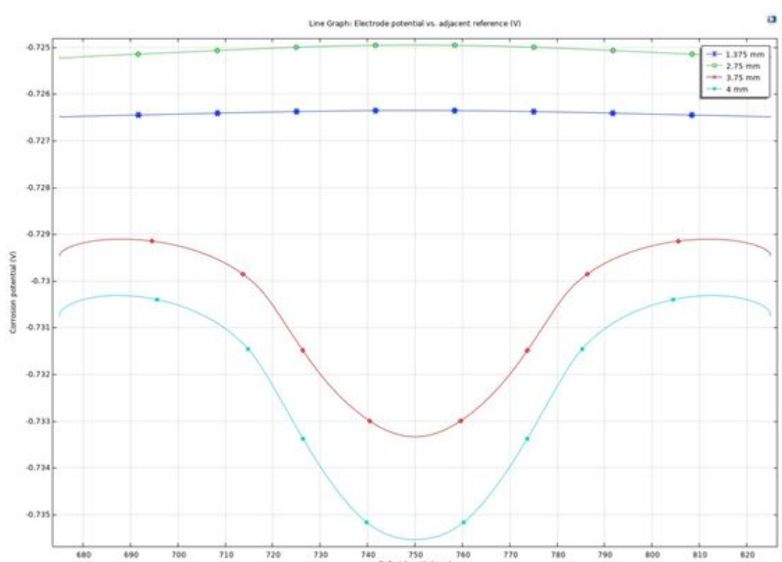

Рис. 4: Распределение коррозионного потенциала по длине коррозионной трещины для заданных степеней деформации (1,375, 2,75, 3,75и 4 мм)

Из анализа рисунка 6 видно, что плотность катодного тока возрастает с увеличением сте-

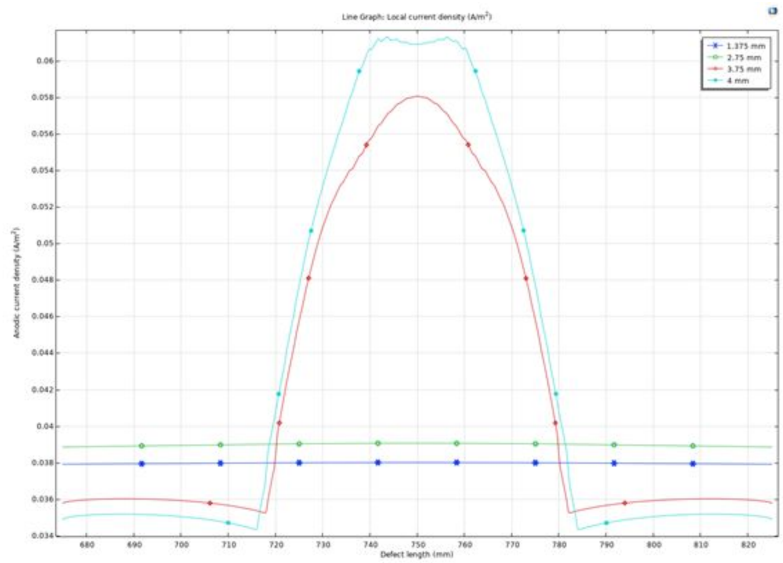

Рис. 5: Распределение плотности анодного тока по длине коррозионной трещины для заданных степеней деформации (1,375, 2,75, 3,75и 4 мм)

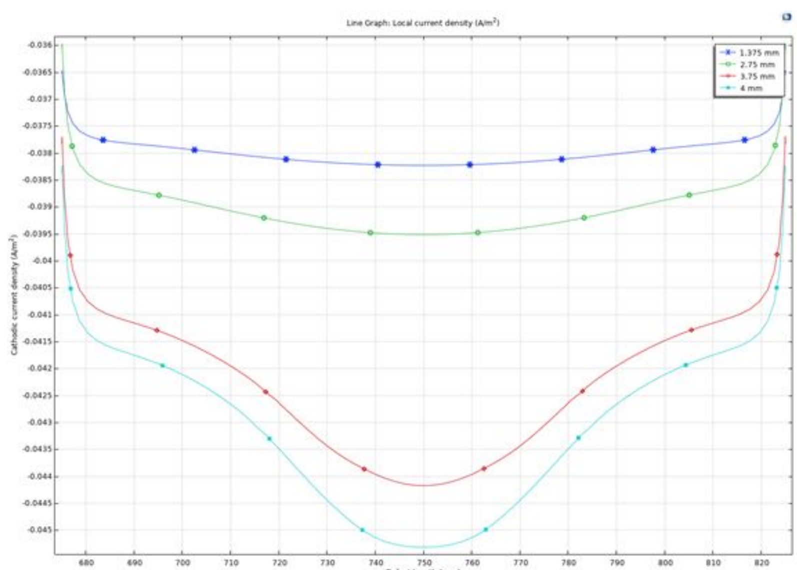

Рис. 6: Распределение плотности катодного тока по длине коррозионной трещины для заданных степеней деформации (1,375, 2,75, 3,75и 4 мм)

пени деформации и оказывается наиболее отрицательной в вершине коррозионной трещины. Также обнаружено, что неравномерность плотности катодного тока увеличивается с увеличением степени деформации. Таким образом, установлено, что распределение плотности катодного тока является наиболее неравномерным при величине деформации равной 4 мм.

4. Выводы

1. Установлено, что при малых значениях продольной деформации (1,75 и 2,75 мм) наблюдается равномерное распределение напряжений, коррозионного потенциала, плотности анодного и катодного тока по всей длине трещины. При возрастании степени деформации

порядка 3,75 и 4 мм, распределение напряжений, коррозионного потенциала, плотности анодного и катодного тока носит более неравномерный характер: в вершине коррозионной трещины достигаются максимальные значения указанных величин, а по ее краям характерно их более равномерное распределение.

2. Показано, что воздействие на коррозионную трещину локальной упругой деформации, не способствует усилению механико-электрохимического взаимодействия, способствующего повышению коррозионной активности.

3. Выявлено, что увеличение степени продольной деформации, способствует возникновению локальных очагов пластической деформации и как следствие возрастанию локальной коррозионной активности.

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих процессов обработки материалов [5]–[7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков А. В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике». Нижний Новгород, 2006, 115 с.

2. COMSOL Multiphysics: Corrosion Module. User's Guide. 2019. 428 p.

3. Xu L. Y., Cheng Y. F. Development of a finite element model for simulation and prediction of mechanoelectrochemical effect of pipeline corrosion // Corrosion Science. 2013. Vol. 73. P. 150-160.

4. COMSOL Multiphysics: Structural mechanics module. User's Guide. 2019. 1406 p.

5. М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, Е. М. Селедкин, Д. С. Клементьев, А. А. Калинин. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: монография / изд. 2-е, испр. и доп. — Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2021. 360 с. ISBN 978-5-9729-0596-6.

6. N. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, V. V. Izvol'skii, A. E. Gvozdev. Long-Term Strength of 22Kh2G2AYu Reinforcing-Bar Steel during Corrosion Cracking Tests in a Boiling Nitrate Solution // Russian Metallurgy (Metally). 2020. № 4. P.434-440.

7. N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, D. S. Klementev. Influence of Heat Treatment on Residual Stress Formation in the Wear-Resistant Steel 60–Steel 15–Steel 60 Bimetal Material // Inorganic Materials: Applied Research. 2021. Vol. 12. № 1. P. 5-9.

8. А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев. Математическое планирование и моделирование процессов поведения металлических систем в экстремальных условиях и состояниях // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой со дня рождения профессоров Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б. Стечкина. Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2020. С. 385-388.

9. А. Е. Гвоздев. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах: монография. 2-е изд., исправ. и доп. Тула: Издательство ТулГУ, 2019. 477 с.

10. М. Х. Шоршоров, А. Е. Гвоздев, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, Н. Н. Сергеев, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков, Д. В. Малий. Разработка прогрессивных технологий получения и обработки металлов, сплавов, порошковых и композиционных наноматериалов // Монография. Тула: Издательство ТулГУ, 2016. 235 с.

REFERENCES

1. A. V. Zhidkov, 2006, “Application of the ANSYS system to solving problems of geometric and finite element modeling. Educational-methodical material for the advanced training program "Information systems in mathematics and mechanics."Nizhny Novgorod, 115 p.

2. COMSOL Multiphysics: Corrosion Module. User’s Guide. 2019. 428 p.

3. L. Y. Xu, Y. F .Cheng, 2013, “Development of a finite element model for simulation and prediction of mechanoelectrochemical effect of pipeline corrosion”, Corrosion Science, vol. 73. pp. 150-160.

4. COMSOL Multiphysics: Structural mechanics module. User’s Guide. 2019.1406 p.

5. M. H. Shorshorov, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, E. M. Seledkin, D. S. Klement’ev, A. A. Kalinin, 2021, “Modeling the processes of resource-saving processing of ingot, powder, nanostructured and composite materials: monograph / ed. 2nd, rev. and add. — Moscow; Vologda: Infra-Engineering, 360 p. ISBN 978-5-9729-0596-6.

6. N. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, V. V. Izvol’skii, A. E. Gvozdev, 2020, “Long-Term Strength of 22Kh2G2AYu Reinforcing-Bar Steel during Corrosion Cracking Tests in a Boiling Nitrate Solution”, Russian Metallurgy (Metally), no. 4, p. 434-440.

7. N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, D. S. Klementev, 2021, “Influence of Heat Treatment on Residual Stress Formation in the Wear-Resistant Steel 60 – Steel 15 – Steel 60 Bimetal Material”, Inorganic Materials: Applied Research, vol. 12, no. 1, pp. 5-9.

8. A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, D. S. Klementyev, 2020, “Mathematical planning and modeling of the processes of behavior of metallic systems in extreme conditions and states”, Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XVIII International conference dedicated to the birth of professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin. Tula: TSPU im. L.N. Tolstoy, pp. 385-388.

9. A. E. Gvozdev, 2019, “Extreme effects of strength and plasticity in high-alloy metal ingot and powder systems”. Monograph. 2nd ed., Revised. and add. Tula: Publishing house of TulSU, 477 p.

10. M. H. Shorshorov, A. E. Gvozdev, V. I. Zolotukhin, A. N. Sergeev, A. A. Kalinin, A. D. Brecky, N. N. Sergeev, O. V. Kuzovleva, N. E. Starikov, D. V. Maliy, 2016, “Development of advanced technologies for the production and processing of metals, alloys, powder and composite nanomaterials”, Monograph. Tula: Publishing house of TulSU, 235 p.

Получено 3.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 620.193:620.194.22 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-384-390

Закономерности газолазерной обработки металлических сплавов[1]

И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, А. В. Маляров, Е. С. Крупицын

Минаев Игорь Васильевич — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Калинин Антон Алексеевич — Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: antony-ak@mail.ru

Бреки Александр Джалюльевич — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).
e-mail: albreki@yandex.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Маляров Андрей Викторович — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: vascko.andr@yandex.ru

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

Рассмотрена газолазерная обработка металлических сплавов на примере газолазерной резки с различной мощностью, скоростью, давлением вспомогательного газа и фокусным расстоянием. В результате проведенных комплексных исследований установлено, что применение газолазерной резки при изготовлении деталей из металлических сплавов системы «железо – углерод» открывает возможность совмещения в одной операции и получения и упрочнения детали без использования дополнительной термической и химико-термической обработки. Разработаны адекватные математические нелинейные регрессионные модели протяженности зоны газолазерного термического влияния (L); ортогональности поверхности реза (a); шероховатости поверхности газолазерного реза (Rz), которые связывают

[1]Со стороны СПбПУ Петра Великого исследования выполнены в рамках Программы Минобрнауки России «Научный центр мирового уровня» № 075-15-2020-934 , со стороны ИПМаш РАН - в рамках государственного задания № АААА-А18-118012190023-2.

показатели качества поверхности газолазерной резки с параметрами лазерной обработки, содержанием углерода в стали и толщиной стального листа.

Ключевые слова: газолазерная резка, зона газолазерного термического влияния, мощность, скорость лазерной резки.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов, А. А. Калинин, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, А. В. Маляров, Е. С. Крупицын Закономерности газолазерной обработки металлических сплавов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 384–390.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 620.193:620.194.22 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-384-390

Regularities of gas-laser processing of metal alloys

I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, A. A. Kalinin, A. D. Breki, O. V. Kuzovleva, A. V. Malyarov, E. S. Krupitsyn

Minaev Igor Vasilyevich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ivminaev1960@yandex.ru
Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Kalinin Anton Alekseevich — Tula State University (Tula).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Breki Alexander Dzhalyulevich — candidate of technical sciences, associate professor, Saint-Petersburg Polytechnic University of Peter the Great; Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences (Saint-Peterburg).
e-mail: albreki@yandex.ru
Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian state University of Justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Malyarov Andrey Viktorovich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: vascko.andr@yandex.ru
Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

Gas laser processing of metal alloys is considered on the example of gas laser cutting with different power, speed, auxiliary gas pressure and focal length. As a result of the comprehensive studies carried out, it was found that the use of gas laser cutting in the manufacture of parts from metal alloys of the iron –carbon system opens up the possibility of combining in one operation and obtaining and hardening the part without the use of additional thermal and chemical-thermal treatment. Adequate mathematical nonlinear regression models have been developed for the extent of the gas-laser thermal influence zone (L); orthogonality of the cutting surface (a); surface roughness of the gas-laser cut (Rz), which link the quality indicators of the gas-laser cutting surface with the parameters of laser processing, the carbon content in steel and the thickness of the steel sheet.

Keywords: gas laser cutting, zone of gas laser thermal influence, power, speed of laser cutting.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, A. A. Kalinin, A. D. Breki, O. V. Kuzovleva, A. V. Malyarov, E. S. Krupitsyn, 2021, "Regularities of gas-laser processing of metal alloys" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 384–390.

1. Основной текст статьи

Рассмотрена газолазерная обработка металлических сплавов на примере газолазерной резки с различной мощностью, скоростью, давлением вспомогательного газа и фокусным расстоянием. В результате проведенных комплексных исследований установлено, что применение газолазерной резки при изготовлении деталей из металлических сплавов системы «железо – углерод» открывает возможность совмещения в одной операции и получения и упрочнения детали без использования дополнительной термической и химико-термической обработки, что защищено патентами на изобретения, имеющими мировую новизну и международный приоритет.

В настоящее время широко применяются в промышленности процессы газолазерной резки (ГЛР) металлических листов из углеродистых сталей различного назначения. При этом одной из актуальных задач современного металловедения является задача исследования структуры и свойств металлических сплавов, при воздействии на них лазерным излучением. Поэтому выявление особенностей изменения структуры и свойств углеродистых сталей при газолазерной резке, позволяет установить закономерности поведения металлических сплавов в экстремальных условиях и разрабатывать на этой основе новые ресурсосберегающие способы обработки.

Работы в области исследований лазерной обработки металлических сплавов ведутся в научных и высших образовательных учреждениях, таких как Институт металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, МВТУ им. Н.Э. Баумана, МАИ, МПУ, ТулГУ, ННТУ, МИСИС Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, БТНТА, Тольяттинский политехнический университет и других организациях. Этим направлением занимались представители ведущих научных школ ученые Н.Н. Рыкалин, М.Х. Шоршоров, А.А. Углов, Ю.В. Цветков, А.Г. Колмаков, А.Г. Григорьянц, Р.В. Арутюнян, В.С. Коваленко, И.Н. Шиганов, М.А. Криштал, Г.И. Сильман, А.А. Жуков, Р.А. Латыпов, В.А. Судник, А.А. Шатульский, В.Ф. Безъязычный, Г.Н. Гаврилов и другие. Однако до сих пор некоторые вопросы, связанные с особенностями формирования структуры и свойств металлических сплавов на железной основе в процессах газолазерной резки остаются открытыми. Целесообразность решение этих вопросов определила выбор темы, формулировку цели, постановку задач и основные направления исследования.

В результате проведенных исследований получены следующие результаты.

Установлено комплексное влияние параметров газолазерной резки: мощности (W) излучения в пределах изменения от 750 до 1200 Вт, скорости резки (V) в пределах изменения от 700 до 1400 мм/мин; давления вспомогательного газа (P) в пределах изменения от $0,1\ldots0,8\ldots2,0$ атм, фокусного расстояния (F) в пределах изменения от 297 до 301 мм положения фокального пятна вдоль оси оптической головки на показатели качества поверхности реза: отсутствие грата, протяженность (L) зоны газолазерного термического влияния (ЗГЛТВ), ортогональность поверхности лазерного реза (α) листов различной толщины (H) из сталей марок 20, 35, 45, У7, У8А и шероховатость (Rz) поверхности реза.

Разработаны адекватные математические нелинейные регрессионные модели протяженности зоны газолазерного термического влияния (L) с коэффициентом детерминации, составляющим 99,2%; ортогональности поверхности реза (а) с коэффициентом детерминации равным 98,2%; шероховатости поверхности газолазерного реза (Rz) с коэффициентом детерминации 99,58%. Средняя относительная ошибка аппроксимации разработанных моделей не превышает 10%. Математические модели Rz, α и L связывают показатели качества поверхности газолазерной резки с параметрами лазерной обработки, содержанием углерода в стали и толщиной стального листа.

Показано, что увеличение содержания углерода в стали и увеличение мощности лазера приводит к значительному, почти равномерному росту ЗГЛТВ в области поверхности газолазерного реза. Увеличение толщины металла приводит к минимальному равномерному росту ЗГЛТВ. Количественные оценки показали, что абсолютный прирост протяженности ЗГЛТВ составляет 70 мкм. Увеличение давления струи вспомогательного газа приводит к равномерному уменьшению глубины ЗГЛТВ. Выявлено, что увеличение содержания углерода в стали приводит к неравномерному изменению угла отклонения реза от 900 с переходом от отрицательных значений к положительным. Максимальное уменьшение угла наблюдается в интервале содержания углерода от 0,2 до 0,4%.

Созданы новые способы обработки, обеспечивающие формирование упрочненного поверхностного слоя в зоне газолазерной резки стальных деталей, которые в одной операции совмещают процессы изготовления и упрочнения, что защищено патентами на изобретения №2695715 и №2707374, зарегистрированными в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 25.07.2019 г. и 26.11.2019 г. соответственно. Полученные результаты опубликованы в отечественных и зарубежных изданиях [1]-[15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Минаев, А. Н. Сергеев, А. Н. Кубанова, Н. Н. Добровольский, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов. История развития лазера и особенности его применения // Чебышевский сборник. 2019. Т.20. Вып. 4. С. 387-402.

2. Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, С. Н. Кутепов, М. Ю. Комарова, Е. С. Алявдина, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин. Основы лазерной и газоплазменной обработки сталей: монография; под ред. проф. Н. Н. Сергеева // Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 337 с. - ISBN 978-5-7679-4440-8.

3. A. E. Gvozdev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov, I. V. Tikhonova. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. №1. C. 41-44.

4. A. E.Gvozdev, I. V. Golyshev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonova, D. M. Khonelidze, A. G. Kolmakov. Multiparametric optimization of laser cuting of steel sheets // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. №4. C. 305-310.

5. A. E. Gvozdev, N. N. Sergeev, I. V. Minaev, I. V. Tikhonova, A. N. Sergeev, D. M. Khonelidze, D. V. Maliy, I. V. Golyshev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov. Temperature distribution and structure in the heat affected zone for steel sheets after lazer cutting // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. №1. C. 148-152.

6. N. N. Sergeev, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, L. A. Tsyganov, E. S. Alyavdina, O. M. Gubanov, A. D. Breki. Decarburization and the influence of lazer cutting on steel structure. // Steel in Translation. 2018. T.48. №5. C. 313-319.

7. N. N. Sergeev, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, L. A. Tsyganov, E. S. Alyavdina, O. M. Gubanov, A. D. Breki. Decarburization and the influence of lazer cutting on steel structure // Steel in Translation. 2018. T.48. №5. C. 313-319.

8. И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, М. Л. Хейфец, С. Н. Кутепов. Особенности лазерной резки в синтезе технологий изготовления и упрочнения деталей из сталей // Актуальные вопросы машиноведения. 2020. Т. 9. С. 254-260.

9. Патент на полезную модель № 151792 Российская Федерация, МПК51 B23K26 (2014.01) B23K26/14 (2014.01). Оптическая головка для лазерной резки листового металла толщиной 12 мм и выше непрерывным волоконным лазером мощностью до 4 кВт / И. В. Минаев, И. В. Голышев, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью Научно-производственное предприятие «ТЕЛАР». — № 2014140571/02; заявл. 08.10.14; опубл. 20.04.15. Бюл. № 11. — 3 с.

10. Свидетельство РФ №2018663400 о государственной регистрации программы на ЭВМ. Программный комплекс для расчета характеристик нестационарных тепловых полей и адиабатических эффектов в процессах обработки металлических, порошковых, аморфных, неметаллических и нанокомпозиционных систем и материалов конструкционного, инструментального и триботехнического назначения / А. Е. Гвоздев, А. Д. Бреки, Е. В. Цой, Г. М. Журавлев, Д. С. Клементьев, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, А. А. Калинин, И. В. Минаев, А. Н. Сергеев; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого». — № 2018660543; заявл. 02.10.2018; опубл. 26.10.2018. Дата государственной регистрации в реестре программ для ЭВМ в Роспатенте 26.10.2018.

11. Патент на полезную модель № 122325 Российская Федерация, МПК B23K26/08 (2006.01). Установка для лазерной обработки крупногабаритных длинномерных изделий / И. В. Минаев, И. Л. Грашкин; заявитель и патентообладатель: общество с ограниченной ответственностью Научно-производственное предприятие «ТЕЛАР» (RU). — № 2012121385/02; заявл. 24.05.2012; опубл. 27.11.2012. Бюл. № 33. — 2 с.

12. Свидетельство РФ №2017616180 о государственной регистрации программы на ЭВМ. Программный комплекс для моделирования ресурсосберегающих производств обработки и фрикционного взаимодействия металлических систем / А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев, Ю. С. Дорохин, Д. С. Клементьев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, Д. В. Малий, П. Н. Медведев, И. В. Минаев, Д. В. Провоторов, Н. Е. Проскуряков, А. Н. Сергеев, Д. М. Хонелидзе; заявитель и правообладатель: Гвоздев А. Е. Заявка № 2017613672. Дата государственной регистрации в реестре программ для ЭВМ в Роспатенте 02.06.2017.

13. Патент на изобретение № 2697515 Российская Федерация, МПК51 B23K26/38 (2014.01). Способ формирования упрочненного приповерхностного слоя в зоне лазерной резки деталей / И. В. Минаев, Н. Н. Сергеев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Н., Сергеев, Е. С. Алявдина; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью Научно-производственное предприятие «ТЕЛАР». — № 2018140047; заявл. 14.11.2018; опубл. 25.07.2019. Бюл. № 21. — 3 с.

14. Патент на изобретение № 2721521 Российская Федерация, МПК B21D 37/02 (2006.01). Сборный штам для вытяжки сложнопрофильных тонкостенных изделий / И. В. Минаев, А. Е. Гвоздев, И. В. Голышев, С. И. Полосин; заявитель и патентообладатель: Общество

с ограниченной ответственностью «МЕТАЛЛИКА71» — № 2019130980; заявл. 17.05.2019; опубл. 19.05.2020. Бюл. № 26. — 3 с.

15. Патент на изобретение № 2707374 Российская Федерация, МПК51 B23K26 (2014.01) B23K26/14 (2014.01) C21D1/09 (2006.01). Способ формирования упрочненного поверхностного слоя в зоне лазерной резки деталей из легированных конструкционных сталей / Н. Н. Сергеев, И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Г. Колмаков, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, И. В. Голышев; заявитель и патентообладатель ООО «МЕТАЛЛИКА71» — № 2019115250; заявл. 17.05.2019; опубл. 26.11.2019. Бюл. № 33. — 3 с.

REFERENCES

1. I. V. Minaev, A. N. Sergeev, A. N. Kubanova, N. N. Dobrovolsky, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, 2019, “History of laser development and features of its application”, Chebyshev collection, tom 20, iss. 4, pp. 387-402.

2. N. N. Sergeev, I. V. Minaev, I. V. Tikhonova, S. N. Kutepov, M. Yu. Komarova, E. S. Alyavdina, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin, 2017, “Fundamentals of laser and gas-plasma processing of steels: monograph; ed. prof. N. N. Sergeeva”, Tula: Publishing house of Tula State University, 337 p. ISBN 978-5-7679-4440-8.

3. A. E. Gvozdev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov, I. V. Tikhonova, 2015, “Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels”, Inorganic Materials: Applied Research, tom 6, no. 1. pp. 41-44.

4. A. E. Gvozdev, I. V. Golyshev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonova, D. M. Khonelidze, A. G. Kolmakov, 2015, “Multiparametric optimization of laser cuting of steel sheets”, Inorganic Materials: Applied Research, tom 6, no. 4, pp. 305-310.

5. A. E. Gvozdev, N. N. Sergeev, I. V. Minaev, I. V. Tikhonova, A. N. Sergeev, D. M. Khonelidze, D. V. Maliy, I. V. Golyshev, A. G. Kolmakov, D. A. Provotorov, 2017, “Temperature distribution and structure in the heat affected zone for steel sheets after lazer cutting”, Inorganic Materials: Applied Research, tom 8, no. 1, pp. 148-152.

6. N. N. Sergeev, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, L. A. Tsyganov, E. pp. Alyavdina, O. M. Gubanov, A. D. Breki, 2018, “Decarburization and the influence of lazer cutting on steel structure.”, Steel in Translation, tom 48, no. 5. pp. 313-319.

7. N. N. Sergeev, I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. E. Cheglov, L. A. Tsyganov, E. pp. Alyavdina, O. M. Gubanov, A. D. Breki, 2018, “Decarburization and the influence of lazer cutting on steel structure”, Steel in Translation, tom 48, no. 5, pp. 313-319.

8. I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, M. L. Heifets, S. N. Kutepov, 2020, “Features of laser cutting in the synthesis of technologies for the manufacture and hardening of steel parts”, Actual problems of mechanical engineering, vol. 9, pp. 254-260.

9. Utility model patent No. 151792 Russian Federation, MPK51 V23K26 (2014.01) V23K26/14 (2014.01). Optical head for laser cutting of sheet metal with a thickness of 12 mm and more with a continuous fiber laser with a power of up to 4 kW/I. V. Minaev, I. V. Golyshev, N. N. Sergeev, A. E. Gvozdev; applicant and patentee Limited Liability Company Research and Production Enterprise "TELAR". No. 2014140571/02; declared 10/08/14; publ. 04/20/15. Bul. No. 11. 3 p.

10. Certificate of the Russian Federation No. 2018663400 on the state registration of a computer program. A software package for calculating the characteristics of non-stationary thermal fields and adiabatic effects in the processing of metal, powder, amorphous, non-metallic and nanocomposite systems and materials for structural, instrumental and tribotechnical purposes/A. E. Gvozdev, A. D. Brecky, E. V. Tsoi, G. M. Zhuravlev, D. pp. Klement'ev, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, A. A. Kalinin, I. V. Minaev, A. N. Sergeev; applicant and copyright holder FGBOU VO "TGPU im. L. N. Tolstoy ". No. 2018660543; declared 10/02/2018; publ. 26.10.2018. The date of state registration in the register of computer programs in Rospatent is 10/26/2018.

11. Utility model patent No. 122325 Russian Federation, MPK V23K26/08 (2006.01). Installation for laser processing of large-sized long products/I. V. Minaev, I. L. Grashkin; applicant and patentee: Limited Liability Company Research and Production Enterprise "TELAR"(RU). No. 2012121385/02; declared 05.24.2012; publ. 11/27/2012. Bul. No. 33. 2 p.

12. Certificate of the Russian Federation No. 2017616180 on the state registration of a computer program. A software package for modeling resource-saving processing industries and frictional interaction of metal systems/A. D. Brecky, A. E. Gvozdev, Yu. pp. Dorokhin, D. pp. Klement'ev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, D. V. Maliy, P. N. Medvedev, I. V. Minaev, D. V. Provotorov, N. E. Proskuryakov, A. N. Sergeev, D. M. Khonelidze; applicant and copyright holder: Gvozdev A. E. Application No. 2017613672. Date of state registration in the register of computer programs in Rospatent 06/02/2017.

13. Patent for invention No. 2697515 Russian Federation, MPK51 B23K26/38 (2014.01). Method of forming a hardened near-surface layer in the zone of laser cutting of parts/I. V. Minaev, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonova, A. E. Gvozdev, A. N., Sergeev, E. pp. Alyavdina; applicant and patentee Limited Liability Company Research and Production Enterprise "TELAR". No. 2018140047; declared 11/14/2018; publ. 07/25/2019. Bul. No. 21. 3 p.

14. Patent for invention No. 2721521 Russian Federation, IPC B21D 37/02 (2006.01). Combined strand for drawing complex-profile thin-walled products / I. V. Minaev, A. E. Gvozdev, I. V. Golyshev, S. I. Polosin; applicant and patentee: Limited Liability Company METALLIKA71 No. 2019130980; declared 05/17/2019; publ. 05/19/2020. Bul. No. 26. 3 p.

15. Patent for invention No. 2707374 Russian Federation, MPK51 B23K26 (2014.01) B23K26/14 (2014.01) C21D1/09 (2006.01). Method of forming a hardened surface layer in the zone of laser cutting of parts from alloyed structural steels / N. N. Sergeev, I. V. Minaev, I. V. Tikhonova, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, A. G. Kolmakov, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, I. V. Golyshev; applicant and patent holder METALLIKA71 LLC No. 2019115250; declared 05/17/2019; publ. 11/26/2019. Bul. No. 33. 3 p.

Получено 3.09.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 519.7 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-391-399

Скрытые марковские модели в задаче обнаружения атак на компьютерные сети

В. Л. Токарев

Токарев Вячеслав Леонидович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
email: tokarev22@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача обнаружения атак на компьютерные сети. Предлагается метод проактивного противодействия, основанный на использовании детекторов, выстраиваемых в виде скрытых марковских моделей.

Ключевые слова: Математические модели, информационная безопасность.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
В. Л. Токарев. Скрытые марковские модели в задаче обнаружения атак на компьютерные сети // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 391–399.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 519.7 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-391-399

Hidden markov models in the problem of detecting attacks on computer networks

V. L. Tokarev

Tokarev Vyacheslav Leonidovich — doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).
email: tokarev22@yandex.ru

Abstract

The article deals with the problem of detecting attacks on computer networks. A method of proactive counteraction based on the use of detectors built in the form of hidden Markov models is proposed.

Keywords: Mathematical models, information security.

Bibliography: 7 titles.

For citation:
V. L. Tokarev, 2021, “Hidden markov models in the problem of detecting attacks on computer networks”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 391–399.

1. Введение

На сегодняшний день актуальной задачей является поиск наиболее эффективных методов выявления аномалий в работе компьютерной сети, явлющихся следствием технических сбоев, изменений условий работы сети или несанкционированных воздействий. Особую опасность для целостности и конфиденциальности информации, обрабатываемой в сети представляют именно несанкционированные воздействия [1] – атаки на компьютерной сети (КС).

Системы обнаружения атак обычно являются первой линией обороны защищаемой компьютерной системы. Их эффективность существенно зависит от методов обнаружения, на которых они основаны. Большинство таких методов можно разделить на следующие три класса [2].

1) Сигнатурные методы широко используется для обнаружения атак известных видов. Хотя он очень эффективны, но становятся неэффективными, если есть даже очень небольшое изменение в аномалии изменяет сигнатуру атаки. Кроме того, этот метод требует обновления базы данных сигнатур на регулярной основе, чтобы обнаруживать новые разновидности атак [3].

2) Поведенческие методы обеспечивают постоянное наблюдение за поведением КС, чтобы определить, является ли поведение аномалией. Эти методы могут обнаруживать неизвестные атаки. Однако практика показывает, что эти методы имеют высокий уровень ложных срабатываний [4]. Кроме этого, эти методы требуют большого времени процесса обнаружения.

3) Эвристические методы, которые для выявления аномалий используют, в основном, машинное обучение и интеллектуальный анализ данных. Эффективность этих методов напрямую зависит от использумых детекторов – обучаемых программных средств, предназначенных для выявления аномалий.

Очевидно, что в связи с неуклонным расширением множества методов, реализации атак, наблюдаемым в настоящее время, необходимо расширять разнообразие методов обнаружения атак. Актуальность новых подходов к реализации эвристических методов связана еще и с тем,что сложность задачи обнаружения новых видов атак требует применения и более сложного математического аппарата, в частности алгоритмов обучения систем обнаружения атак.

2. Обучаемые детекторы

Предлагаемый метод обнаружения и классификации атак основан на создании и обучении детекторов. Подобные детекторы, основанные на искусственных нейронных сетях, рассмотрены в [2]. В предлагаемом решении использованы скрытые марковские модели (СММ) и механизмы построения детекторов: генерация и обучение детекторов, отбор детекторов и формировние памяти системы обнаружения атак на их основе [5].

Построение такой системы гипотетически можно представить следующим образом.

Обучаемые детекторы генерируются как некоторые модели со случайными начальными значениями параметров, что дает возможность создания большого количества разнообразных по своей структуре детекторов. К основным параметрам отнесены: время жизни детектора, на протяжении которого он может существовать и уровень доверия.

Далее детекторы проходят стадию обучения, на которой они приобретают способность корректно реагировать на появление признаков аномалий в работе защищаемой компьютерной системы (КС).

Затем они отбираются: те из них, которые не обучились правильно классифицировать аномалии, удаляются, а на его место приходит новый, отличный по начальным параметрам, детектор. Иначе, если детектор обнаружил аномалию и правильно классифицировал ее как атаку, происходит информирование администратора КС об обнаруженной атаке и реакция на нее.

Детектор, обнаруживший атаку, трансформируется в обученный детектор и его первоначально заданные параметры изменяются: 1) увеличивается время жизни и 2) повышается уровень доверия. Отобранные детекторы допускаются к выполнению функций классификации аномалий в поведении КС.

3. Скрытые Марковские модели

В рассматриваемом решениии в качестве обучаемого детектора выбрана СММ. Скрытую марковскую модель можно рассматривать как статистическую модель [6], способную имитировать работу процесса, похожего на марковский процесс с неизвестными параметрами (рис.1).

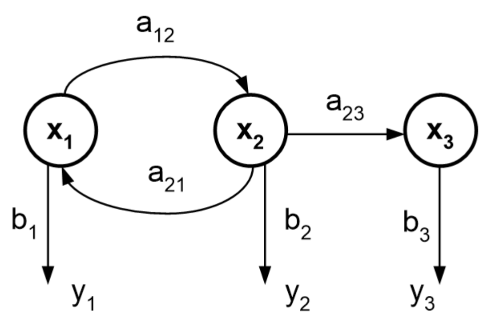

Рис. 1: Пример диаграммы переходов в скрытой Марковской модели: x — скрытые состояния, y — наблюдаемые результаты, a — вероятности переходов, b — вероятность результата

То есть, это вероятностная модель множества случайных переменных $\{y_1, \dots y_t, x_1, \dots x_t, \}$, среди которых y_t — известные дискретные наблюдения, а x_t — «скрытые» дискретные величины. Тогда задачей становится определение неизвестных параметров СММ на основе наблюдений.

Для динамического процесса СММ можно представить в виде связного графа последовательностей (рис. 2).

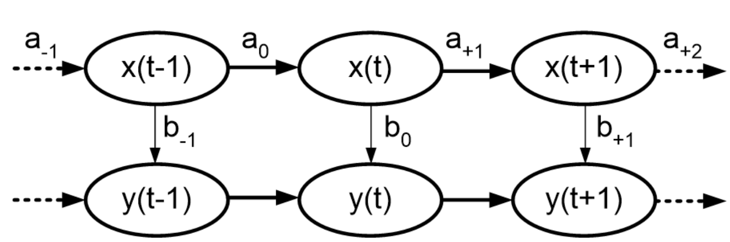

Рис. 2: Связный граф последовательностей

Вероятность наблюдать последовательность длины L равна $P(Y) = \sum P(Y|X) \cdot P(X)$, причем сумма пробегает по всем возможным последовательностям скрытых узлов

Существуют, по крайней мере, два алгоритма, позволяющих решить задачу:

Алгоритм прямого-обратного хода: даны параметры модели B и после-довательность Y, требуется вычислить вероятность A появления данной последовательности X (помогает решить задачу).

Алгоритм Баума-Велша [7]: дана выходная последовательность Y (или не-сколько) с дискретными значениями, требуется «потренировать» СММ на данном выходе (решает задачу).

Алгоритм «прямого-обратного» хода — алгоритм для вычисления апостериорных вероятностей $a \in A$ последовательности состояний $x \in X$ при наличии последовательности наблюдений Y. Иначе говоря, алгоритм, вычисляющий вероятность специфической последовательности наблюдений Y.

Алгоритм включает три шага: 1) вычисление прямых вероятностей; 2) вычисление обратных вероятностей; 3) вычисление сглаженных значений.

Прямые и обратные шаги являются «прямым проходом по сообщению» и «обратным проходом по сообщению», где сообщением выступает ряд последовательных наблюдений Y. Различие в способе, которым алгоритм обрабатывает данную последовательность наблюдений Y.

При прямом обходе, алгоритм продвигается, начинаясь с первого наблюдения в последовательности до последнего, и затем возвращается назад к первому. При каждом наблюдении, вычисляются вероятности, которые будут использоваться для вычислений при следующем наблюдении.

Во время обратного прохода алгоритм одновременно выполняет шаг сглаживания — это процесс вычисления распределения вероятностей значений переменных от прошлых состояниях при наличии свидетельств вплоть до нынешнего состояния. Этот шаг позволяет алгоритму принимать во внимание все прошлые наблюдения для того, чтобы вычислить более точные результаты.

Для представления алгоритм «прямого-обратного» хода удобно использовать матрицу переходных вероятностей $P(X_t|X_t - 1)$, представляющей все возможные состояния в СММ данной случайной переменной X_t представить в виде матрицы T, в которой индекс строки i обозначает начальное состояние, а индекс столбца j - конечное состояние.

Тогда следующую прямую вероятность можно вычислить таким образом. Набор прямых вероятностей будем сохранять в ещё одной матрице , где указывает на то, что вычисленные вероятности зависят от всех прямых вероятностей от до , включая текущую матричную вероятность, которую мы опишем как $F_1 : t$.

Следовательно, $F_{1;t+1}$ равно произведению транспонированной матрицы с текущими прямыми вероятностями и матрицей наблюдения для следующего свидетельства в потоке наблюдения. После этого получается матрица, которая требует нормализации, то есть полученные значения должны быть разделены на сумму всех значений в матрице, что можно отобразить коэффициентом нормализации a. Тогда вычисление прямых вероятностей можно описать формулой:

$$F_{1;t+1} = a \cdot Y_{t+1} \cdot T \cdot F_{1;t}$$

Вычисление обратной вероятности $B_{k+1:t}$, можно производить аналогичным способом. Пусть конец последовательности будет описан индексом , начинающийся с 0. Поэтому выполнение от k и вычисляя каждую обратную вероятность можно описать формулой:

$$B_{1:t+1} = T \cdot Y_{k+1} \cdot B_{k+2:t}$$

При этом используется не обычное матричное произведение, а поточечное: умножается значение каждой переменной в одной матрице с соответствующей переменной в другой.

Третий и конечный шаг — это вычисление сглаженных вероятностей . Сглаженные вероятности получаются также поточечным произведением по формуле:

$$C_k = a \cdot B_{k+1:t} \cdot F_{1:k}$$

Для растущего t существуют алгоритмы эффективного вычисления с помощью онлайн сглаживания с фиксированым лагом.

Алгоритм Баума — Велша, предлагаемый для нахождения неизвестных параметров X скрытой марковской модели, использует алгоритм прямого - обратного хода. Его сходимость опирается на два независимых утверждения:

1) скрытая переменная при известной i-ой переменной независима от всех предыдущих (переменных, то есть $P(x_t|x_{t-1}, x_{t-2}, ..., x_1, y_1) = P(x_t|x_{t-1})$;

2) известное наблюдение зависит только от t-го состояния, то есть не зависит от времени: $P(y_t|x_{t-1}, x_{t-2}, ..., x_1, y_1) = P(y_t|x_t)$.

Можно задать $P(q_t|q_{t-1}$ как независящую от времени стохастическую матрицу перемещений $A = \{a_{ij}\} = P(Q_t = j, Q_{t-1} = i)$, где q — дискретная случайная переменная, принимающая одно из значений $(1, \ldots, N)$. Для времени $t = 1$ может быть определено начальное распределение $\pi_i = P(q_1 = i)$.

Будем считать, что процесс находится в состоянии q_t в момент времени t, если $q_t = j$. Последовательность заданных состояний определяется как $q = q_1, ..., q_T$, где $q_t \in 1, ..., N$ является состоянием в момент времени t.

Наблюдение может иметь одно из возможных значений $Y_t = \{y_1, ..., y_L\}$. Вероятность заданного вектора наблюдений в момент времени t для состояния q_t определяется как $b_j(y_t) = P(Y_t - y_t|q_t = j)$, $B = \{b_{ij}\}$ — матрица. Заданная последовательность наблюдений выражается как $Y = Y_1 = y_1, ..., Y_T = y_T$. Тогда СММ можно описать

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

При заданном векторе наблюдений алгоритм Баума — Велша находит $\lambda^* = maxP(Y|\lambda)$.

Предлагаемый алгоритм отличается многократной повторной оценкой параметров A, B, π [8]. Число состояний N и число уникальных наблюдаемых символов M являются постоянными. Изменяются на каждом шаге A,B и π.

Алгоритм итеративно обновляет их значения до схождения в одной точке и заключается в следующем:

Инициализировать $s = (A, B, \pi)$, задавая случайные величины, например: $\pi = 1/N, a_{ij} = 1/N, b_{ij} = 1/M$. Прямая процедура:вычисляются рекурсивно.

$$a_i\{1\} = \pi_i \cdot b_i(Y_1)$$

$$a_j(t+1) = b_j(Y_{t+1}) \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i(t) \cdot a_{ij}$$

Обратная процедура:

$$beta_i(T) = P(Q_t = i, \lambda) = 1$$

$$beta_i(t) = \sum_{i=1}^{N} beta_i(t+1) \cdot a_{ij} \cdot b_j(Y_{t+1})$$

$$\pi_i = \frac{\alpha_i(1) \cdot \beta_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(1) \cdot \beta_j(1)}$$

Используя новые значения векторов A, B и π, итерации продолжаются до их схождения.

4. Обучение и отбор СММ-детекторов

СММ-детекторы $d \in D$, проходят стадии своего жизненного цикла τ следующим образом. Генерация множества детекторов $D(W_{ij}, \tau) \to a_{ij}$ (каждое множество $D(W_{ij}, \tau)$ соответствуют одному типу атаки a_{ij}. Это создание СММ с начальной инициализацией вектора π_0 по случайному закону.

Обучающая выборка training-set содержит множество параметров защищаемой КС, разделенное на две части – одна training-set-a_{ij}, содержащая параметры нормального поведения КС (при полном отсутствии какой – либо аномалии), другая training-set-n - параметры соединений, соответствующие конкретной атаке. При этом $D_{ij}(W_{ij}) \subset D$, $|D(W_{ij})| = k_d$, $|D| = k_d/cdotk_a$.

Правило обучения заключается в том, чтобы настроить нужным образом вероятности a,b.

Результат такого обучения состоит в том, что победивший детектор с большей вероятностью выиграет конкуренцию и в том случае, когда на вход поступит новый вектор $p(l+1)$, близкий предыдущему $p(l)$, и с меньшей вероятностью, когда будет получен новый вектор $p(l+1)$, существенно отличающийся от $p(l)$. При большом количестве поступающих векторов $p(l), l = 2, 3, \ldots$ детектор v_i корректирует свои параметры (векторы A и B). В этом и заключается самоорганизация СММ- детектора.

При такой коррекции векторов A и B некоторые детекторы остаются незадействованными (детекторы с изначально удаленными параматрами) никогда не выигрывают конкуренции, независимо от того, как долго продолжается обучение. В результате оказывается, что такие векторы w_i не используются при обучении и не выполняют никакой полезной функции. Чтобы исключить такие ситуации и сделать детекторы чувствительными к поступающим векторам $p(l), l = 2, 3, \ldots$ используются смещения, которые позволяют детектору v_i стать конкурентным с детектором w_j.

Использование таких смещений позволяет: 1) вовлечь в процесс обучения больше детекторов, 2) выравнивать значения праметров активности и обеспечить притяжение примерно одинакового количества векторов входа p.

Далее процесс повторяется, начиная с третьего шага для всех входных данных.

Обучение СММ-детекторов производится до желаемой степени согласования между входными и весовыми векторами, т. е. до тех пор, пока значение суммарной квадратичной ошибки не станет равной нулю и весь процесс повторяется до тех пор, пока количество обученных иммунных детекторов не станет равным заданному значению kij.

Таким образом, создается набор детекторов для анализа поведения КС. Однако перед тем, как выполнять анализ КС, обученные детекторы необходимо проверить на корректность классификации с целью предотвращения возникновения ложных срабатываний. Для этого все обученные детекторы проходят стадию отбора.

Отбор СММ-детекторов по тестовой выборке. Для минимизации возникновения ложных срабатываний, когда нормальное соединение принимается за компьютерную атаку, все обученные детекторы проходят проверку на корректность классификации. Для этого детектор подается заранее созданная тестовая выборка, состоящая из параметров нормального соединения. Если i-й детектор классифицирует одно из тестовых соединений как атаку, то он уничтожается, а вместо него генерируется и обучается новый детектор. Если i-й детектор не генерирует ложные срабатывания на тестовой выборке, то он считается корректным и допускается к анализу входящего и исходящего сетевого трафика.

5. Функционирование обученных детекторов

Детекторы, которые допущены к анализу поведения КС, образуют систему обнаружения атак.

Механизм наделения детекторов временем жизни позволяет избавляться от детекторов, которые хоть и прошли успешно стадии обучения и отбора, однако из-за своей особенности (векторы A и B) являются малопригодными.

Активация детекторов. Активация детекторов подразумевает обнаружение детектором атаки. В случае, когда запущенная программа классифицируется одним или несколькими детекторами как атака, происходит её блокировка. Также выдается сообщение пользователю об обнаруженю атаки.

Формирование памяти системы обнаружения атак. При обнаружении и блокировании атаки целесообразно сохранять ее параметры с целью изучения и детального анализа. Дело в том, что детекторы обучаются на ограниченном наборе данных, которые не могут включать в себя все вероятные атаки. Для того чтобы повысить качество обнаружения, а также наделить систему гибкостью и позволить ей адаптироваться под современные реалии, параметры аномалии, классифицированной как атака, сохраняются и заносятся в обучающую выборку, тем самым пополняя ее актуальными данными.

Детекторы, которые будут создаваться с целью заменить «устаревшие» детекторы, будут уже обучаться также и на новых данных, что позволит значительно увеличить качество обнаружения. Кроме этого, создается новая СММ, которая обучается исключительно на данных, выделенных из обнаруженной атаки, и которая вводится в систему анализа аномалий. Это позволит более точно выделить данную атаку при повторной подобной атаке на защищаемую коппьютерную систему со стороны злоумышленника.

Совокупность детекторов (память системы обнаружения) хранит в себе информацию обо всех атаках, направленных в прошлом на защищаемую автоматизированную систему, и обеспечивать высокий уровень реагирования на повторные попытки реализации атаки.

Общий *алгоритм функционирования системы обнаружения атак* на базе обучаемых детекторов можно представить в следующем виде:

1. Создание детектора на базе СММ и начальная инициализация вектора параметров π.

2. Затем формируется обучающая выборка, включающая n значений из множества Y, соответствующего нормальному функционированию автоматизированной системы, и n значений из множества Y*, соответствующих атаке.

3. Последовательно подавая данные из обучающей выборки на СММ и обучаем ее согласно правилу «победитель берет все».

4. Обученный детектор проверяется на тестовой выборке, состоящей из параметров A и B СММ, соответствущей нормальному состоянию КС. Если детектор корректно классифицирует предоставленные данные, то он «допускается» к анализу аномалий в реальном режиме. Если же детектор классифицирует предоставляемые тестовые данные как атаку, то он уничтожается.

5. Внедрение обученного и отобранного детектора в подсистему анализа системмы обнаружения атак.

6. Если отведенное время жизни детектора истекло и детектор не обнаружил аномалию в поведении КС, то он уничтожается и процесс начинается с шага 1. Если детектор обнаружил аномалию, то происходит его активация. Аномалия, классифицированная как атака, блокируется, а админитаратору КС выдается сообщение.

7. Выделение и анализ параметров аномалии в поведении КС, классифицированной как атака и занесение выделенных параметров в базу для обучения новых иммунных детекторов.

Экспериментальные исследования СММ-детекторов в задачах выявления атак показали: 1) их достаточно высокую точность обнаружения (в среднем 91%); 2) процесс обнаружения атак СММ-детекторами занимает меньшее время по сравнению с детекторами на нейронной сети Кохонена в среднем на 6%.

6. Заключение

В настоящем исследовании рассмотрен метод использования СММ-детекторов для обнаружения атак и сделан вывод, системы для обнаружения атак, построенные на основе СММ-детекторов, достаточно эффективны, и дальнейшие исследования могут быть сосредоточены на том, как снизить количество ложных «срабатываний» на аномалии, которые не являются результатом атаки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bazrafshan, Z., Hashemi, H., Fard, S.M.H. and Hamzeh, A. (2013) A Survey on Heuristic Malware Detection Techniques. The 5th Conference on Information and Knowledge Technology (IKT 2013), Shiraz, 28-30 May 2013, 113-120. http://dx.doi.org/10.1109/ikt.2013.6620049

2. Шелухин О.И. Обнаружение вторжений в компьютерные сети (сетевые аномалии)/ О.И. Шелухин, Д.Ж. Сакалема, А.С. Филинова – М.: Горячая линия – Телеком, 2013. – 220 с.

3. Бирюков А.А. Информационная безопасность: защита и нападение. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 474 с.

4. Крис Касперски. Компьютерные вирусы изнутри и снаружи. – СбП: Питер, 2006. – 526 с.

5. Токарев В.Л., Сычугов А.А. Обнаружение вредоносного программного обеспечения с использованием иммунных детекторов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 10. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. - с.216-230.

6. Alqurashi, S. and Batarfi, O. A Comparison of Malware Detection Techniques Based on Hidden Markov Model. Journal of Information Security, 7, 215-223. http://dx.doi.org/10.4236/jis.2016.73017

7. Frazzoli, Emilio. "Intro to Hidden Markov Models the Baum-Welch Algorithm". Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology. Retrieved 2 October 2013.

REFERENCES

1. Bazrafshan, Z., Hashemi, H., Fard, S.M.H. and Hamzeh, A. (2013) A Survey on Heuristic Malware Detection Techniques. The 5th Conference on Information and Knowledge Technology (IKT 2013), Shiraz, 28-30 May 2013, 113-120. http://dx.doi.org/10.1109/ikt.2013.6620049

2. Shelukhin O. I. Detection of intrusions into computer networks (network anomalies) / O. I. Shelukhin, D. Zh. Sakalema, A. S. Filinova-M.: Hotline-Telecom, 2013. - 220 p

3. Biryukov A. A. Information security: protection and attack. - Moscow: DMK Press, 2012. - 474 p.

4. Chris Kaspersky. Computer viruses inside and out. - SbP: Peter, 2006. - 526 p.

5. Tokarev V. L., Sychugov A. A. Detection of malicious software using immune detectors / / Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Technical sciences. Issue 10. Tula: TulSU Publishing House, 2017. - pp.216-230.

6. Alqurashi, S. and Batarfi, O. A Comparison of Malware Detection Techniques Based on Hidden Markov Model. Journal of Information Security, 7, 215-223. http://dx.doi.org/10.4236/jis.2016.73017

7. Frazzoli, Emilio. "Intro to Hidden Markov Models the Baum-Welch Algorithm". Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology. Retrieved 2 October 2013.

Получено 14.06.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 5.

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-400-406

Абелевы группы с конечными примарными факторами

А. А. Фомин, А. В. Царев

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный педагогический университет (г. Москва).
e-mail: nikostas@mail.ru
Царёв Андрей Валерьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный педагогический университет (г. Москва).
e-mail: nikostas@mail.ru

Аннотация

Абелева группа A называется π-ограниченной для некоторого множества простых чисел π, если в любой факторгруппе A/B группы A все p-примарные компоненты $t_p(A/B)$, где $p \in \pi$, конечны. Класс π-ограниченных абелевых групп был введен Е. В. Соколовым при изучении $\mathcal{F}_\pi$-отделимости и π'-изолированности подгрупп в общей теории групп. Описание периодических π-ограниченных групп тривиально. Е. В. Соколовым было показано, что описание смешанных π-ограниченных групп сводится к периодическому случаю и случаю без кручения. В статье подробно рассмотрен класс π-ограниченных абелевых групп без кручения. Показано, что этот класс совпадает с классом π-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга.

В заключении рассмотрены абелевы группы, удовлетворяющие условию $(*)$, т.е. такие абелевы группы, все факторгруппы которых не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$, где π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Понятно, что все π-ограниченные группы удовлетворяют условию $(*)$. Нами доказано, что произвольная абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$. Также в работе приводится конструкция, дающая при каждом бесконечном множестве простых чисел π пример нерасщепляемой смешанной абелевой группы ранга 1, удовлетворяющей условию $(*)$.

Ключевые слова: абелева группа, отделимость подгрупп, π-ограниченная абелева группа, π-локальная абелева группа без кручения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. А. Фомин, А. В. Царев Абелевы группы с конечными примарными факторами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 5, с. 400–406.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 5.

UDC 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-400-406

Abelian groups with finite primary quotients

A. A. Fomin, A. V. Tsarev

Fomin Alexander Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nikostas@mail.ru
Tsarev Andrey Valer'evich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nikostas@mail.ru

Abstract

An abelian group A is called π-bounded for a set of prime numbers π, if all p-primary components $t_p(A/B)$ are finite for every subgroup $B \subset A$ and for every $p \in \pi$. E. V. Sokolov has introduced the class of π-bounded groups investigating $\mathcal{F}_\pi$-separable and π'-isolated subgroups in the general group theory. The description of torsion π-bounded groups is trivial. E. V. Sokolov has proved that the description of mixed π-bounded groups can be reduced to the case of torsion free groups. We consider the class of π-bounded torsion free groups in the present paper and we prove that this class of groups coincides with the class of π-local torsion free abelian groups of finite rank.

We consider also abelian groups satisfying the condition $(*)$, that is such groups that their quotient groups don't contain subgroups of the form $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ for all prime numbers $p \in \pi$, where π is a fixed set of prime numbers. It is clear that all π-bounded groups satisfy the condition $(*)$. We prove that an abelian group A satisfies the condition $(*)$ if and only if both groups $t(A)$ and $A/t(A)$ satisfy the condition $(*)$. We construct also an example of a non-splitting mixed group of rank 1, satisfying the condition $(*)$, for every infinite set π of prime numbers.

Keywords: abelian group, separability of subgroups, π-bounded abelian group, π-local torsion free abelian group.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. A. Fomin, A. V. Tsarev, 2021, "Abelian groups with finite primary quotients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 400–406.

1. Введение

Пусть A — произвольная абелева группа, π — некоторое непустое подмножество множества простых чисел Π. Рассмотрим следующие условия:

$(*)$ все факторгруппы группы A не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$;

$(**)$ в произвольной факторгруппе A/B группы A все p-примарные компоненты $t_p(A/B)$, где $p \in \pi$, конечны.

Абелевы группы с условиями $(*)$ и $(**)$ были введены Е. В. Соколовым в [1] в связи с изучением вопросов $\mathcal{F}_\pi$-отделимости и π'-изолированности.

Понятие отделимости подгруппы в произвольном классе групп $\mathcal{C}$ было введено А. И. Мальцевым в [2]. Напомним, что подгруппа H группы G называется *$\mathcal{C}$-отделимой* в этой группе, если для любого элемента $g \in G \setminus H$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $\varphi(g) \notin \varphi(H)$.

Подгруппа H группы G называется *π'-изолированной* в этой группе, если для любого элемента $g \in G$ и любого простого числа $q \notin \pi$ из включения $g^q \in H$ следует, что $g \in H$. В случае, если G — абелева группа, то π'-изолированность ее подгруппы H означает, что H является *сильно q-сервантной* при всех простых $q \notin \pi$ (подробнее см. [3, § 3]).

Говорят, что группа *обладает свойством* $\mathfrak{S}_\pi$, если все ее π'-изолированные подгруппы являются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми, где $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных групп, простые делители порядков которых принадлежат множеству π.

Для коммутативного случая Е. В. Соколовым доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Абелева группа обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $(*)$.*

Определение 1 [1]. Абелева группа, удовлетворяющая условию $(**)$, называется *π-ограниченной.*

В данной заметке мы подробнее рассмотрим π-ограниченные абелевы группы и их соотношение с абелевыми группами, удовлетворяющими условию $(*)$.

Всюду далее в работе под группой мы будем подразумевать абелеву группу, записанную аддитивно. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ группы A будем называть линейно независимыми (над $\mathbb{Z}$), если равенство $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$). p-рангом группы A называется размерность $\mathbb{Z}_p$-пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать периодическую и p-примарную части группы A.

Другие используемые в статье определения и понятия стандартны и соответствуют монографии Л. Фукса [4], [5] и книге П. А. Крылова, А. В. Михалева, А. А. Туганбаева [9].

2. π-ограниченные группы без кручения

Во-первых, понятно, что все π-ограниченные группы удовлетворяют условию $(*)$ при том же самом π. Обратное, очевидно, не верно. Кроме того, если группа A удовлетворяет условию $(*)$ или условию $(**)$, то среди факторгрупп группы A не может быть группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$. Последнее условие мы будем активно использовать для характеризации π-ограниченных групп и групп, удовлетворяющих условию $(*)$.

Лемма 2. *Если абелева группа A удовлетворяет условию $(*)$, то $r(A) < \infty$.*

Доказательство. Отметим, что $\overline{A} = A/t(A)$ — группа без кручения и $r(\overline{A}) = r(A)$. Предположим, что $r(\overline{A}) = \infty$, тогда возьмём произвольные линейно независимые элементы $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \overline{A}$ и постоим группы

$$B = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle \text{ и } : C = \langle pa_0, pa_1 - a_0, pa_2 - a_1, pa_3 - a_2, \ldots\rangle,$$

где $p \in \pi$. Так как $B/C = \langle a_0 + C, a_1 + C, a_2 + C, \ldots\rangle$, и

$$p(a_0 + C) = 0, : p(a_1 + C) = a_0 + C, : p(a_2 + C) = a_1 + C, : \ldots,$$

то $B/C = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Тогда B/C является прямым слагаемым группы $\overline{A}/C$, поскольку B/C — делимая подгруппа в $\overline{A}/C$. Следовательно, группа B/C является факторгруппой группы $\overline{A}$, а значит и группы A, что противоречит условию $(*)$. □

Описание периодических абелевых групп, удовлетворяющих условию $(*)$ или условию $(**)$, тривиально. Именно,

> *периодическая группа A удовлетворяет условию $(*)$ (условию $(**)$) тогда и только тогда, когда $t_p(A)$ — ограниченная группа (конечная группа) при любом $p \in \pi$.*

В связи с этим мы далее сосредоточим свое внимание на случае групп без кручения и смешанных групп.

Предложение 3 [1]. *Группа A является π-ограниченной тогда и только тогда, когда все p-примарные компоненты ($p \in \pi$) группы A конечны и все факторгруппы группы $A/t(A)$ не содержат прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$.* □

Для групп без кручения очевидным образом получаем

Следствие 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Группа без кручения A является π-ограниченной тогда и только тогда, когда все факторгруппы группы A не содержат прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$;*

2. *Для групп без кручения условия $(*)$ и $(**)$ равносильны.* □

Рассмотрим некоторые дополнительные сведения о группах без кручения конечного ранга, принадлежащие, в основном, Ф. Ричмену [7] и Р. Уорфилду [6] (подробнее также см. [8][§§ :0;1]).

Пусть A — группа без кручения конечного ранга n со свободной подгруппой $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}x_i$. Тогда $r(A/F) = r(A) - r(F) = 0$ и A/F — периодическая группа, имеющая вид

$$A/F = \bigoplus_{p\in\Pi} t_p(A/F) \cong \bigoplus_{p\in\Pi} \Big[\bigoplus_{i=1}^{r_p} \mathbb{Z}_{p^{k_{ip}}} \oplus \bigoplus_{n-r_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \Big]. \qquad (***)$$

Здесь $r_p = r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p} A/pA$ — p-ранг группы A и все k_{ip} — целые неотрицательные числа. Заметим, что в разложении $(***)$ количество квазициклических прямых слагаемых не зависит от выбора свободной подгруппы F, а целиком определяется группой A — для каждого простого p их количество равно $r(A) - r_p(A)$.

Абелева группа A называется *π-локально свободной*, если все ее p-локализации $\mathbb{Q}_p \otimes A$, где $p \in \pi$, являются свободными $\mathbb{Q}_p$-модулями (здесь $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p). Хорошо известно, что абелева группа без кручения A конечного ранга является π-локально свободной тогда и только тогда, когда в ее разложении $(***)$ нет прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$, т.е. когда $r(A) = r_p(A)$ при всех $p \in \pi$.

Теорема 5. *Групп без кручения является π-ограниченной тогда и только тогда, когда она π-локально свободная группа конечного ранга.*

Доказательство. Если A — π-ограниченная группа, то A — группа конечного ранга (по лемме 2) и в разложении $(***)$ группы A нет прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$. Следовательно, A — π-локально свободная группа.

Пусть A — π-локально свободная группа, покажем, что A — π-ограниченная группа. В силу следствия 4 нам достаточно проверить, что все факторгруппы группы A не содержат прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ при всех $p \in \pi$. Предположим противное, найдется такая подгруппа B группы A, что $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторого $p \in \pi$. Так как A/B — периодическая группа, то $r(A/B) = 0$ и, значит, $r(A) = r(B)$. Пусть F — свободная подгруппа группы B, такая что $r(B) = r(F)$. Тогда

$$A/B = [A/F]/[B/F] = t_p(A/F)/t_p(B/F).$$

Поскольку A — π-локально свободная группа, то $t_p(A/F)$ — конечная группа, а значит, и $A/B = t_p(A/F)/t_p(B/F)$ — тоже конечная группа. Получили противоречие. □

3. Смешанные группы, удовлетворяющие условию $(*)$

Теорема 6. *Произвольная группа A удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, т.е. когда все группы $t_p(A)$, где $p \in \pi$, ограниченные и $A/t(A)$ — π-локально свободная группа без кручения конечного ранга.*

Доказательство. Если A удовлетворяет условию $(*)$, то из его определения очевидным образом следует, что группы $t(A)$ и $A/t(A)$ тоже удовлетворяют условию $(*)$.

Обратно, пусть группы $t(A)$ и $A/t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, покажем, что группа A удовлетворяет условию $(*)$. Предположим противное, найдется подгруппа B группы A такая, что $A/B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторого $p \in \pi$. Так как $t(A)$ удовлетворяют условию $(*)$, то группа $t_p(A)$ ограниченная, следовательно, $A = t_p(A) \oplus A'_p$, где группа A'_p не содержит элементов порядка p (см. [10] или [4, теорема 27.5]). Аналогичное разложение получаем и для группы B, $B = t_p(B) \oplus B'_p$. Тогда $A/B = (t_p(A)/t_p(B)) \oplus (A'_p/B'_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Учитывая ограниченность группы $t_p(A)$, получаем, что $t_p(A)/t_p(B) = 0$ и $t_p(A) = t_p(B)$. Пусть q — произвольное простое число, отличное от p. Поскольку $A/B = (t_q(A)/t_q(B)) \oplus (A'_q/B'_q) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $t_q(A)/t_q(B)$ — q-примарная группа, то $t_q(A)/t_q(B) = 0$ и $t_q(A) = t_q(B)$. Таким образом, $t(A) = t(B)$. Учитывая данное равенство, получаем

$$A/B \cong [A/t(A)]/[B/t(B)] = \mathbb{Z}_{p^\infty},$$

которое противоречит тому, что группа $A/t(A)$ удовлетворяет условию $(*)$. $\square$

Пример. Для бесконечного множества π рассмотрим кольцо $R = \prod\limits_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$ и построим в нем подгруппу A, сервантно порожденную единицей кольца R,

$$A = \langle 1 \rangle_* \subset \prod_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p, \quad A = \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{Z}\ \ mr = n1\}.$$

Очевидно, что $t(A) = t(R) = \bigoplus\limits_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$. Так как $R/t(R) \cong \bigoplus\limits_{c} \mathbb{Q}$ и A — сервантная подгруппа ранга 1 в R, то $A/t(A) \cong \mathbb{Q}$.

Далее, пусть $H = \langle 1/p \mid p \in \pi \rangle \subset \mathbb{Q}$. Рассмотрим группу B — прообраз группы H в группе A при естественном отображении $A \to A/t(A) \cong \mathbb{Q}$. Тогда $t(B) = t(A) = \bigoplus\limits_{p\in\pi} \mathbb{Z}_p$ и $B/t(B) \cong H$, т.е. группа B удовлетворяет всем условиям предложения 3, следовательно, B — π-ограниченная группа.

Предположим, что группа B расщепляется, т.е. $B = t(B) \oplus C$, где $C \cong B/t(B) \cong H$. Очевидно, что 1 — единица кольца R — лежит в группе B. Тогда $1 = t + c$, где $t \in t(B)$, $c \in C$, и $m1 = mc$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, а значит, $m1 \in C$. Заметим, что любой элемент группы C делится почти на все простые числа $p \in \pi$ (так как это справедливо для элементов группы H и $H \cong C$). Но простое число p делит элемент $m1$ в группе C (и в R), только если p делит целое число m. Получили противоречие. Следовательно, группа B не расщепляется.

4. Заключение

Заметим, что группы со свойством $(*)$ близки к абелевым группам над которыми все правые полиномы финитно аппроксимируемы. А именно, И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина доказали следующее утверждение.

Теорема 7 [11]. *Над группой G (не обязательно абелевой) все правые полиномы финитно аппроксимируемы тогда и только тогда, когда каждая подгруппа группы G является пересечением подгрупп конечного индекса.*

Для случая абелевых групп отсюда несложно получается

Следствие 8. *Над абелевой группой A все правые полиномы финитно аппроксимируемы тогда и только тогда, когда все факторгруппы группы A не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для любого $p \in P$, где P — множество всех простых чисел.*

Кроме того, абелевы группы с условием $(*)$ могут быть использованы при изучении абелевых групп, как коретрактабельных $\mathbb{Z}$-модулей.

Напомним, что R-модуль M называется *коретрактабельным*, если для любого собственного подмодуля $L \subset M$ верно $\mathrm{Hom}_R(M/L,\, M) \neq 0$ (подробнее о коретрактабельных модулях см. [12]–[15]). Если A — редуцированная абелева группа, не удовлетворяющая условию $(*)$, то в ней найдется такая подгруппа B, что $A/B \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ при некотором простом p. В таком случае $\mathrm{Hom}\,(A/B,\, A) = 0$, а значит, условие $(*)$ является необходимым условием коретрактабельности редуцированных групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2014. Том 55, №6. С. 1381–1390.

2. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановского гос. пед. ин-та. 1958. Том 18. P. 49-60.

3. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №5. С. 157–196.

4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. I. М.: Мир, 1973.

5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. II. М.: Мир, 1977.

6. Warfield R. B. Homomorphisms and duality for torsion-free groups // Math. Z. 1968. Vol. 107. P. 189–200.

7. Richman F. A class of rank 2 torsion free groups // Studies on Abelian Groups. Paris, 1968. P. 327–333.

8. Arnold D. M. Finite rank torsion free abelian groups and rings. Lecture Notes in Math. Vol. 931. Springer. NY, 1982.

9. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.

10. Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. 1941. Том 9(51), №1. С. 165-181.

11. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами // Математические заметки СВФУ. 2014. Том 21, №3. С. 60-67.

12. Amini B., Ershad M., Sharif H. Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. 2009. Vol. 86, No. 3. P. 289–304.

13. Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Ретрактабельные и коретрактабельные модули // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Том 19, №2. С. 5–20.

14. Žemlička J. Completely coretractable rings // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2013. Vol. 39, No. 3. P. 523-528.

15. Артемов Д. Ю. Ретрактабельные и коретрактабельные абелевы группы // в печати.

REFERENCES

1. Sokolov, E. V. 2014, "Separability of subgroups of nilpotent groups in the class of finite π-groups", *Siberian Math. J.*, vol. 55, no. 6, pp. 1126–1132.
2. Mal'tsev, A. I. 1958, "On homomorphisms onto finite groups", *Uchenye zapiski IGPI*, vol. 18., pp. 49-60 (russian).
3. Fomin, A. A. 2018, "On the quotient divisible group theory. II", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 457–483.
4. Fuchs, L. 1970, "Infinite abelian groups", vol. 1, Academic press.
5. Fuchs, L. 1973, "Infinite abelian groups", vol. 2, Academic press.
6. Warfield, R. B. 1968, "Homomorphisms and duality for torsion-free groups", *Math. Z.*, vol. 107, pp. 189–200.
7. Richman, F. 1968, "A class of rank 2 torsion free groups", *Studies on Abelian Groups*, Paris, pp. 327–333.
8. Arnold, D. M. 1982, "Finite rank torsion free abelian groups and rings", *Lecture Notes in Math.*, vol. 931, Springer, NY.
9. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V. & Tuganbaev, A. A. 2013, "Endomorphism rings of Abelian groups", Springer Science & Business Media.
10. Kulikov, L. Ya. 1941, "On the theory of abelian groups of arbitrary power", *Mat. Sbornik*, vol. 16, pp. 129–162 (russian).
11. Kozhuhov, I. B. & Khalilullina, A. R. 2014. "Semigroups with finitely approximable polygons", *Mat. zametki SVFU*, vol. 21, no. 3, pp. 60-67 (russian).
12. Amini, B., Ershad, M. & Sharif, H. 2009, "Coretractable modules", *J. Aust. Math. Soc.*, vol. 86, no. 3, pp. 289–304.
13. Abyzov, A. N. & Tuganbaev, A. A. 2016, "Retractable and Coretractable Modules", *J. Math. Sci.*, vol. 213, no. 2, pp. 132–142.
14. Ẑemliĉka, J. 2013, "Completely Coretractable Rings", *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 39, no. 3, pp. 523-528.
15. Artemov D. Yu., "Retractable and Coretractable Abelian Groups", to appear.

Получено 12.08.2021 г.
Принято в печать 21.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 5.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-407-416

Двадцатилетний юбилей Чебышёвского сборника[1]

В. Н. Чубариков, С. С. Демидов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: serd42@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена двадцатилетию издания Чебышёвского сборника и выходу 80-ого выпуска журнала.

В статье освещены вопросы история создания журнала. Описаны этапы становления. Рассказано о вкладе различных ученых в работу журнала.

Приводятся некоторые наукометрические показатели.

Ключевые слова: Чебышёвский сборник.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков, С. С. Демидов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Двадцатилетний юбилей Чебышёвского сборника // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 5, С. 407–416.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 5.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-407-416

The twentieth anniversary of the Chebyshevskii Sbornik[2]

V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: serd42@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

This work is dedicated to the twentieth anniversary of the Chebyshev sbornik and the release of the 80th issue of the magazine.

The article highlights the history of the magazine. We describe the stages of formation. It talked about the contribution of various scientists in the journal work.

Provides some scientometric indicators.

Keywords: Chebyshevskii sbornik.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, S. S. Demidov, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, 2021, "The twentieth anniversary of the Chebyshev sbornik", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 407–416.

1. Введение

2021 год оказался непростым для журнала. Своё двадцатилетие журнал встречает на подъёме. Увеличилось количество выпусков, количество авторов. Существенно вырос объем журнала в страницах. Но за последний год ушли из жизни несколько членов редколлегии журнала и авторов, публиковавшихся в различные годы на страницах Чебышевского сборника. Всё это было тяжелой невосполнимой утратой. Тем не менее, журнал продолжает развиваться и в данной статье, которая использует материал работы [26], сделана попытка отразить основные вехи и достижения в двадцатилетней истории журнала.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

2. Немного истории

В 1993 году в сентябре месяце в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического института имени Л. Н. Толстого прошла 1-ая международная научная конференция "Современные проблемы теории чисел и её приложения". Она была приурочена к 165 годовщине со дня рождения великого земляка Тульской земли — Льва Николаевича Толстого.

Это было непростое время для страны. Тем не менее, конференция прошла успешно и заложила традицию проведения таких конференций в новой России. Успех конференции в значительной степени был обусловлен огромной организационной работой, которую провёл программный комитет под руководством своего председателя — доктора физико-математических наук, профессора Сергея Борисовича Стечкина (6.09.1920–22.11.1995). Сергей Борисович в то время был главным редактором журнала "Математические заметки" и избранные труды конференции были изданы в 1994 году во 2-ом выпуске 55 тома "Математических заметок" [1]–[19].

Вторая конференция прошла в 1995 году в городе Воронеж. Сергей Борисович по состоянию здоровья не смог присутствовать на конференции и его представлял доктор физико-математических наук, будущий академик РАН Сергей Владимирович Конягин. Успех конференции в значительной степени обязан доктору физико-математических наук, профессору Юлию Витальевичу Покорнову (6.02.1940–26.10.2010). Вскоре С. Б. Стечкин скончался и труды конференции не были изданы, только небольшой сборник тезисов.

В 1996 году была снова проведена конференция в городе Туле, теперь уже III международная. Эстафету по руководству программным комитетом взял на себя доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков, который был в это время заместителем декана механико-математического факультета по науке. Надо отметить, что хотя декан факультета доктор-физико математических наук, профессор, академик РАН Олег Борисович Лупанов (2.06.1932–3.05.2006) сам лично не принимал участия в конференциях по теории чисел, но он вникал во все вопросы по организации этих конференций и оказывал существенную помощь. Конференция прошла на хорошем научном и организационном уровне, был издан неплохой сборник тезисов, но сборника трудов конференции не издавали. В кулуарах конференции многие сетовали на отсутствие специализированного журнала по теории чисел в России, в котором, в частности, можно было бы печатать труды конференции.

Наступил 2001 год и снова в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого собралась, теперь уже IV-ая, международная конференция по теории чисел. Во время работы конференции 11 сентября произощёл чудовищный террористический акт в США, который потряс всё человечество, но участники конференции смогли достойно завершить работу конференции и принять очень важное решение об издании трудов конференции. Именно с целью издания трудов IV-ой международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения", посвящённой 180-ой годовщине со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 110-ой годовщине со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, и был двадцать лет тому назад организован Чебышёвский сборник.

Название будущего журнала родилось само собой, наверное, потому, что Пафнутий Львович Чебышёв (16.05.1821–8.12.1894) был одним из главных организатором первого в России математического журнала — «Математический сборник».

3. Этапы становления

Двадцать лет тому назад, в 2001 году вышли первые два тома Чебышёвского сборника, в которых были изданы труды конференции. В 2002 году третий том вышел в двух выпусках и была принята сквозная нумерация выпусков. Начиная с 2003 года журнал стал выходить в 4 выпусках в каждом томе. В нынешнем 2021 юбилейном году журнал вышел в 5 выпусках, а начиная со следующего года он будет выходить в 6 выпусках. Всего вышло 22 тома в 80 выпусках и нынешний выпуск будет 81.

В становлении журнала сыграли важную роль многие отечественные математики: во-первых, это академик О. Б. Лупанов, который своим авторитетом поддержал саму идею издания регулярного журнала по теории чисел. От бюро Математики Российской академии наук на первоначальном этапе становления журнала важную роль сыграл тогдашний ученый секретарь бюро — Игорь Андреевич Лавров. Неоценимую лепту в будущую судьбу журнала внёс Сергей Владимирович Конягин, который по своим научным связям обеспечил реферирование журнала в «Mathematical Reviews» (США, American Mathematical Society), что повлекло включение его в базу данных MathSciNet, а через десяток лет это стало автоматическим фактором внесения журнала в список ВАК.

Для становления журнала определяющей была роль Российского фонда фундаментальных исследований. Дело в том, что первые два тома журнала были изданы из средств гранта РФФИ на проведение конференции, а затем эта финансовая поддержка продолжалась на протяжении всех пятнадцати последующих лет издания журнала. С 2002 года Тульская школа теории чисел постоянно выигрывала исследовательские гранты РФФИ и часть средств из этих грантов выделяла на издание результатов своих исследований. Из этих средств финансировалось издание всех номеров Чебышёвского сборника на протяжении четырнадцати лет. Начиная с 2015 года финансирование журнала взял на себя учредитель — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

Практически сразу ответственный секретарь редколлегии журнала доктор физико-математических наук, профессор Пихтильков Сергей Алексеевич разработал сайт Журнала http://cheb.tsput.ru/, который он поддерживал вплоть до 2009 года, когда он переехал жить и работать в город Оренбург. В 2010 году заработала новая версия сайта Журнала, которая была разработана выпускницей факультета математики, физики и информатики ТГПУ им. Л. Н. Толстого. У Е. В. Зеленцовой это было темой её дипломной работы, но она и сама публиковалась в журнале [20], [21].

В 2013 году фирмой "Некоммерческое партнерство «Национальный Электронно-Информационный Консорциум» (НП «НЭИКОН»)" разработан новый сайт журнала http://www.chebsbornik.ru/jour в соответствии с международными требованиями. Эта работа была выполнена в связи с предполагаемой в ближайшее время подачей заявки на включение в Scopus. И в 2017 году журнал был включён в международную базу цитирования Scopus. Рейтинг журнала достаточно быстро рос и по результатам Чебышевский сборник уже в 2019-2020 годах стал входить в Q3.

Необходимо отметить, что журнал достаточно хорошо представлен в отечественном Интернете: электронная версия журнала размещена в открытом доступе на Общероссийском портале (http://www.mathnet.ru) и в Научной электронной библиотеке (http://elibrary.ru). Журнал также представлен в научной библиотеке открытого доступа «КИБЕРЛЕНИНКА» http://cyberleninka.ru/.

Ещё одно новшество связано с организацией "Библиотеки Чебышёвского сборника", которая стала неотъемлемой частью журнала. В этом разделе, например, размещаются Труды и сборники материалов конференций по математики и физике, которые проводятся на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

С самого начала функционирования первого сайта журнала на нём были организованы странички международных конференций по теории чисел, проводимых в ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Это естественная организация работы, так как журнал первоначально организовывался по решению конференции с целью отражения научной жизни в области теории чисел.

Ещё одним начинанием, связанным с журналом, является направление ПОИВС. Более подробно об этом можно прочитать в [22]–[25].

4. Редколлегия журнала

Формирование редколлегии в 2001 году взял на себя будущий ответственный секретарь редколлегии Сергей Алексеевич Пихтильков (2.03.1953–24.12.2015). В неё вошли: В. А. Артамонов (2.10.1947–21.06.2021), Г. И. Архипов (12.12.1945–14.03.2013), В. Н. Безверхний, М. М. Глухов (20.11.1930–9.12.2018), Е. С. Голод (21.10.1935–5.07.2018), Н. М. Добровольский, А. М. Зубков, В. И. Иванов, В. Н. Латышев (9.02.1934–13.04.2020), Д. А. Митькин (25.04.1951–9.04.2007), Ю. В. Нестеренко, А. Л. Шмелькин (12.06.1938–22.12.2015). Ответственным редактором первого тома был В. Н. Чубариков. Редактором второго тома был В. Н. Безверхний. Первый том содержал 8 статей по теории чисел, а второй том — 5 по алгебре, одну по теории алгоритмов, три по теории чисел и одну по теории функций.

Первые два тома вышли как "научные труды по математике". Регулярный выпуск Чебышёвского сборника как научного журнала начался уже в 2002 году с выхода третьего тома в двух выпусках. Расширился состав редакционной коллегии. Появились должности — главный редактор (В. Н. Чубариков), заместители главного редактора (Н. М. Добровольский, А. В. Михалёв), ответственный секретарь (С. А. Пихтильков). В члены редколлегии от ТГПУ вошёл профессор А. Р. Есаян (10.11.1937–4.12.2018).

С 2003 года журнал стал выходить регулярно — один том в 4 выпусках.

В 2007 году редколлегия понесла первую тяжёлую утрату. После продолжительной, тяжёлой болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел МПГУ, председатель диссертационного совета Дмитрий Алексеевич Митькин. Он относился к числу активных организаторов науки, принимал активное участие в организации математических конференций, был активным автором Чебышёвского сборника.

В 2010 в редакционной коллегии был добавлен ещё один заместитель главного редактора, представитель МПГУ профессор Нижников А. И., который в то время являлся первым проректором МПГУ. В конце 2012 года была проведена работа по расширению состава редколлегии и 1 выпуск 14 тома вышел с расширенным международным составом. Из России вошли профессора: В. А. Быковский, С. А. Гриценко, В. Г. Дурнев, В. К. Карташов (7.07.1937–14.11.2021), М. А. Королёв, В. Н. Кузнецов, С. П. Мищенко, А. А. Фомин, В. Г. Чирский; из Беларусии — В. И. Берник, из Франции — М. Деза (27.04.1939–23.11.2016), из Украины — П. О. Касьянов, из Литвы — А. Лауринчикас, из Таджикистана — З. Рахмонов. В 2015 году в редколлегию вошли ректор ТГПУ им. Л. Н. Толстого профессор В. А. Панин, из Азербайджана — М. Дж. Марданов. В 2016 году в редколлегию вошёл представитель Израиля А. Я. Белов.

К сожалению, в последние годы редакционная коллегия понесла непоправимые утраты.

14 марта 2013 года не стало Геннадия Ивановича Архипова — доктора физико-математических наук, профессора, ведущего научного сотрудника Математического института РАН им. В. А. Стеклова, который стоял у истоков журнала и внёс неоценимый вклад в организацию традиционных международных конференций по теории чисел в России.

В конце 2015 года в декабре месяце ушли сразу два члена редколлегии: профессора А. Л. Шмелькин и С. А. Пихтильков. А через год трагически погиб в Париже профессор М. Деза. В 2018 году не стало сразу двух членов редколлегии — Е. С. Голода и М. М. Глухова.

В 2020 году не стало Виктора Николаевича Латышева, который стоял у истоков журнала Чебышевский сборник и Тульских международных конференций по алгебре и теории чисел. Таким образом, от первоначального состава редколлегии осталось только пять человек.

Начиная с января 2016 года обязанности ответственного секретаря выполняет Н. Н. Добровольский. В 2016 году была решена непростая задача приведения журнала к международным требованиям. Начиная с 4 выпуска 17 тома всем статьям в журнале стали присваиваться но-мера DOI. Все выполняемые в 2016 году работы были направлены на то, чтобы подать заявку на включение журнала в Scopus. И эта цель была достигнута. Начиная с 2017 года все выпуски журнала стали индексироваться в Scopus.

Вхождение в базу Scopus привело к дальнейшему росту популярности журнала и увеличения портфеля заявок на публикации. Всё это вызвало необходимость введения ещё одного ответственного секретаря — И. Ю. Ребровой. Был расширен состав редколлегии: вошли профессора С. В. Востоков, А. Е. Гвоздев, Д. В. Георгиевский, С. С. Демидов, М. А. Королёв, Ю. В. Матиясевич, У. М. Пачев, Лю Юнпин (Китай), Х. М. Салиба (Ливан), А. Х. Табари (Таджикистан). Позднее в состав редколлегии вошли: А. И. Боровков, В. И. Горбачёв, А. О. Иванов, А. Л. Семёнов, Л. А. Толоконников, И. Аллаков (Узбекистан) О. Р. Мусин (США), Л. Фукшанский (США), Д. Шяучюнас (Литва).

В нынешнем 2021 году журнал понёс сразу две невосполнимые утраты: из-за коронавирусной инфекции скончались члены редколлегии В. А. Артамонов и В. К. Карташов.

5. Наукометрические показатели

«Чебышёвский сборник» включен в международные базы данных Американского математического общества MathSciNet (MSN), реферативную базу данных по математике Zentralblatt MATH (zbMATH) FIZ Карлсруэ Института информационной инфраструктуры Лейбница (FIZ Karlsruhe, дистрибьютер – компания Springer), в базу данных Scopus.

Полные тексты статей журнала представлены на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru и в Научной электронной библиотеке eLibrary.ru.

В 2015 году «Чебышёвский сборник» был включен в состав российской коллекции Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science.

Высокие наукометрические показатели журнала в Российском индексе научного цитирования свидетельствуют о его востребованности и авторитетности в научном сообществе. Журнал в 2016 году имел двухлетний импакт-фактор равный 0,238 и занимал 59 место в рейтинге SCIENCE INDEX по тематике «Математика» из 103 изданий, представленных в РИНЦ. В 2020 году эти показатели выросли: двухлетний импакт-фактор стал равен 0,242 и он занял 57 место в рейтинге SCIENCE INDEX по тематике «Математика» из 108 изданий, представленных в РИНЦ. Ещё одним показателем роста популярности журнала стала необходимость перейти на 5 выпусков в 2021 году и на регулярный выпуск 6 номеров в год, начиная с 2022 года.

6. Заключение

Анализируя краткую историю создания и развития журнала Чебышёвский сборник, можно констатировать, что журнал стал научным явлением в математической научной жизни России. Пройден достаточно непростой путь. Редколлегия с оптимизмом смотрит в будущее и уверена что вместе с корпусом авторов и научных рецензентов сможет и дальше вносить существенный вклад в развитие отечественной и мировой математики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. С. Анашин Равномерно распределенные последовательности целых pp-адических чисел // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 3–46.

2. Д. Грейвс Представление числа суммой двух четвертых степеней // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 47–58.

3. С. А. Гриценко Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 59–61.
4. В. В. Евликов Скорость сходимости к нормальному закону распределения // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 62–71.
5. С. Ш. Кожегельдинов Об основных героновых треугольниках // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 72–79.
6. В. А. Колывагин О модулярной гипотезе и последней теореме Ферма // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 80–82.
7. Н. М. Коробов Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 83–90.
8. В. И. Нечаев К вопросу о сложности детерминированного алгоритма для дискретного логарифма // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 91–101.
9. А. И. Павлов Арифметические проблемы комбинаторного анализа // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 102–108.
10. Е. И. Пантелеева О средних значениях некоторых арифметических функций // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 109–117.
11. У. М. Пачев О числе классов гауссового рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 118–127.
12. Э. Станкус Предельная теорема с весом для квадратичных LL-функций Дирихле // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 128–129.
13. С. Б. Стечкин Некоторые экстремальные свойства тригонометрических сумм // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 130–143.
14. Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 144–156.
15. Ш. Х. Тутушев О распределении чисел специального вида // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 157–161.
16. А. Л. Чекин О новом подходе в выборе параметров двумерного решета с весами // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 162–173.
17. А. Б. Шидловский О линейной независимости значений EE-функций в алгебраических точках // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 174–185.
18. С. Б. Стечкин Информация // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 186–187.
19. Решение Международной конференции “Современные проблемы теории чисел” // Матем. заметки, 1994. Т. 55, № .2. С. 187.
20. А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 2. С. 10–54.
21. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

22. Басалов Ю. А., Басалова А. Н. ПОИВС: Архитектура и этапы создания // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 4(48). С. 13—25.

23. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Проблемно ориентированная информационно вычислительная система ТМК (теоретико-числовой метод Коробова) // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том. С. 16–28.

24. Добровольский Н. М. Проблемно ориентированная информационно вычислительная система (ПОИВС) как индикатор эффективности научной школы // Всероссийская научно-практическая конференция «Совершенствование системы взаимодействия Российского фонда фундаментальных исследований и субъектов Российской Федерации в вопросах проведения региональных и молодежных конкурсов» г. Уфа 2016. Издательство «Российский фонд фундаментальных исследований». 2016. С. 160–162.

25. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., "ПОИВС "ТМК" и информационно-математическая подготовка студентов и аспирантов в области теоретико-числовых методов приближенного анализа" // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том. С. 29–36.

26. В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский. Юбилей Чебышёвского сборника // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 4(60). С. 5–10.

REFERENCES

1. V. S. Anashin, 1994, Uniformly distributed sequences of pp-adic integers // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 3–46.

2. d. Graves, 1994, The representation of a number by the sum of two fourth powers // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 47–58.

3. S. A. Gritsenko, 1994, Refinement of one constant in the density theorem // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 59–61.

4. V. V. Evlikov, 1994, The rate of convergence to the normal distribution law // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 62–71.

5. S. S. Kozhegeldinov, 1994, On the main Heron triangles // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 72–79.

6. V. A. Kolyvagin, 1994, On the modular hypothesis and Fermat's last theorem // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 80–82.

7. N. M. Korobov, 1994, Quadrature formulas with combined grids // Math. notes, vol. 55, № .2. pp. 83–90.

8. V. I. Nechaev, 1994, On the complexity of a deterministic algorithm for a discrete logarithm // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 91–101.

9. A. I. Pavlov, 1994, Arithmetic problems of combinatorial analysis // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 102–108.

10. E. I. Panteleeva, 1994, On the average values of some arithmetic functions // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 109–117.

11. U. M. Pachev, 1994, On the number of classes of Gaussian genus whose arithmetic minimum is divisible by the square of a given odd number // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 118–127.

12. E. Stankus, 1994, The limit theorem with weight for quadratic Dirichlet LL-functions // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 128–129.

13. S. B. Stechkin, 1994, Some extreme properties of trigonometric sums // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 130–143.

14. N. M. Timofeev, M. B. Khripunova, 1994, Distribution of numbers with a given number of prime divisors in progressions // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 144–156.

15. Sh. Kh. Tutushev, 1994, On the distribution of numbers of a special kind // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 157–161.

16. A. L. Chekin, 1994, On a new approach in choosing parameters of a two-dimensional sieve with weights // Mat. notes, vol. 55, № . 2. pp. 162–173.

17. A. B. Shidlovsky, 1994, On the linear independence of the values of EE-functions in algebraic points // Math. notes, vol. 55, № . 2. pp. 174–185.

18. S. B. Stechkin, 1994, Information // Math. notes, 1994. vol. 55, № . 2. pp. 186–187.

19. The solution of the International Conference "Modern problems of number theory" // Math. notes, 1994. Vol. 55, № . 2. p. 187.

20. A. S. Herzog, E. D. Rebrov, E. V. Tricolich, 2009, On the method of K. K. Frolov in the theory of quadrature formulas // Chebyshevsky sat. vol. 10, vol. 2. pp. 10–54.

21. E. V. Tricolich, E. I. Yushina, 2009, Chain fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ //Chebyshevsky sat., vol. 10, issue 1. pp. 77–94.

22. Basalov Yu. A., Basalova A. N., 2013, POIVS: Architecture and stages of creation // Chebyshevsky collection. vol. 14, issue 4(48). pp. 13–25.

23. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2010, Problem-oriented information computing system TMK (theoretical-Korobov's numerical method) // The role of universities in supporting humanitarian scientific research: Materials of the V International Scientific and Practical Conference: In 2 vols. / Ed. O. G. Vronsky. Tula: Publishing House of TSPU named after L. N. Tolstoy. Additional volume. pp. 16–28.

24. Dobrovolsky N. M., 2016, Problem-oriented information computing system (POIVS) as an indicator of the effectiveness of a scientific school // All-Russian scientific and practical conference "Improving the system of interaction between the Russian Foundation for Basic Research and the subjects of the Russian Federation in matters of regional and youth competitions" Ufa. Publishing house "Russian Foundation for Fundamental Research". pp. 160–162.

25. Dobrovolsky N. M., Rebrova I. Yu., 2010, "POIVS"TMK" and information-mathematical training of students and postgraduates in the field of theoretical-numerical methods of approximate analysis" // The role of universities in supporting humanitarian scientific research: Materials of the V International Scientific and Practical Conference: In 2 vols. / Ed. O. G.

Vronsky. Tula: Publishing House of TSPU named after L. N. Tolstoy. Additional volume. pp. 29–36.

26. V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky., 2016, Anniversary of Chebyshevsky collection // Chebyshevsky sat. Vol. 17, issue 4(60). pp. 5–10.

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-417-418

Памяти Вячеслава Александровича Артамонова

Некролог

2 октября 1947 — 21 июня 2021

21 июня после тяжелой болезни, вызванной коронавирусной инфекцией, скончался доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, профессор Вячеслав Александрович Артамонов.

Вячеслав Александрович родился 2 октября 1946 г. в г. Туле. Поступил на механико-математический факультет МГУ в 1963 г. и окончил его в 1968 г. Обучался в аспирантуре механико-математического факультета (1968 – 1970) под научным руководством профессора А. Г. Куроша, защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата (1971) и доктора (1990) физико-математических наук. Вся научно-педагогическая деятельность В. А. Артамонова связана с кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, доцентом которой он работал в 1976–1996 гг. и профессором — с 1996 г.

Научные интересы Вячеслава Александровича отличались широтой и разнообразием. Он внёс значительный вклад в развитие таких областей современной алгебры, как универсальная алгебра (многообразия, квазимногообразия универсальных алгебр), производные структуры (конгруэнции, группы автоморфизмов и т.д.), теория колец и модулей (квантовые многочлены, квантовые аффинные пространства, квантовые группы, действия алгебр Хопфа на квантовых многочленах, квантовые тела, проективные модули над квантовыми многочленами, групповыми алгебрами и универсальными обёртывающими алгебрами алгебр Ли), теория квазигрупп, приложения алгебры к изучению квазикристаллов, алгебраические методы в теории кодирования и криптографии. Среди результатов В. А. Артамонова отметим следующие.

Получена классификация многообразий неассоциативных алгебр и групп, у которых решётка подмногообразий является цепью.

Доказана свободность проективных метабелевых групп и алгебр Ли.

Доказано наличие проективных несвободных объектов в произведении нильпотентного и локально конечного многообразий групп.

Доказана квантовая гипотеза Серра: проективные модули ранга не меньше 2 над кольцом квантовых многочленов свободны.

Получена классификация разрешимых групп и алгебр Ли, для которых все проективные модули над групповым кольцом или универсальной обёртывающей алгеброй свободны.

Дана общая конструкция свободного абелевого расширения в конгруэнц-модулярных многообразиях универсальных алгебр. Эта конструкция используется для изучения свободных разрешимых алгебр любого класса в данном конгруэнц-модулярном многообразии алгебр.

В терминах циклических разложений перестановок строк и столбцов латинских квадратов описаны простые и нелинейные квазигруппы порядка 4, изучены свойства полиномиальной полноты конечных квазигрупп.

Вячеслав Александрович вел большую педагогическую работу: читал курсы лекций по высшей алгебре на первом и втором курсах механико-математического факультета, курс линейной алгебры для математиков-экономистов третьего курса , спецкурс "Алгебра, логика и теория чисел" (по программе ВАК) для аспирантов и студентов 3-5 курсов механико-математического факультета, а также курсы "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" на первом курсе и "Теория групп и ее приложения" для студентов старших курсов и аспирантов в Высшем колледже наук о материалах, руководил совместно с другими сотрудниками кафедры научными семинарами "Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры", "Кольца, модули и матрицы", "Компьютерная алгебра". Под руководством Вячеслава Александровича подготовлены и защищены 15 кандидатских диссертаций.

Много внимания уделял Вячеслав Александрович организации научно-исследовательских работ кафедры по совместным проектам с отечественными и зарубежными партнёрами.

В. А. Артамонов являлся членом Американского математического общества (1973), членом редколлегий журналов "Фундаментальная и прикладная математика" (МГУ, ИНТУИТ), "Communications in Algebra" (США), "Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications" (Польша), "Algebra and Discrete Mathematics" (Украина), "Quasigroups and related topics" (Молдова), "Абелевы группы и модули" (Томский государственный университет), "Чебышевский сборник" (Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого).

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким Вячеслава Александровича Артамонова в связи с его кончиной.

А. И. Шафаревич, В. Н. Чубариков, Д. О. Орлов, А. О. Иванов, А. В. Михалёв, В. Г. Чирский, А. Ю. Ольшанский, М. В. Зайцев, И. Б. Кожухов, А. Я. Канель-Белов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-5-417-418

Памяти Владимира Константиновича Карташова

Некролог

7 июля 1937 — 14 ноября 2021

14 ноября из-за коронавирусной инфекции скоропостижно скончался известный математик, профессор Волгоградского государственного социально-педагогического университета Владимир Константинович Карташов.

Карташов В. К. родился в Сталинградской области 7 июля 1937 года. В 1960 г. закончил физико-математический факультет Сталинградского педагогического института. Служил в Советской Армии в авиационных частях. После окончания аспирантуры в 1965 г. начал работать ассистентом, а затем старшим преподавателем на вновь созданной кафедре алгебры и геометрии. В 1980 году под руководством Л. А. Скорнякова (МГУ) и Д. М. Смирнова (Новосибирск) защитил кандидатскую диссертацию. В 1983 г. получил звание доцента, в 2000 г. ему присвоено ученое звание профессора, а в 1999 г. Карташов В. К. избран членом–корреспондентом Международной академии наук педагогического образования.

В 1981 году В. К. Карташов возглавил кафедру алгебры и геометрии, в настоящее время — кафедра высшей математики и физики, и руководил ей вплоть до 2019 года. При кафедре под его руководством были открыты магистратура (1996 г.) и аспирантура (1997 г.).

В течение нескольких лет работал проректором Волгоградского государственного педагогического университета по научной работе.

Карташов В. К. является автором более 60 научных и методических работ в российских и зарубежных изданиях, в том числе трех учебных пособий с грифом УМО. Им подготовлено несколько кандидатов наук. Среди его учеников заведующие кафедрами Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

Круг научных интересов В. К. Карташова связан с важным разделом универсальной алгебры — теорией унарных алгебр, то есть алгебр с унарными операциями. В кандидатской диссертации им получены замечательные результаты о базисах квазитождеств квазимногообразий унаров. В дальнейшем им получены важные результаты о строении унаров и классов унаров с заданными свойствами решеток конгруэнций, а также конструкция мальцевских унаров.

Основные результаты относятся к теории квазимногообразий унаров. Доказано, что любой конечнопорожденный унар имеет независимый базис квазитождеств. При этом этот базис конечен тогда и только тогда, когда унар конечен.

Построен алгоритм нахождения независимого базиса квазитождеств любого конечнопорожденного унара. Установлено существование континуума квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Описаны все атомы решетки $L(1)$ всех квазимногообразий унаров. Показано, что в решетку $L(1)$ вложима свободная решетка счетного ранга.

Найдены критерии того, что решетка $L(M)$ всех подквазимногообразий произвольного квазимногообразия M унаров является дистрибутивной, полудистрибутивной, булевой, с дополненниями, с псевдодополнениями либо стоуновой. Доказано, что множество всех квазимногообразий унаров относительно умножения по правилу Мальцева является полугруппой. Описан центр этой полугруппы и найден базис квазитождеств с одной переменной, истинных на ней.

В дальнейшем В. К. Карташовым были получены и другие результаты о классах унарных алгебр с заданными свойствами решеток конгруенций и строении алгебр, связанных с унарными алгебрами.

Среди них:

- теорема о конечной базируемости любого многообразия коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры. Этот результат продолжает результат Г. Биркгофа о том, что любая конечная унарная алгебра имеет конечный базис тождеств;
- несколько необходимых условий дистрибутивности и модулярности решеток конгруенций коммутативных унарных алгебр;
- доказано, что решетка всех подмножеств любого множества изоморфна решетке конгруенций некоторой связной коммутативной унарной алгебры.

В последнее время были получены интересные результаты об алгебрах многообразия $\mathbf{B}_{1,1}$. Это многообразие всех алгебр с двумя унарными операциями f, g, определяемое тождеством

$$fg(x) = x.$$

Ранее свойства конгруенций алгебр этого многообразия изучал его ученик А. П. Бощенко.

Обозначим через $\mathbf{A}_{1,1}$ многообразие алгебр с двумя унарными операциями f, g, определяемое тождествами

$$fg(x) = x \quad \text{и} \quad gf(x) = x.$$

В. К. Карташовым доказаны следующие теоремы:

1. *Для любой сильно связной алгебры многообразия $\mathbf{B}_{1,1}$ имеет место равенство*

$$\operatorname{End} A = \operatorname{Aut} A$$

   (то есть каждый эндоморфизм алгебры A является автоморфизмом).

2. *Многообразие $\mathbf{B}_{1,1}$ является покрытием многообразия $\mathbf{A}_{1,1}$ в решетке всех многообразий унарных алгебр с двумя унарными операциями.*

В. К. Карташовым введено понятие независимого множества элементов унарной алгебры. Им установлено, что любые две независимые системы порождающих унарной алгебры имеют одну и ту же мощность. Кроме того, доказано, что любая конечно порожденная унарная алгебра с коммутирующими между собой операциями обладает свойством Хопфа: каждый ее эпиэндоморфизм является автоморфизмом.

В. К. Карташов проводил большую научно-организационную деятельность. Кафедра, которую возглавлял В. К. Карташов, имеет постоянные контакты с учеными МГУ имени М. В. Ломоносова, Института математики СО РАН, Саратовского государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого и других ведущих научных центров России.

На кафедре длительное время работает научно-исследовательский семинар по проблеме «Алгебраические системы, связанные с унарными алгебрами». Семинар был основан Л. А. Скорняковым. Долгие годы до настоящего времени им руководили В. А. Артамонов и В. К. Карташов. На этом семинаре неоднократно выступали такие известные математики, как Д. М. Смирнов, А. В. Михалев, В. Н. Латышев, В. Н. Чубариков, З. И. Боревич, Л. Н. Шеврин, В. А. Горбунов, В. А. Молчанов, Д. А. Бредихин и др.

Шесть членов кафедры и участников семинара успешно защитили кандидатские диссертации. На базе Волгоградского социально-педагогического университета совместно с кафедрой высшей алгебры МГУ имени М. В. Ломоносова проведены три международных семинара и две Международные конференции по направлению «Универсальная алгебра, теория чисел и их приложения».

Заслуги Владимира Константиновича в области образования высоко оценены руководством страны. Он награжден:

- Нагрудным значком «За отличные успехи в работе» (за заслуги в области высшего образования СССР), Министерство высшего и среднего специального образования СССР;
- Нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования России» № 1728 (Приказ № 16-47 от 07.07.98 г.);
- Орденом Дружбы (№ 6702, удостоверение № 389214), Указ Президента Российской Федерации № 623 от 19.06.2002 г.

Волгоградский педагогический университет, в котором В. К. Карташов проработал более 55 лет, отметил его заслуги в области высшего образования Знаком ВГСПУ «За заслуги» II и III степени, многими грамотами. Кроме того, решением Ученого совета ему присвоено звание «Почетный профессор ВГСПУ».

Волгоградская областная и городская Администрации неоднократно награждали Владимира Константиновича Почетными грамотами.

С кончиной В. К. Карташова Волгоградский государственный социально-педагогический университет и математическое сообщество потеряли замечательного человека: верного друга, блестящего математика и великолепного организатора.

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким Владимира Константиновича Карташова в связи с его кончиной.

В. Н. Чубариков, А. В. Михалёв, И. Б. Кожухов, А. Я. Канель-Белов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, А. П. Бощенко, П. Б. Жданович, А. В. Карташова, А. Л. Расстригин, В. Л. Усольцев, Н. А. Щучкин, С. В. Сыроватская

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 22 Выпуск 5

THE EDITORIAL BOARD

Volume 22 Issue 5

TABLE OF CONTENTS

Volume 22 Issue 5